研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

微分流形初步

An Introduction to Differentiable Manifold

(第二版)

陈维桓　编著

高等教育出版社

微分流形是20世纪数学的有代表性的基本观念，是描述许多自然现象的一种空间形式。本书是微分流形理论的入门教材，是联系经典数学和当代数学文献的桥梁，主要内容是介绍微分流形的基本概念和例子、微分流形上的光滑切向量场、光滑张量场、外微分式的运算和性质，以及黎曼流形、李群、微分纤维丛的初步知识。全书的叙述深入浅出，平易流畅，重点突出，强调几何背景，着重介绍在微分流形上如何通过局部坐标系来处理大范围定义的数学对象。通过本书的学习，会在微分流形的理论和应用方面打下坚实的基础，并且为学习当代数学文献创造条件。

本书可供综合大学、高等师范院校数学系研究生和高年级本科生作为“微分流形”课，或“黎曼几何引论”课，或“近代微分几何”课的教材，也可供力学、理论物理等相关学科的学生、教师和研究工作者参考。

献给当代几何大师

陈省身 教授

序　　言

我国数学界已经逐渐形成一种共识，应当加强几何学的教学．数学科学虽有众多的分支，却是有机的统一．几何的、代数的、分析的方法相辅相成，使现代数学成为人类认识世界、改造世界的锐利武器．几何学的对象比较直观，比较接近人们的生活经验，所以更能激发开创性思维．数学历史上许多划时代的新思想，如无理数的发现，公理化方法的起源，坐标方法的提出，非欧几何的诞生，空间观念的演变，对整体性质和行为的关注，非线性数学的兴起等等，都首先发生在几何学的沃土上．然而从 50 年代到 70 年代我国大学的几次教学改革中，几何课程曾被一再削弱．当时吴光磊先生就一语双关地批评这种现象为“得意忘形”，历史的发展证明他是有远见的．今天，数学科学发展的大趋势是走向综合，几何学的观点、方法、语言正在大规模地向其他数学分支渗透．而在高新技术发展的过程中，几何学的原理又得到了空前的应用．无论是在计算机图形学、CT 扫描或核磁共振成像、视觉信息处理，还是在机器人、虚拟现实、数字仿真技术，都广泛采用了传统的和现代的几何学理论．当前，在面向 21 世纪的教学改革中，既要拓宽基础，又要削减课时，课程设置面临很大的压力．我们应该记取过去走过这段弯路的教训，千万不要忘记几何素养是数学素养的非常重要的方面．

微分流形是描述无数自然现象的一种空间形式，是 20 世纪数学的有代表性的基本观念．就像欧氏空间与古典分析的关系一样，微分流形为当代非线性分析的蓬勃发展提供了舞台和语言，它本身就集几何、代数、分析于一体．从 80 年代以来，不少学校在不同学科不同层次的专门课程中都要讲一点微分流形，从而产生了单独设课的要求．陈维桓教授的《微分流形初步》就是为这样的需要而写的教材，经过多年教学实践的锤炼已经比较成熟．入门的书比专门的书难写．这本书不是单为研究几何学的人，而是为一般的学数学的本科生和研究生写的，所以它的出版对加强几何的教学会起很好的作用．希望同学们一定要在老师的帮助下，在学习抽象概念的同时掌握具体的例子，从简练的公式背后看出丰富的图形，逻辑的理解与形象的认识并重．能够举一反三，才算真正学好．

姜伯驹

1998 年 2 月

前　记

在数学的发展过程中，综合与分析的方法始终是一对矛盾的两个方面．当前，在数学的各个分支学科已经分得很细的状况下，数学发展的势头看来是朝着在更高层次的综合方向发展．最有希望的是交叉学科、边缘学科，在这里，几何学起着基本的作用．数学界普遍认为在数学系本科的教学计划中应充实和加强几何学内容．几何学不仅广泛地用于复分析、非线性分析、偏微分方程、拓扑学、微分拓扑学、概率论、随机过程、数学物理和力学等分支学科，反过来这些分支学科也大大地促进了几何学本身的发展．黎曼几何自 1854 年问世以来，已经历了差不多 150 年，它在广义相对论中有成功的应用．特别是 20 世纪 30 年代以后，大范围微分几何登上了舞台，其里程碑就是陈省身关于黎曼流形上 Gauss-Bonnet 定理的内在证明．自此以后，微分流形、纤维丛理论成为数学工作者应该具备的知识．陈省身教授 1953 年在芝加哥大学开设的课程和讲义《微分流形》(见参考文献[22])在相当长时间内成为学习微分几何的蓝本，好几代几何学家就是在陈省身教授的课程和讲义的影响下成长起来的．他在 1978 年在北京大学开设的“微分几何”课以及随后出版的《微分几何讲义》(见参考文献[2])在我国培养新一代数学工作者的过程中起着同样重要的作用．

北京大学数学科学学院有很多专门方向都以微分流形的知识为基础，因此很多专门方向的课程在开头部分都要单独讲一段“微分流形”．1990 年北京大学数学系在修订教学计划时把“微分流形”列为数学系各个专业本科生的选修课，目的是把这部分内容作为各个专门方向的公共基础，一方面避免了不必要的重复，使得各个专门方向的课程可以提高它们的起点，另一方面把这部分内容从研究生课程下放到本科，普及了微分流形的理论，加强了数学系本科的几何学教学．我们对于这门课的设想是介绍微分流形的基本概念和例子，使学生熟悉微分流形上光滑切向量场、外微分式的性质和运算，并初步了解微分纤维丛等概念．用一句不很贴切的话来说，这是关于微分流形上的微积分的一门课，是数学分析、高等代数、解析几何等基础课程的必要的延伸和补充，是联系经典数学和当代数学文献的桥梁．学习的重点是如何处理在微分流形上大范围定义的对象．

经过多年的实践，我们觉得把陈省身、陈维桓著的《微分几何讲义》(即[2])一书中的一、二、三、六等章作为本课程的教学内容是适当的．目前这本教材就是以此为基础结合多年的教学实践写成的．考虑到这门课是数学系本科高年级学生的选修课，也是研究生一年级的必修课，我们尽可能把概念表述得比较具体，比较直观，更多地与欧氏空间中已经熟悉的概念联系起来．例如，在

本书我们把光滑流形上的光滑切向量场定义为在光滑流形上每一点都指定了一个切向量,并且当它在局部上用自然标架线性表示时,其分量是局部坐标的光滑函数.这样的概念与我们平常对于光滑切向量场的了解是一致的.然后,在此基础上把光滑切向量场看成作用在光滑函数上而获得光滑函数的映射.后者是现在所流行的关于光滑切向量场的不用坐标的定义.当然,后一种说法有很多应用;但是,前一种讲法更加直观,更贴近我们已有的知识.我们的目标之一是建立这两者之间的联系.在当前的文献中,无坐标的处理似乎成为一种时尚.但是我们认为,至少是在基础课上,采用局部坐标的讲法有助于学生理解抽象概念的实质,也有利于提高学生的计算能力.我们在本书采用两者相结合的办法,重点是强调局部坐标的功用.

本书有两种用途:一是作为“微分流形”课的教材,而在该课程基础上再开设“黎曼几何引论”课;二是作为“黎曼几何”课的教材,这比较适用于对黎曼流形只需要有一般性了解的各个专门研究方向的学生.“微分流形”课作为周学时为3(或4)的一学期课程,要讲完本书的全部内容显得有些困难;况且我们在有些章节的最后时常会提到一些有关的重要概念和结论,没有作详细的解说,目的是帮助读者了解这个课程的应用及后续发展,供读者自学.因此,我们建议“微分流形”课的内容由以下章节的主要部分组成:

第一章,
第二章 §1—§4,§6,
第三章 §1—§4,
第四章 §1—§3,§5,
第六章 §1,§2,§5.

其余部分可以作为自学和参考的材料.“黎曼几何”课的内容可以由下列章节组成:

第一章,
第二章 §1—§4,§6,
第三章 §1—§5,
第四章 §1—§3,§5,
第五章.

陈省身教授在“微分几何的过去与未来”一文(见[2])中指出:

“要研究整个流形,流形论的基础便成为必要.流形内的坐标是局部的,本身没有意义;流形研究的主要目的是经过坐标卡变换而保持不变的性质(如切矢量,微分式等).这是与一般数学不同的地方.这些观念经过几十年的演变,渐成定型.将来数学研究的对象,必然是流形;传统的实数或复数空间只是局部的情形(虽然在许多情形下它会是最重要的情形).”

本书在实质上是[2]的一、二、三、六章的扩充. 我们力图使本书能够比较好地贯彻陈省身教授的上述观点. 我们期望本书符合数学课程内容改革的方向，对数学系学生有用，同时也对想初步了解微分流形的非数学系学生有用；不仅可以供数学系本科高年级学生使用，更应该是数学研究生的必读教材.

本书的写作是在首届国家教委数学与力学教学指导委员会几何、拓扑教材编审组的推动下完成的. 全书的纲要及第一章——第四章的初稿曾分别经过几何、拓扑教材组的讨论. 作者在此对几何、拓扑组组长胡和生院士及全体成员表示衷心的感谢. 在本课程的设计和形成的过程中得到姜伯驹院士和北京大学数学科学学院钱敏教授，郭懋正教授，张筑生教授的关心、支持和建议；另外，文兰教授，刘张矩教授也分别讲过该课程，提供了不少宝贵的意见和经验，作者对他们表示深切的感谢. 莫小欢博士也仔细地阅读过本书第一章——第四章的初稿，并且提出了一些改进意见，作者在此表示感谢. 在本书交稿之后，复旦大学数学系潘养廉教授对全稿作了仔细审阅；责任编辑胡乃炯对全书的编辑付出了辛勤的劳动，作者对他们表示感谢. 最后，在本书写作和修订过程中作者一直得到国家自然科学基金会的支持（项目号 19571005 和 19871001），在印成内部讲义时得到北京大学教材建设委员会的支持，使得本书的写作和内部讲义的印刷能顺利地进行，在此对他们一并表示感谢.

本书第一版在 1998 年问世后，受到数学界和教育界的广泛重视. 现在，本书由教育部推荐为全国研究生数学教材，作为第二版重新出版. 尽管本书的内容在北京大学数学系讲过多次，而且已经过认真的订正和修改，但是限于作者的水平，本书中需要改进之处、不妥当之处、甚至于错误都可能是存在的. 作者诚恳地希望读者能不吝指正.

陈维桓

2001 年 2 月于北京大学

目　　录

第一章　预备知识

粗略地说，几何学的发展史就是空间观念的发展史．例如，非欧几何的产生说明欧几里得的平行公设不是空间本身所固有的特性，而是加在空间上的先验性假定．这样，空间的观念有了革命性的突破．如果用一种新的平行公设代替欧几里得的平行公设，我们便有一个新的空间，产生一种新的几何学．再如，笛卡儿坐标的引进，使得代数方法进入了几何学，为几何学的分析研究铺平了道路．

"空间"的重要性在于它是数学演出的舞台；随着一种新空间观念的出现和成熟，新的数学就会在这个空间中展开和发展．"微分流形"的概念首先是黎曼提出来的，他把 n 个变量看作 n 维空间中动点的坐标．此时，坐标本身不再具有特别的几何含义，人们关心的是那些能够用坐标表达、然而与坐标系的选择无关的量．因而我们可以考虑这样的空间，它没有适用于整个空间的坐标系，而在每一点的邻域内存在局部适用的坐标系，但是我们仍然能够研究在空间中大范围定义的量，即与局部坐标系选择无关的量．微分流形概念的产生和精确化是当代数学的一大成就，"微分流形"是大范围分析和整体微分几何演出的舞台，同时微分流形的拓扑是重要的研究课题．

n 维欧氏空间是 n 维微分流形最简单的例子和模型．微分流形的概念和构造是从欧氏空间的概念和有关构造脱胎而来的．此外，根据 Whitney 的定理，任意一个 n 维微分流形都可以看作维数充分高(例如，$2n+1$ 维)的欧氏空间的子流形．因此，了解 n 维欧氏空间是十分必要的．我们首先要介绍 n 维欧氏空间及有关的概念．

在解析几何课中，我们已经熟悉了我们所处的现实空间，并且在其中建立了笛卡儿坐标系．然而 n 维欧氏空间不能用直观的方式去建立，我们通过公理化的方式将它建立在 n 维向量空间及 n 维欧氏向量空间的基础上．在本章，我们侧重于从几何上去了解 n 维欧氏空间，其次，我们要在欧氏空间中建立曲纹坐标的概念，并且把向量和方向导数等同起来．这一切都是为微分流形一般概念的建立作必要的准备．另外，在线性代数中我们已经学习过张量及外代数的理论，但是在那里更多的注意力放在它们的代数结构上．在本章，我们要复习张量和外代数理论，并且强调它们的几何应用．张量代数及外代数是研究高维空间的几何的有力的代数工具．

§1　n 维欧氏空间

17 世纪中叶，笛卡儿(和费马)引进了空间直角坐标系，建立了空间中的

点与有序实数组之间的对应，这应该说是近代数学的起点. 笛卡儿所建立的空间直角坐标系如下：在空间中取定一点 O，并且取经过该点的三条互相垂直的有向直线 OX，OY，OZ，在每条直线上取定单位长度. 点 O 称为坐标原点，OX，OY，OZ 称为坐标轴，它们两两张成的平面叫做坐标平面. 根据欧氏几何的公理，经过空间中任意一点 P，可以作唯一的一个平面与 OXY 平面平行，它与 OZ 轴的交点记为 P_z，同理，经过点 P 有唯一的平面与 OYZ 平面平行，有唯一的平面与 OXZ 平面平行，它们与 OX 轴，OY 轴的交点分别记为 P_x，P_y. 把点 P_x，P_y，P_z 在它们所在的数轴上对应的实数分别记为 x，y，z，于是点 P 唯一地决定了一组有序的实数 (x,y,z)，称为点 P 在上述笛卡儿直角坐标系下的坐标. 反过来，在已知的笛卡儿直角坐标系下有序数组 (x,y,z) 在空间中唯一地确定了一点 P 以该数组作为它的坐标. 要指出的是，在建立坐标系时已经先验地假定我们所处的空间是欧氏空间，即欧几里得的平行公设是成立的.

若在欧氏空间中任意给定两个不同点 P_1，P_2，则有唯一的一条直线段把它们连结起来. 我们把连结 P_1，P_2 的有向直线段称为以 P_1 为起点、以 P_2 为终点的向量，记作 $\overrightarrow{P_1P_2}$. 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在空间中可以平行移动到任意一点 Q_1，得到长度和方向都与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 一致的向量 $\overrightarrow{Q_1Q_2}$，记为 $\overrightarrow{Q_1Q_2}=\overrightarrow{P_1P_2}$. 实际上，根据欧几里得平行公设，经过点 Q_1 有唯一的一条直线平行于 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所在的直线，然后在该直线上可取点 Q_2，使得 $P_1P_2Q_2Q_1$ 成为平行四边形. 因此，$\overrightarrow{P_1P_2}$ 作为自由向量（即起点可以是空间中任意一点的向量）也唯一地对应于一组有序实数，称为向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标，它们是终点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 和起点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 的坐标之差：

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

两个向量相等的条件就是它们的坐标相等.

要强调指出的是，坐标系是附加在空间上以便用代数手段表示和研究几何对象的一种构造，几何对象的性质应该与所选取的坐标系是无关的. 例如，在解析几何学中二次曲线和二次曲面的形状和分类，就是用与坐标变换无关的不变量来刻画的.

高于 3 维的欧氏空间没有这种直观的描述，它们的概念的建立借助于向量空间和适当的公理系统.

所谓数域 F 上的**向量空间**是指一个交换群 V，其元素称为向量，群的运算记为加法，并且定义了数 $\lambda\in F$ 与向量 $v\in V$ 的乘法 λv，满足以下条件：

(1) $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$;

(2) $(\lambda\mu)v=\lambda(\mu v)$;

(3) $\lambda(v_1+v_2)=\lambda v_1+\lambda v_2$;

(4) $1v = v$,

其中 $\lambda, \mu \in F, v, v_1, v_2 \in V$.

如果在 V 中存在 n 个元素 $\delta_1, \cdots, \delta_n$，使得 V 中任意一个元素 v 都能够表示成 $\delta_1, \cdots, \delta_n$ 的线性组合

$$v = \lambda^1\delta_1 + \cdots + \lambda^n\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \delta_i, \quad \lambda^i \in F, \tag{1.1}$$

并且这样的表达式是唯一的，则称 $\{\delta_i\}$ 为空间 V 的一个**基底**(或**基**). 基底 $\{\delta_i\}$ 中元素的个数 n 与基底的选择无关，称为域 F 上的向量空间 V 的维数.

今后我们着重讨论的是实向量空间，即 $F = \mathbf{R}$. 因此，当我们不特别指明所讨论的数域时都是指实数域.

设 V 是 n 维向量空间，$\{\delta_i\}$ 是它的一个基底，则由(1.1)式，每一个向量 $v \in V$ 唯一地对应着一组有序的实数 $(\lambda^1, \cdots, \lambda^n)$，称为向量 v 在基底 $\{\delta_i\}$ 下的坐标. 如果另有一个向量 w 以 $(\mu^1, \cdots, \mu^n)$ 为坐标，则向量 $v + w$ 的坐标是 $(\lambda^1 + \mu^1, \cdots, \lambda^n + \mu^n)$，且 $rv (r \in \mathbf{R})$ 的坐标是 $(r\lambda^1, \cdots, r\lambda^n)$. 很明显，如果将全体 n 元数组的集合记作 $\mathbf{R}^n$，并在 $\mathbf{R}^n$ 中规定如下的加法和数乘法：

$$(\lambda^1, \cdots, \lambda^n) + (\mu^1, \cdots, \mu^n) = (\lambda^1 + \mu^1, \cdots, \lambda^n + \mu^n),$$

$$r(\lambda^1, \cdots, \lambda^n) = (r\lambda^1, \cdots, r\lambda^n),$$

则 $\mathbf{R}^n$ 便成为一个 n 维向量空间. 由此可见，n 维向量空间 V 在取定基底 $\{\delta_i\}$ 之后，等同于向量空间 $\mathbf{R}^n$.

假定 V 是 n 维向量空间. 若在 V 上给定一个对称的、正定的双线性函数 $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbf{R}$，即它满足下列条件：

(1) $\langle v_1 + v_2, v\rangle = \langle v_1, v\rangle + \langle v_2, v\rangle$;

(2) $\langle \lambda v_1, v_2\rangle = \lambda\langle v_1, v_2\rangle$;

(3) $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_2, v_1\rangle$;

(4) $\langle v, v\rangle \geqslant 0$ 且等号只在 $v = 0$ 时成立，

其中 $\lambda \in \mathbf{R}, v_1, v_2, v \in V$，则称 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ 为 n 维**欧氏向量空间**. 满足上述条件的双线性函数 $\langle\ ,\ \rangle$ 称为**欧氏内积**，通常记成

$$v_1 \cdot v_2 = \langle v_1, v_2\rangle. \tag{1.2}$$

设 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ 为 n 维欧氏向量空间，则在 V 上能够取基底 $\{\delta_i\}$，使得

$$\langle \delta_i, \delta_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.3}$$

这样的基底称为 V 中的**单位正交基底**. 若在 V 中取定一个单位正交基底 $\{\delta_i\}$，则向量 v 和 w 的内积成为

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \mu^i, \tag{1.4}$$

其中

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \delta_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} \mu^i \delta_i. \tag{1.5}$$

若在 V 中有另一单位正交基底 $\{e_i\}$，且设

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i \delta_i, \tag{1.6}$$

则基底变换的过渡矩阵 (a_j^i) 是正交矩阵. 实际上，根据单位正交基底的条件(1.3)，我们有

$$\sum_{k=1}^{n} a_i^k a_j^k = \delta_{ij}. \tag{1.7}$$

对照(1.5)式和(1.7)式，它们都是和式. 但是在(1.5)式中，求和指标 i 出现两次，一次作为上指标，一次作为下指标；在(1.7)式中，求和指标 k 也出现两次，但是都是作为上指标出现的. 为简便起见，对于(1.5)式给出的和式，去掉和号不写，记成

$$v = \lambda^i \delta_i, \quad w = \mu^i \delta_i,$$

其意义仍然是关于指标 i 的和式，i 的取值范围是从 1 到 n. 这种规定称为 Einstein **和式约定**，它为多重和号的表达式提供了简便的记法. 例如，(1.6)式可记成 $e_j = a_j^i \delta_i$. 但是，(1.7)式不宜用 Einstein 和式约定. 在本章 §4 之后，我们将广泛使用这种约定. 有时为了强调起见，我们也把和号写出来.

在 n 元数组的集合 $\mathbf{R}^n$ 中，规定内积如下：

设

$$u = (\lambda^1, \cdots, \lambda^n),$$
$$v = (\mu^1, \cdots, \mu^n),$$

令

$$\langle u, v \rangle = u \cdot v^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \mu^i, \tag{1.4$'$}$$

其中 v^{T} 是指 v 作为矩阵的转置，则 $\mathbf{R}^n$ 便成为一个 n 维欧氏向量空间. 如前所述，在任意一个 n 维欧氏向量空间 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ 中取定一个单位正交基底 $\{\delta_i\}$，则 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ 和有标准内积(1.4)$'$ 的 $\mathbf{R}^n$ 是等同的. 以后我们在说到 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏向量空间时，就是指它具有标准内积(1.4)$'$. 下面我们叙述仿射空间和欧氏空间的概念.

定义 1.1　设 V 是 n 维向量空间，A 是一个非空集合，A 中的元素称为点. 如果存在一个映射 $\overrightarrow{\ \ }: A \times A \to V$，它把 A 中任意一对有序的点 P, Q 映为 V 中一个向量 $\overrightarrow{PQ} \in V$，且满足以下条件：

(1) $\overrightarrow{PP} = 0, \forall P \in A$；

(2)$\forall\ P\in A,\forall\ v\in V$,存在唯一的一点$Q\in A$,使得$\overrightarrow{PQ}=v$;

(3)$\forall\ P,Q,S\in A$,成立恒等式$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}$,

则称A是n维**仿射空间**,且称V是与仿射空间A**伴随的向量空间**.

在直观上,向量$\overrightarrow{PQ}$就是空间A中从点P指向点Q的**有向线段**.

若在n维仿射空间A中取定一点O,则从定义1.1可知,空间A中的点与伴随向量空间V中的向量是一一对应的:

$$P\in A\leftrightarrow\overrightarrow{OP}\in V.$$

此时,我们称O为空间A的**原点**,向量$\overrightarrow{OP}$称为点P的**向径**.这些向径都是有固定起点O的向量.

定义1.1的条件(2)还表明,每一个向量$v\in V$给出空间A到自身的一个变换,它把任意一点$P\in A$映为点$Q\in A$,使得$\overrightarrow{PQ}=v$.该变换称为向量v在空间A中决定的**平行移动**,或空间A沿向量v的平行移动.

给定点$P\in A$及非零向量$v\in V$,点集

$$\{Q\in A:\ \overrightarrow{PQ}=\lambda v,\forall\ \lambda\in\mathbf{R}\}$$

称为空间A中经过点P、以v为方向的直线.方向向量彼此线性相关的两条直线称为互相平行的.这样,条件(2)还表明:经过直线L外任意一点P,可以作、且只能作一条直线L'与L平行.这正好是3维欧氏空间中的平行公设,是建立笛卡儿坐标系的基础.

定义1.2 设A是n维仿射空间,V是伴随的向量空间.任取A中一点P及V中一个基底$\{v_i\}$,则称图形$\{P;v_i\}$为仿射空间A中的一个**标架**.

在仿射空间A中取定一个标架$\{O;\delta_i\}$就相当于在A中建立了一个(仿射)坐标系.此时,点$P\in A$与n元实数组$(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$建立了一一对应关系:

$$P\quad\leftrightarrow\quad\overrightarrow{OP}=\sum_{i=1}^{n}\lambda^i\delta_i\quad\leftrightarrow\quad(\lambda^1,\cdots,\lambda^n).$$

实数组$(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$称为点$P$在标架$\{O;\delta_i\}$下的坐标,或点$P$关于标架$\{O;\delta_i\}$的坐标.

定义1.3 设$(V,\langle\ ,\ \rangle)$是n维欧氏向量空间,则以V为伴随向量空间的仿射空间称为n维**欧氏空间**,记为E^n.欧氏空间E^n中任意两点P,Q之间的距离定义为

$$d(P,Q)=\sqrt{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}}.\tag{1.8}$$

很明显,E^n关于上面所定义的距离函数d成为度量空间(参看[13]).

若$\{\delta_i\}$是向量空间V中的单位正交基底,则$\{O;\delta_i\}$称为E^n中的一个**单位正交标架**,相应的坐标系就称为E^n中的笛卡儿直角坐标系.若在E^n中取定一个单位正交标架$\{O;\delta_i\}$,设点P的坐标为$(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$,点$Q$的坐标为$(\mu^1,\cdots,$

μ^n)，即

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \delta_i, \quad \overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^{n} \mu^i \delta_i, \tag{1.9}$$

则

$$\overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1}^{n} (\mu^i - \lambda^i) \delta_i, \tag{1.10}$$

故

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu^i - \lambda^i)^2}. \tag{1.11}$$

在这里，我们强调仿射空间、欧氏空间是点的空间，而向量空间、欧氏向量空间是向量的空间. 向量之间有代数运算(如加法)，而点与点之间没有代数运算. 点与向量是通过定义 1.1 中的条件建立起联系的，并且仿射空间和它所伴随的向量空间作为集合而言是可以建立一一对应的.

例 1　n 维向量空间 V 可以看作一个 n 维仿射空间 A.

令 $A = V$. 对于任意的 $v_1, v_2 \in A$，令

$$\overrightarrow{v_1 v_2} = v_2 - v_1,$$

其中右端是 v_2, v_1 作为向量空间 V 的元素之差. 显然，当 $v_2 = v_1$ 时，

$$\overrightarrow{v_1 v_1} = 0.$$

对于 $v_1 \in A, v \in V$，令 $v_2 = v_1 + v$，则 $\overrightarrow{v_1 v_2} = v$，且这样的 v_2 是唯一确定的；对于 $v_1, v_2, v_3 \in A$，则

$$\overrightarrow{v_1 v_2} = v_2 - v_1, \quad \overrightarrow{v_2 v_3} = v_3 - v_2,$$

所以

$$\overrightarrow{v_1 v_3} = v_3 - v_1 = \overrightarrow{v_1 v_2} + \overrightarrow{v_2 v_3}.$$

因此，根据定义 1.1，V 是 n 维仿射空间，它的伴随向量空间是 V 本身.

引进仿射空间的概念是为了使向量空间这种代数结构几何化. 同理，欧氏空间是欧氏向量空间的几何化. 当然，所有这些概念都是从现实的 3 维欧氏空间抽象出来的代数结构和几何结构.

从上面的叙述可以知道，n 元数组的集合 $\mathbf{R}^n$ 具有多重身份. 首先，它是一个 n 维向量空间；其次，$\mathbf{R}^n$ 又是一个 n 维欧氏向量空间，其标准内积是(1.4)′，即规定 $\mathbf{R}^n$ 的基底

$$\tilde{\delta}_i = (0, \cdots, \underset{(i)}{1}, \cdots, 0), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

是单位正交基.

我们还能把 $\mathbf{R}^n$ 看作点的集合，每一个 n 元数组 $(\lambda^1, \cdots, \lambda^n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个点. 如例 1 所示，$\mathbf{R}^n$ 是一个 n 维仿射空间，此时一对有序的点 P, Q 所对应的向量

$\overrightarrow{PQ}$ 恰好是点 Q 和点 P 的分量之差所构成的 n 元数组，因而它的伴随向量空间就是 $\mathbf{R}^n$ 自身. 自然，$\{\widetilde{O};\widetilde{\delta}_i\}$ 是仿射空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个标架，其中 $\widetilde{O}=(0,\cdots,0)$. 当规定 $\{\widetilde{\delta}_i\}$ 是单位正交基底时，则 $\mathbf{R}^n$ 便是一个以 $\{\widetilde{O};\widetilde{\delta}_i\}$ 为单位正交标架的 n 维欧氏空间.

按照我们现在的说法，设 E^n 是一个 n 维欧氏空间，如果在 E^n 中取定一个单位正交标架 $\{O;\delta_i\}$ 之后，也就是在 E^n 中建立了一个直角坐标系之后，E^n 便等同于 $\mathbf{R}^n$. 但是，在 E^n 中没有特定的坐标系，突出了坐标系是加在空间上的结构. 然而，$\mathbf{R}^n$ 有一个特定的坐标系，即标架 $\{\widetilde{O};\widetilde{\delta}_i\}$. 当然为简便起见，常常把 n 维欧氏空间记为 $\mathbf{R}^n$，其中距离函数由(1.11)式给出，其实这就是取定了一个单位正交标架 $\{O;\delta_i\}$ 的 n 维欧氏空间 E^n.

E^n 中全体单位正交标架的集合 $\mathscr{P}$ 是十分重要的几何对象. 设 $\{O;\delta_i\}$ 是在 E^n 中取定的一个单位正交标架，那么 $\mathscr{P}$ 中任意一个元素 $\{P;e_i\}$ 都可以唯一地表示成：

$$\overrightarrow{OP}=\sum_{i=1}^{n}a^i\delta_i,$$

$$e_i=\sum_{j=1}^{n}a_i^j\delta_j,$$

其中 (a_i^j) 是正交矩阵(参看(1.6)式). 因此集合 $\mathscr{P}$ 和 $\mathbf{R}^n\times \mathrm{O}(n)$ 能建立一一对应关系，其中 $\mathrm{O}(n)$ 表示实 n 阶正交矩阵的集合，它关于矩阵的乘法构成一个群.

集合 $\mathscr{P}$ 的重要性在于 $\mathscr{P}$ 的元素和 E^n 到自身的等距变换是一一对应的. 事实上，如果 $\sigma: E^n\to E^n$ 是等距变换，即对于任意两点 $P,Q\in E^n$ 有

$$d(\sigma(P),\sigma(Q))=d(P,Q),$$

则容易证明：σ 把直线变为直线，把平行直线变为平行直线，把互相垂直的直线变为互相垂直的直线，因而它把单位正交标架 $\{O;\delta_i\}$ 变为另一个单位正交标架 $\{P;e_i\}$，即 $\sigma(O)=P,\sigma(\delta_i)=e_i$. 我们把 σ 对应于单位正交标架 $\{P;e_i\}$. 此时，不难写出等距变换 σ 的坐标表示公式. 假定

$$\begin{cases}\overrightarrow{OP}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a^i\delta_i,\\ e_i=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_i^j\delta_j,\end{cases}\tag{1.12}$$

其中 (a_i^j) 是正交矩阵. 设 Q 是 E^n 中任意一点，它关于标架 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标设为 $\lambda^i,1\leqslant i\leqslant n$. 令 $Q'=\sigma(Q)$ 是点 Q 在等距变换 σ 下的象点. 那么 Q' 点关于标架 $\{P;e_i\}$ 的坐标与 Q 点关于标架 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标应该是相同的(见图1，这里设 $n=3$). 因此

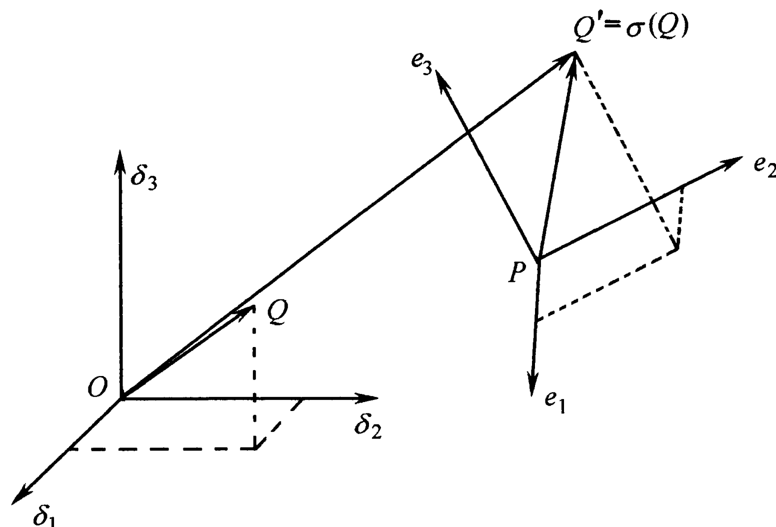


图 1

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ'} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ'} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a^i \delta_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda^i e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a^i + \sum_{j=1}^{n} \lambda^j a_j^i) \delta_i,\end{aligned}$$

所以象点 $Q' = \sigma(Q)$ 关于标架 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标是

$$\mu^i = a^i + \sum_{j=1}^{n} \lambda^j a_j^i. \tag{1.13}$$

反过来，若在 E^n 中任意给定一个标架 $\{P;e_i\}$，假定它由(1.12)式给出，则我们可以定义映射 $\sigma: E^n \to E^n$ 如下：设 $Q \in E^n$，它关于标架 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标是 λ^i，$1 \leqslant i \leqslant n$，规定象点 $Q' = \sigma(Q)$ 关于 $\{P;e_i\}$ 的坐标也是 λ^i，于是 Q' 关于 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标 μ^i 由(1.13)式给出. 很明显，σ 是一个等距变换，并且它把标架 $\{O;\delta_i\}$ 变为标架 $\{P;e_i\}$.

另一方面，集合 $\mathscr{P}$ 给出了空间 E^n 中的全体直角坐标系. 设单位正交标架 $\{P;e_i\}$ 由(1.12)式给出，用 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$ 表示点 Q 关于标架 $\{O;\delta_i\}$ 的坐标，用 $(\mu^1,\cdots,\mu^n)$ 表示点 Q 关于新标架 $\{P;e_i\}$ 的坐标(见图 2，设 $n=3$)，那么

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \delta_i &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a^i + \sum_{j=1}^{n} \mu^j a_j^i) \delta_i,\end{aligned}$$

所以当坐标系从 $\{O;\delta_i\}$ 变到 $\{P;e_i\}$ 时，点 Q 的坐标便从 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$ 变到 $(\mu^1,\cdots,\mu^n)$，它们之间的关系是

$$\lambda^i = a^i + \sum_{j=1}^{n} \mu^j a_j^i. \tag{1.14}$$

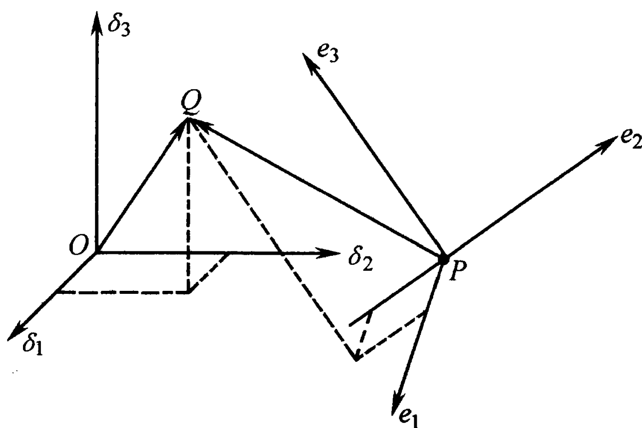


图 2

很明显,当$\{P;e_i\}$代表空间E^n到自身的等距变换σ时,点Q的象点Q'关于$\{P;e_i\}$的坐标等于点Q关于$\{O;\delta_i\}$的坐标$(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$. (1.13)式的意义是从点$Q$关于$\{O;\delta_i\}$的坐标$(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$计算出$Q$在上述等距变换$\sigma$下的象点$Q'$关于$\{O;\delta_i\}$的坐标$(\mu^1,\cdots,\mu^n)$. 所以(1.13)式也可以看成坐标变换公式,此时$(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$是点$Q'$关于标架$\{P;e_i\}$的坐标,而$(\mu^1,\cdots,\mu^n)$是它关于原标架$\{O;\delta_i\}$的坐标. 因此,(1.13)和(1.14)两式的相似性是毫不足怪的.

§2 光滑映射

设E^n是n维欧氏空间. 在E^n中取定一个单位正交标架$\{O;\delta_i\}$,于是E^n就等同于n元数组的空间$\mathbf{R}^n$,点$P \in E^n$对应于n元数组$(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$,使得

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \delta_i.$$

因此函数$f: E^n \to \mathbf{R}$对应于n元实函数$F: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,使得

$$F(\lambda^1,\cdots,\lambda^n) = f(\lambda^1\delta_1 + \cdots + \lambda^n\delta_n). \tag{2.1}$$

反过来,任意一个n元实函数$F(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$都可以借助于(2.1)式看作空间$E^n$上的实函数. 注意,在取定的直角坐标系$\{O;\delta_i\}$下,函数$f: E^n \to \mathbf{R}$与函数$F: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$是一一对应的. 在另一个直角坐标系$\{Q;e_i\}$下,函数$f$将对应于另一个$n$元实函数$F'$. 实际上,若设

$$\begin{cases} \overrightarrow{OQ} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a^i \delta_i, \\ e_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_j^i \delta_i, \end{cases} \tag{2.2}$$

则(1.14)式给出了点 P 的坐标 λ^i 与坐标 μ^j 之间的关系式

$$\lambda^i = a^i + \sum_{j=1}^{n} a^i_j \mu^j, \tag{2.3}$$

故

$$f(P) = F(\lambda^1, \cdots, \lambda^n) = F'(\mu^1, \cdots, \mu^n),$$

于是函数 F 和 F' 的关系是

$$F'(\mu^1, \cdots, \mu^n) = F(a^1 + \sum_j a^1_j \mu^j, \cdots, a^n + \sum_j a^n_j \mu^j). \tag{2.4}$$

因此,如果 F 是 $\lambda^1, \cdots, \lambda^n$ 的 r 次连续可微函数,则 F' 同样是 $\mu^1, \cdots, \mu^n$ 的 r 次连续可微函数.由此可见,用来代表函数 $f: E^n \to \mathbf{R}$ 的 n 元实函数 $F(\lambda^1, \cdots, \lambda^n)$ 的连续可微性与直角坐标系的选取无关.

定义 2.1　设 f 是 E^n 上的一个实函数.若在 E^n 的一个直角坐标系 $\{O; \delta_i\}$ 下所对应的 n 元实函数 $F(\lambda^1, \cdots, \lambda^n)$ 在一点 $(\lambda^1, \cdots, \lambda^n)$ 是连续的,则称 f 在相应的点 P 是连续的;若 $F(\lambda^1, \cdots, \lambda^n)$ 在点 $(\lambda^1, \cdots, \lambda^n)$ 有任意的 r 次连续的偏导数,则称 f 在相应的点是 r 次连续可微的.特别地,如果 $F(\lambda^1, \cdots, \lambda^n)$ 在点 $(\lambda^1, \cdots, \lambda^n)$ 某个邻域内有任意次连续的偏导数,则称 f 在点 P 是光滑的.在 E^n 上处处是 r 次连续可微的(光滑的)函数称为 E^n 上的 r **次连续可微(光滑)函数**.

E^n 上全体 r 次连续可微函数的集合记为 $C^r(E^n)$,全体光滑函数的集合记为 $C^\infty(E^n)$.

若 U 是 E^n 中的一个开子集,则同样可定义 U 上的光滑函数.我们把在一点 $P \in E^n$ 是光滑的函数的集合记作 C^∞_P.注意,在一点 P 处是光滑的函数必定在 P 的某个邻域内是光滑的函数.

由(2.4)式可知,上述定义是合理的,即函数 f 的连续可微性与直角坐标系 $\{O; \delta_i\}$ 的取法无关.这样,多元函数的微积分学就是在取定了直角坐标系的欧氏空间上的函数的微积分学.

同样道理,映射 $f: \mathbf{R} \to E^n$ 在 E^n 中取定直角坐标系 $\{O; \delta_i\}$ 之下表示成 n 个实函数 $x^1(t), \cdots, x^n(t)$,即

$$\overrightarrow{Of(t)} = \sum_{i=1}^{n} x^i(t) \delta_i, \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}. \tag{2.5}$$

定义 2.2　设 $f: \mathbf{R} \to E^n$ 是从 $\mathbf{R}$ 到 E^n 的一个映射.若在直角坐标系 $\{O; \delta_i\}$ 下,f 所对应的坐标函数 $x^i(t)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是连续的,则称 f 是连续的;若 $x^i(t)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 r 次连续可微的,则称 f 是 r 次连续可微的.特别地,如果 $x^i(t)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是任意次连续可微的,则称映射 f 是光滑的.

通常把光滑映射 $f: (a,b) \to E^n$ 称为 E^n 中的一条**光滑曲线**.下面我们讨论光滑曲线的切向量的概念,这对于在微分流形上建立切向量的概念有直接

的重要意义.

设 $f:(a,b)\to E^n$ 是一条光滑曲线，$t_0\in(a,b)$. 对充分小的增量 Δt，$f(t_0)$ 和 $f(t_0+\Delta t)$ 是该曲线上两个邻近点，并且当 $f(t_0+\Delta t)\neq f(t_0)$ 时，向量

$$\overrightarrow{f(t_0)f(t_0+\Delta t)}=\sum_{i=1}^{n}(x^i(t_0+\Delta t)-x^i(t_0))\delta_i$$

是一个非零向量，它所决定的经过点 $f(t_0)$ 的直线是曲线上经过两点 $f(t_0)$ 和 $f(t_0+\Delta t)$ 的割线. 令

$$\begin{aligned}f'(t_0)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{Of(t_0+\Delta t)}-\overrightarrow{Of(t_0)}}{\Delta t}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}(t_0)\delta_i,\end{aligned}\tag{2.6}$$

称为曲线 f 在点 t_0 处的**切向量**. 曲线的切向量的直观意义是清楚的. 当 $f'(t_0)\neq 0$ 时，经过点 $f(t_0)$、以 $f'(t_0)$ 为方向向量的直线称为曲线在 t_0 处的切线，它是经过点 $f(t_0)$ 和 $f(t_0+\Delta t)$ 的割线在 $\Delta t\to 0$ 时的极限(图 3).

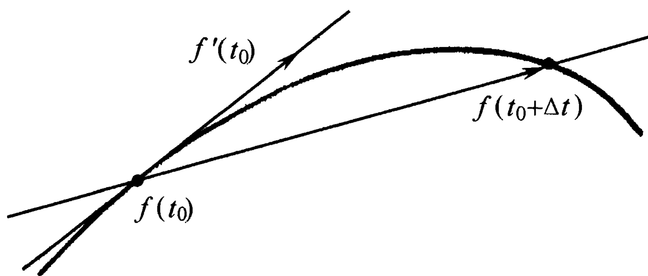


图 3

曲线 f 在点 t_0 处的切向量 $f'(t_0)$ 是欧氏空间 E^n 在点 $f(t_0)=P$ 处的一个向量. 反过来，在点 $P\in E^n$ 处的任意一个向量 $v\in V$ 都可以看作空间 E^n 中经过点 P 的一条光滑曲线在该处的切向量. 其实，我们只要取经过点 P、以 v 为方向向量的直线 $f(t)$，即

$$\overrightarrow{Of(t)}=\overrightarrow{OP}+t\cdot v,\quad t\in\mathbf{R},\tag{2.7}$$

则 $f(0)=P$，且 $f'(0)=v$. 由此可见经过点 P 的所有光滑曲线在点 P 的切向量组成的集合恰好与伴随向量空间 V 是一致的，不过现在的 V 是放在点 P 上的. 我们把点 P 处的切向量的集合称为欧氏空间 E^n 在点 P 的切空间，也就是放在点 P 处的伴随向量空间 V.

我们在此所叙述的曲线的切向量的概念，或者是欧氏空间 E^n 在点 P 的向量的概念都直接地依赖于欧氏空间 E^n 本身的线性结构，因而难以推广到我们将要研究的微分流形上去. 所以，我们需要给出切向量的另一种等价的定义，它不涉及空间的线性结构，从而在将来有可能把它推广到微分流形的情形.

设 $f:(a,b)\to E^n$ 是欧氏空间 E^n 中一条光滑曲线，$P=f(t_0)$，$t_0\in(a,b)$. 任取 $g\in C_P^\infty$，则 $g\circ f$ 是定义在点 t_0 的邻域内的光滑函数. 根据复合函数求导法则，我们有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}(g\circ f)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}g(x^1(t),\cdots,x^n(t))\\&=\sum_{i=1}^n\left.\frac{\partial g}{\partial x^i}\right|_{f(t_0)}\frac{\mathrm{d}x^i(t_0)}{\mathrm{d}t},\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中 $g(x^1,\cdots,x^n)$ 是 g 在给定的直角坐标系 $\{O;\delta_i\}$ 下对应的 n 元实函数. 令

$$\nabla g(f(t_0))=\sum_{i=1}^n\left.\frac{\partial g}{\partial x^i}\right|_{f(t_0)}\delta_i,\tag{2.9}$$

则 $\nabla g(f(t_0))$ 是在点 $f(t_0)$ 处的一个切向量，与单位正交标架 $\{O;\delta_i\}$ 的选取无关. 实际上，若设在另一个单位正交标架 $\{Q;e_i\}$（由(2.2)式给出）下，$g\in C_P^\infty$ 所对应的 n 元实函数为 $\widetilde{g}(y^1,\cdots,y^n)$，则由(2.4)式，我们有

$$\widetilde{g}(y^1,\cdots,y^n)=g(a^1+\sum_{j=1}^n a_j^1y^j,\cdots,a^n+\sum_{j=1}^n a_j^ny^j),$$

于是

$$\frac{\partial\widetilde{g}}{\partial y^j}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial g}{\partial x^i}a_j^i,$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n\frac{\partial\widetilde{g}}{\partial y^j}e_j&=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial g}{\partial x^i}a_j^ie_j\\&=\sum_{i,j,k=1}^n\frac{\partial g}{\partial x^i}a_j^ia_j^k\delta_k\\&=\sum_{k=1}^n\frac{\partial g}{\partial x^k}\cdot\delta_k,\end{aligned}$$

这里用到过渡矩阵 (a_j^i) 是正交矩阵的条件. 我们称 $\nabla g(f(t_0))$ 为光滑函数 g 在点 $f(t_0)$ 处的梯度向量. 这样，(2.8)可以写成

$$\left.\frac{\mathrm{d}(g\circ f)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=\langle\nabla g(f(t_0)),v\rangle,\tag{2.10}$$

其中 $v=\sum_{i=1}^n\frac{\mathrm{d}x^i(t_0)}{\mathrm{d}t}\delta_i$ 是曲线 f 在 $t=t_0$ 处的切向量.

值得注意的是，(2.10)式右端只是线性地依赖于曲线 f 的切向量 v，而摒弃了曲线 f 的其他信息. 表达式 $\langle\nabla g(f(t_0)),v\rangle$ 称为函数 $g\in C_P^\infty$ 在点 $P=f(t_0)$ 处沿向量 v 的**方向导数**，记作 D_vg. 于是，在点 P 处的任意一个切向量 v 决定了一个算子 $\mathrm{D}_v:C_P^\infty\to\mathbf{R}$，定义为

$$\mathrm{D}_v g = \langle \nabla g(P), v \rangle, \quad \forall\, g \in C_P^\infty, \tag{2.11}$$

它满足下列求导运算的法则：

(1) 若 $g, h \in C_P^\infty, \lambda \in \mathbf{R}$，则

$$\mathrm{D}_v(g + \lambda h) = \mathrm{D}_v g + \lambda \cdot \mathrm{D}_v h,$$

(2) 若 $g, h \in C_P^\infty$，则

$$\mathrm{D}_v(g \cdot h) = g(P) \cdot \mathrm{D}_v h + h(P) \cdot \mathrm{D}_v g.$$

反过来，若 $\sigma: C_P^\infty \to \mathbf{R}$ 是满足上述条件(1)，(2) 的映射，则必有在点 P 处的切向量 v，使得$\sigma = \mathrm{D}_v$，并且这样的 v 是唯一的. 要证明这个断言需要两个引理：

引理 2.1 若σ是满足上述条件(1)，(2) 的映射，则σ在常值函数上的作用是零.

证明 首先将映射σ作用在常值函数 1 上，由(2) 得到

$$\sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1) = 1 \cdot \sigma(1) + 1 \cdot \sigma(1) = 2\sigma(1),$$

故

$$\sigma(1) = 0.$$

对于任意的常值函数 $\lambda \in \mathbf{R}$，由(1) 得到

$$\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda \cdot 1) = \lambda\sigma(1) = 0.$$

引理 2.2 在 n 维欧氏空间 E^n 中取定直角坐标系$\{O;\delta_i\}$. 设 $g \in C_P^\infty$，且点 P 的坐标为$(x_0^1, \cdots, x_0^n)$，则 g 可以表示为

$$g(x^1, \cdots, x^n) = g(x_0^1, \cdots, x_0^n) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) h_i(x^1, \cdots, x^n), \tag{2.12}$$

其中 $h_i \in C_P^\infty$，并且

$$h_i(x_0^1, \cdots, x_0^n) = \frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0^1, \cdots, x_0^n). \tag{2.13}$$

证明 设 g 的定义域是点 P 的一个邻域 U. 不妨设 U 是以 P 为中心、以 ε 为半径的球形邻域 $B_\varepsilon(P)$. 任取$(x^1, \cdots, x^n) \in U$，则当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时，线段

$$(x_0^1, \cdots, x_0^n) + t \cdot (x^1 - x_0^1, \cdots, x^n - x_0^n)$$

落在 U 内，故

$$\begin{aligned}
& g(x^1, \cdots, x^n) - g(x_0^1, \cdots, x_0^n) \\
={}& \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \cdots, x_0^n + t(x^n - x_0^n)) \mathrm{d}t \\
={}& \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0 + t(x - x_0)) \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

令

$$h_i(x^1, \cdots, x^n) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \cdots, x_0^n + t(x^n - x_0^n)) \mathrm{d}t, \tag{2.14}$$

则有(2.12)式，并且(2.13)式成立.很明显，$h_i \in C_P^\infty$.

现在可以证明前面的断言.注意到坐标函数x^i是点P的一个邻域内的光滑函数，设映射σ作用在$x^i \in C_P^\infty$上的值为$v^i = \sigma(x^i)$，构造在点P的切向量

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \delta_i = \sum_{i=1}^n \sigma(x^i)\delta_i. \tag{2.15}$$

任取$g \in C_p^\infty$，根据引理2.2，引理2.1以及映射σ所满足的条件(1)，(2)，我们有

$$\begin{aligned}\sigma(g) &= \sum_{i=1}^n \sigma(x^i - x_0^i) h_i(x_0^1, \cdots, x_0^n) \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma(x^i) \cdot \frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0^1, \cdots, x_0^n) \\ &= \langle \nabla g(x_0^1, \cdots, x_0^n), v \rangle \\ &= \mathrm{D}_v g.\end{aligned}$$

这样的切向量v是唯一的.实际上，若有$\tilde{v} = \sum_{i=1}^n \tilde{v}^i \delta_i$满足条件$\sigma = \mathrm{D}_{\tilde{v}}$，则将它们作用在坐标函数$x^i$上，得到

$$\begin{aligned}\sigma(x^i) &= \mathrm{D}_{\tilde{v}} x^i = \langle \nabla x^i, \tilde{v} \rangle \\ &= \langle \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x^j}\delta_j, \sum_{k=1}^n \tilde{v}^k \delta_k \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \delta_j^i \tilde{v}^j = \tilde{v}^i,\end{aligned}$$

故$\tilde{v} = v$.

由此可见，在点P处的每一个切向量v等同于满足条件(1)，(2)的映射$\mathrm{D}_v : C_P^\infty \to \mathbf{R}$.要紧的是后者不涉及欧氏空间的线性结构，有可能作超越欧氏空间的推广.

欧氏空间上的实函数和欧氏空间中的曲线是欧氏空间之间的映射的两个特殊情形.一般地，我们可以考虑从m维欧氏空间E^m到n维欧氏空间E^n中的映射$f: E^m \to E^n$.分别在E^m，E^n中取定直角坐标系$\{O;\delta_i, 1 \leqslant i \leqslant m\}$和$\{P; e_\alpha, 1 \leqslant \alpha \leqslant n\}$，它们的点的坐标分别记为$x^i$和$y^\alpha$，那么映射$f$就表示为$m$个变量$x^1, \cdots, x^m$的$n$个函数

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \cdots, x^m), \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant n. \tag{2.16}$$

定义 2.3 设有映射$f: E^m \to E^n$.如果在空间E^m，E^n中分别取定直角坐标系后，表示映射f的n个m元实函数是r次连续可微的，则称f是r次连续可微的.任意次连续可微的映射$f: E^m \to E^n$称为从欧氏空间E^m到E^n的**光滑映射**.

映射 f 的连续可微性与直角坐标系的选取无关.另外,如果 U 是 E^m 的一个开子集,则同样可定义映射 $f: U \to E^n$ 的 r 次连续可微性.

光滑映射 $f: E^m \to E^n$ 的一个重要的不变量是它在各点的秩.设 $A \in E^m$,对应的坐标是 $(x_0^1, \cdots, x_0^m)$,则映射 f 在点 A 的**秩**定义为表示映射 f 的 n 个 m 元光滑函数 $f^\alpha(x^1, \cdots, x^m)$ 的 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

在点 $(x_0^1, \cdots, x_0^m)$ 的秩.很明显,上述 Jacobi 矩阵的秩在 E^m, E^n 的直角坐标变换下是不变的.

实际上,矩阵 J 有明确的几何意义.在 E^m 和 E^n 中分别取定直角坐标系 $\{O;\delta_i\}$ 和 $\{P;e_\alpha\}$.设 $A \in E^m, Q = f(A) \in E^n$.任取 E^m 在点 A 的一个向量 $v = \sum_{i=1}^m v^i\delta_i$,它是经过点 A 的一条光滑曲线 $\gamma(t)$ 的切向量,即 $\gamma(0) = A, \gamma'(0) = v$,那么 $\tilde{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t)$ 是空间 E^n 中经过点 Q 的一条光滑曲线.记 $\tilde{v} = \tilde{\gamma}'(0)$ 为曲线在点 Q 处的切向量.注意到曲线 $\tilde{\gamma}(t)$ 的参数方程是

$$y^\alpha(t) = f^\alpha(x^1(t), \cdots, x^m(t)),$$

所以

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\mathrm{d}y^\alpha(0)}{\mathrm{d}t} e_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^m \left.\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\right|_{(x_0^j)} \frac{\mathrm{d}x^i(0)}{\mathrm{d}t} e_\alpha, \end{aligned}$$

即

$$\tilde{v}^\alpha = \sum_{i=1}^m v^i \left.\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\right|_{(x_0^1, \cdots, x_0^m)}. \tag{2.18}$$

由此可见,映射 f 诱导出从 E^m 在点 A 的切空间到 E^n 在点 $Q = f(A)$ 的切空间的线性变换,Jacobi 矩阵 J 恰好是这个线性变换在相应的基底下的矩阵.映射 f 所诱导的切空间之间的线性映射称为 f 的切映射,记作 f_*.于是,$f_* v = \tilde{v}$,即

$$f_*\gamma'(0) = \tilde{\gamma}'(0) = (f \circ \gamma)'(0).$$

考虑 E^m 中的第 i 条坐标曲线 $\gamma_i(t)$:

$$\begin{cases} x^i = x_0^i + t, \\ x^j = x_0^j,\ j \neq i, \end{cases}$$

它在点 $A(x_0^1, \cdots, x_0^m)$ 的切向量恰好是 δ_i.该曲线在 f 下的象 $\tilde{\gamma}_i(t)$ 的参数方程

为

$$y^\alpha = f^\alpha(x_0^1, \cdots, x_0^{i-1}, x_0^i + t, x_0^{i+1}, \cdots, x_0^m), \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant n,$$

故它的切向量是

$$f_* \delta_i = \sum_{\alpha=1}^n \left. \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \right|_{(x_0^1, \cdots, x_0^m)} e_\alpha. \tag{2.19}$$

因此，如果把矩阵 J 的每一个列看作一个向量，它恰好是 E^n 在点 A 的切向量 δ_i 在切映射 f_* 下的象 $f_* \delta_i$. 于是映射 f 在点 A 的秩就是 E^n 在点 $Q = f(A)$ 的切向量 $f_* \delta_1, \cdots, f_* \delta_m$ 的极大线性无关组中成员的个数.

如果 $m < n$，并且映射 $f: U(\subset E^m) \to E^n$ 在 U 内各点的秩都是 m，则我们所得到的是 E^n 中的一个 m 维正则曲面. 这是 E^3 中 2 维正则参数曲面的推广.

§3　曲纹坐标

在欧氏空间中建立直角坐标系之后，空间中的点和有序的实数组之间有一一对应关系，从而空间中的几何图形可以用方程来描述. 若取另一个直角坐标系，则空间中的点和有序的实数组之间有另一种一一对应关系. 这样，对应于同一点的两个实数组之间存在一定的变换关系（参看(1.14)式），它们是一次多项式的关系. 然而就坐标系的功用而言，重要的是藉以建立空间中的点与有序数组之间的对应，至于新、旧坐标之间的变换公式是一次多项式并不是本质的要求. 这就是说，在欧氏空间中除了建立直角坐标系那样的平直的坐标系（即坐标曲线和坐标面分别是直线和超平面）之外，还可以使用所谓的曲纹坐标系. 而且，在某些特定的场合，使用曲纹坐标系能使所讨论的问题得到简化，因而更为方便.

在学习曲面论的时候，我们已经接触过曲纹坐标系的概念. 设 D 是 E^2 中的一个开区域，(u,v) 表示 E^2 中点的直角坐标，设 $r: D \to E^3$ 是一张正则曲面. 若用 (x,y,z) 记 E^3 中点的直角坐标，则曲面 r 可以用参数方程来表示：

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v). \end{cases}$$

固定 $v = v_0$，让 u 变化，则得到在曲面 $r(D)$ 上的一条曲线，称为 u- 曲线. 同理，固定 $u = u_0$，让 v 变化，则得曲面 $r(D)$ 上的 v- 曲线. 很明显，u- 曲线和 v- 曲线的切向量分别是

$$r_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right),$$

$$r_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

曲面的正则性意味着 $r(u,v)$ 是三次以上连续可微函数，并且 $r_u \times r_v \neq 0$，即 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

的秩处处为 2.

不妨设在点 $(u_0,v_0) \in D$，该 Jacobi 矩阵的子行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

于是在 (u_0,v_0) 的一个邻域 $U \subset D$ 内有反函数

$$\begin{cases} u = p(x,y), \\ v = q(x,y), \end{cases} \quad (x,y) \in V,$$

其中 V 是 xy 平面中的一个开区域，使得在 U 上成立

$$\begin{cases} p(x(u,v),y(u,v)) \equiv u, \\ q(x(u,v),y(u,v)) \equiv v. \end{cases}$$

此时，

$$z = z(p(x,y),q(x,y)) \equiv F(x,y),$$

从而所考虑的曲面成为函数 F 在区域 $V \subset E^2$ 上的图象. 将参数曲面限制在区域 U 上时，经过曲面上的每一点 P 有唯一的一条 u- 曲线 $v = v_1$，和唯一的一条 v- 曲线 $u = u_1$. 这就是说，曲面上的点 P 与一对实数 $(u_1,v_1) \in U$ 彼此对应，因此可以把 (u_1,v_1) 看作该点的坐标. 在 E^3 中看，一般说来 u- 曲线和 v- 曲线不再是直线，我们称 (u,v) 为曲面上的点 $r(u,v)$ 的曲纹坐标.

定义 3.1 设 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中的直角坐标系. 设有开集 $U \subset E^n$，假定在 U 中点的直角坐标记为 $(u^1,\cdots,u^n)$. 如果存在同胚映射 $f: U \to V \subset E^n$，表示为

$$x^i = f^i(u^1,\cdots,u^n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{3.1}$$

其逆映射 $f^{-1}: V \to U$ 表示为

$$u^i = g^i(x^1,\cdots,x^n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{3.2}$$

并且 $f^i(u^1,\cdots,u^n)$ 和 $g^i(x^1,\cdots,x^n)$ 都是光滑函数，则称 $(u^1,\cdots,u^n)$ 为区域 $V \subset E^n$ 上的**曲纹坐标系**. 此时，区域 U 和区域 V 通过光滑同胚 f 等同起来，点 $P \in V$ 的曲纹坐标 $(u^1,\cdots,u^n)$ 就是其原象 $f^{-1}(P)$ 在区域 U 上的直角坐标.

一般说来，区域 V 中的坐标面，例如第 i 个坐标面 $u^i = \text{const}.$ 不再是超平面；坐标曲线，例如 u^i- 曲线，不再是直线. 这就是称 $(u^1, \cdots, u^n)$ 为区域 V 上的曲纹坐标的原因.

下面我们来讨论映射 $f: U(\subset E^n) \to E^n$ 何时给出某个区域内的曲纹坐标系. 在多元函数微积分学中有下面的隐函数定理：

定理 3.1 假定

1) $(m+n)$ 个变元的 n 个函数 $F_1, \cdots, F_n$ 在以 $(x_0^1, \cdots, x_0^m, y_0^1, \cdots, y_0^n)$ 为中心的 $(m+n)$ 维长方体

$$D = \prod_{i=1}^{m} [x_0^i - \Delta_i, x_0^i + \Delta_i] \times \prod_{j=1}^{n} [y_0^j - \Delta'_j, y_0^j + \Delta'_j]$$

内有定义，并且连续；

2) 这些函数关于各个变元的偏导数在 D 内都存在且连续；

3) 点 $(x_0^1, \cdots, x_0^m, y_0^1, \cdots, y_0^n)$ 满足方程组

$$F_\alpha(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n) = 0, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant n; \tag{3.3}$$

4) Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(F_1, \cdots, F_n)}{\partial(y^1, \cdots, y^n)}$ 在这一点不为零.

那么 $a)$ 在点 $(x_0^1, \cdots, x_0^m, y_0^1, \cdots, y_0^n)$ 的某个邻域内方程组(3.3) 确定 $y^1, \cdots, y^n$ 为 $x^1, \cdots, x^m$ 的单值函数

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \cdots, x^m), \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant n, \tag{3.4}$$

即上述函数组使(3.3) 式成为恒等式：

$$F_\alpha(x^1, \cdots, x^m, f^1(x^1, \cdots, x^m), \cdots, f^n(x^1, \cdots, x^m)) \equiv 0;$$

$b)$ 函数 $f^\alpha(x^1, \cdots, x^m), 1 \leqslant \alpha \leqslant n$, 是连续的；

$c)$ 函数 $f^\alpha(x^1, \cdots, x^m)$ 关于各个变元的偏导数都存在且连续.

特别地，如果函数 F_α 的各次偏导数在 D 内都存在且连续，则函数 f^α 的各次偏导数都存在且连续.

定理 3.1 的证明可以在微积分学教程中找到. 利用它可以证明如下的光滑同胚定理：

定理 3.2 设 D 是 E^n 中的一个开区域，$f: D \to E^n$ 是光滑映射. 若映射 f 在点 $P \in D$ 的秩为 n，则存在点 P 的邻域 $U \subset D$，以及点 $f(P)$ 的邻域 $V \subset E^n$，使得 $f|_U: U \to V$ 是光滑同胚.

证明 设 D 中的直角坐标系记为 $(u^1, \cdots, u^n)$，E^n 中的直角坐标系记为 $(x^1, \cdots, x^n)$，点 $P \in D$ 的坐标为 $(u_0^1, \cdots, u_0^n)$，象点 $Q = f(P)$ 的坐标为 $(x_0^1, \cdots, x_0^n)$，则映射 f 能表示为

$$x^i = f^i(u^1, \cdots, u^n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{3.5}$$

考虑方程组

$$F_i \equiv f^i(u^1, \cdots, u^n) - x^i = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{3.6}$$

则 F_i 是$(x^1, \cdots, x^n, u^1, \cdots, u^n)$ 的光滑函数. 由假设,点$(x_0^1, \cdots, x_0^n, u_0^1, \cdots, u_0^n)$ 满足方程组(3.6),且由映射 f 在点 P 的秩为 n 得知 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(F_1, \cdots, F_n)}{\partial(u^1, \cdots, u^n)} = \frac{\partial(f^1, \cdots, f^n)}{\partial(u^1, \cdots, u^n)}$$

在该点不为零. 根据定理 3.1,存在点$(x_0^1, \cdots, x_0^n, u_0^1, , \cdots, u_0^n)$ 的邻域 $V \times U$,使得在该邻域内方程组(3.6) 确定 $u^1, \cdots, u^n$ 为 $x^1, \cdots, x^n$ 的单值函数:

$$u^i = u^i(x^1, \cdots, x^n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{3.7}$$

即有恒等式

$$f^i(u^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, u^n(x^1, \cdots, x^n)) \equiv x^i, \quad \forall\ (x^1, \cdots, x^n) \in V.$$

这说明(3.7) 式给出了映射 $f|_U$ 的逆映射 $f^{-1}: V \to U$. 由定理 3.1 可知 f^{-1} 也是光滑映射,所以 $f: U \to V$ 是光滑同胚.

由此可见,若要光滑映射 $f: D(\subset E^n) \to E^n$ 给出点 $f(P)(P \in D)$ 的一个邻域内的曲纹坐标系,只要映射 f 在点 P 的秩为 n 就行了.

例 1　平面 E^2 内的极坐标系.

设(x, y) 是平面 E^2 内的直角坐标系,令

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \tag{3.8}$$

其中 $0 < r < +\infty$, $-\pi < \theta < \pi$,则(r, θ) 是平面 E^2 中除去负 x 轴的区域内的曲 纹坐标系. r- 曲线是从原点 O 出发的射线,θ- 曲线是以 O 为中心的圆弧(图 4).

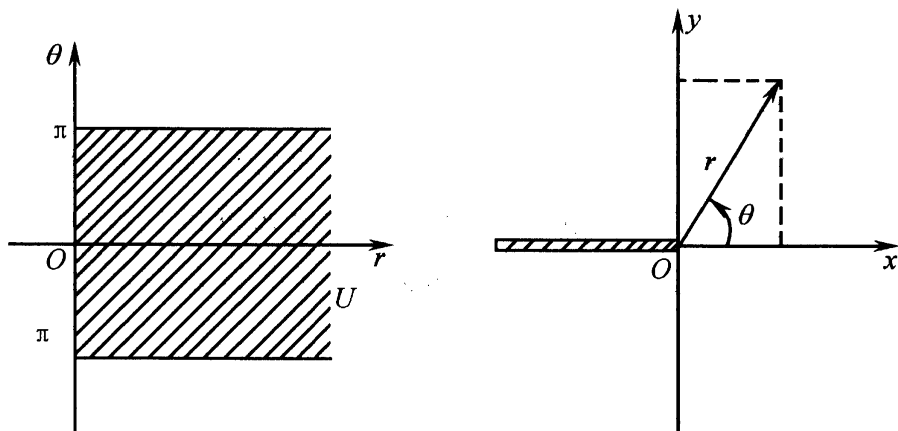


图　4

例 2　E^3 中的球坐标系.

设(x, y, z) 是 E^3 中的直角坐标系,令

$$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\theta, \\ y = r\cos\psi\sin\theta, \\ z = r\sin\psi, \end{cases} \tag{3.9}$$

其中 $0 < r < +\infty$, $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$, $-\pi < \theta < \pi$,则(r,ψ,θ) 给出 E^3 中去掉含有负 x 轴的半个 xz 平面所得的区域内的曲纹坐标系,称为球坐标系.

常用的还有柱坐标系,坐标变换为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = t. \end{cases} \tag{3.10}$$

其中 $0 < r < +\infty$, $-\pi < \theta < \pi$, $-\infty < t < +\infty$.

假定在 E^n 中取定单位正交标架$\{O;\delta_i\}$,相应的直角坐标系记为$(x^1,\cdots,x^n)$. 设开集$U(\subset E^n)$内的点的直角坐标记为$(u^1,\cdots,u^n)$. 如果$r: U \to V \subset E^n$是光滑同胚,即它在区域 V 上给出曲纹坐标系$(u^1,\cdots,u^n)$,坐标变换为

$$x^i = f^i(u^1,\cdots,u^n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{3.11}$$

则 u^i- 曲线(即让 u^i 变动,而让其余的 $u^j (j \neq i)$ 固定不动所得的曲线)的切向量是

$$r_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^j}{\partial u^i}\delta_j. \tag{3.12}$$

在任意一点 $Q = r(P) \in V$ 处切向量 $r_1,\cdots,r_n$ 是线性无关的,因而$\{Q;r_i\}$是 E^n 在点 Q 的一个标架,称为由曲纹坐标系$(u^1,\cdots,u^n)$所诱导的**自然标架**.

一般说来,自然标架不再是单位正交标架,而且在 V 内两个点处的自然标架未必能在 E^n 的一个平行移动下彼此合同. 因此,自然标架构成分布在区域 V 上的一个标架"场".

用曲纹坐标系诱导的自然标架场取代直角坐标系所给出的平行的单位正交标架场有助于我们从更一般的空间类型的角度观察欧氏空间.

由于自然标架场未必是单位正交标架场,其度量系数便起着更重要的作用. 设

$$g_{ij} = \langle r_i, r_j \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^k}{\partial u^i}\frac{\partial f^k}{\partial u^j}. \tag{3.13}$$

显然,g_{ij} 是区域 V 上的光滑函数,并且在每一点 $Q \in V$,$(g_{ij}(Q))$ 是正定的对称矩阵. 设 v,w 是定义在区域 V 上的两个向量场,用自然标架表示为

$$v = \sum_{i=1}^n v^i r_i, \quad w = \sum_{i=1}^n w^i r_i, \tag{3.14}$$

其中 v^i,w^i 分别是 V 上的函数,那么 v 和 w 的内积可以表成

$$\langle v,w\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} v^i w^j \langle r_i, r_j\rangle$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v^i w^j. \tag{3.15}$$

这是坐标 v^i, w^i 的双线性型，其系数 g_{ij} 恰好是自然标架的度量系数.

因为在不同点的自然标架不是互相平行的，计算它从一点过渡到任意的邻近点的变差是很要紧的，特别是要计算自然标架场沿坐标曲线的微商. 注意到切向量 r_i 是 $u^1,\cdots,u^n$ 的函数，它关于 u^l 的导数仍是区域 V 上的向量场，故可设

$$\frac{\partial r_i}{\partial u^l} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{il}^k r_k. \tag{3.16}$$

由(3.13)式得到

$$\langle \frac{\partial r_i}{\partial u^l}, r_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{il}^k g_{kj}.$$

因为

$$\frac{\partial r_i}{\partial u^l} = \frac{\partial r_l}{\partial u^i} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^l} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f^k}{\partial u^i \partial u^l}\delta_k,$$

所以

$$\Gamma_{li}^k = \Gamma_{il}^k.$$

对(3.13)式求导，得到

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2 f^k}{\partial u^i \partial u^l}\frac{\partial f^k}{\partial u^j} + \frac{\partial f^k}{\partial u^i}\frac{\partial^2 f^k}{\partial u^j \partial u^l}\right\}$$
$$= \langle \frac{\partial r_i}{\partial u^l}, r_j\rangle + \langle r_i, \frac{\partial r_j}{\partial u^l}\rangle$$
$$= \Gamma_{il}^k g_{kj} + \Gamma_{jl}^k g_{ki},$$

于是

$$\Gamma_{il}^k = \frac{1}{2} g^{kj}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}\right), \tag{3.17}$$

其中 (g^{kj}) 是 (g_{kj}) 的逆矩阵. 由此可见，Γ_{il}^k 恰好是度量系数 g_{ij} 的Christoffel **记号**. 这里的推导过程和曲面论中相应的推导是完全一样的.

假定 v 是定义在区域 V 上的向量场，它用自然标架场表示为

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i r_i, \tag{3.18}$$

并且 v^i 是 V 上的光滑函数. 现在，向量场 v 沿坐标曲线变化不仅表现为分量 v^i 的改变量，而且还要顾及自然标架场沿坐标曲线的变化，故有

$$\frac{\partial v}{\partial u^l} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial v^i}{\partial u^l} r_i + v^i \frac{\partial r_i}{\partial u^l}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial v^i}{\partial u^l} + \sum_{k=1}^{n} v^k \Gamma^i_{kl} \right\} r_i, \tag{3.19}$$

这就是说向量场$\frac{\partial v}{\partial u^l}$在自然标架下的分量是$\frac{\partial v^i}{\partial u^l} + \sum_{k=1}^{n} v^k \Gamma^i_{kl}$. 在黎曼几何学中，这正好是向量场 v 的分量 v^i 的协变微商的公式. 引进曲纹坐标系之后，在欧氏空间中关于一些量的计算的一般规律显现出来了，剥掉了采用直角坐标系带来的特殊性.

曲纹坐标系还可以用另一种方式给出. 在 E^n 中取定单位正交标架$\{O; \delta_i\}$，对应的直角坐标系是$(x^1,\cdots,x^n)$. 设 V 是 E^n 中的一个开集. 设 $g: V \to \mathbf{R}$ 是定义在 V 上的光滑实函数. 任取一点 $P(x_0^1,\cdots,x_0^n) \in V$，令 $c = g(x_0^1,\cdots,x_0^n)$，则函数 g 的水平集

$$S = \{(x^1,\cdots,x^n) \in V : g(x^1,\cdots,x^n) = c\}$$

是 V 的非空子集. 若有 V 中经过点 P 的一条曲线 γ：

$$x^i = x^i(t), \ -\varepsilon < t < \varepsilon$$

落在水平集 S 上，并且 $x^i(0) = x_0^i, 1 \leqslant i \leqslant n$，则有恒等式

$$g(x^1(t),\cdots,x^n(t)) = c.$$

将上式两边在 $t = 0$ 处对 t 求导，则得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x^i}\bigg|_{(x_0^1,\cdots,x_0^n)} \frac{\mathrm{d}x^i(0)}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{3.20}$$

根据定义(参看(2.9)式)，函数 g 在点 P 的梯度向量是

$$\nabla g(x_0^1,\cdots,x_0^n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x^i}\bigg|_{(x_0^1,\cdots,x_0^n)} \delta_i,$$

而曲线 γ 在 $t = 0$ 处的切向量是

$$\gamma'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x^i(0)}{\mathrm{d}t} \delta_i,$$

故(3.20)式可以写成

$$\langle \nabla g(P), \gamma'(0) \rangle = 0.$$

因此梯度向量 $\nabla g(P)$ 与落在 g 的水平集 S 内经过点 P 的任意一条曲线是正交的. 利用定理3.1得到，当 $\nabla g(P) \neq 0$ 时，水平集 S 在点 P 附近是一张光滑的超曲面，而且 $\nabla g(P)$ 是该超曲面在点 P 的法向量.

如果在开集 V 上给定 n 个光滑函数 $g_i(x^1,\cdots,x^n), 1 \leqslant i \leqslant n$，并且假定 n 个梯度向量 ∇g_i 在 V 内是处处线性无关的，即 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(g_1,\cdots,g_n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}$$

在 V 内处处不等于零. 令

$$u^i = g_i(x^1,\cdots,x^n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

则由定理 3.2，它们在 V 的任意一点邻域上给出光滑同胚，即$(u^1,\cdots,u^n)$ 给出该邻域内的曲纹坐标. 对此曲纹坐标系，第 i 个坐标面恰好是函数 $g_i(x^1,\cdots,x^n)$ 的水平集.

§4 张　　量

张量的概念是G. Ricci在19世纪末提出来的. G. Ricci研究张量的目的是为几何性质和物理规律的表达寻求一种在坐标变换下保持不变的形式. 他所考虑的张量是如同向量的分量那样的一个数组，要求它们在坐标变换下服从某 种线性变换的规律. 近代的理论已经把张量叙述成向量空间 V 及其对偶空间 V^* 上的多重线性函数. 但是用分量表示张量仍有它的重要性，尤其是涉及张量的计算时更是如此.

在本节，我们先从若干最简单的例子出发，比较这些对象的分量在坐标变换下的变换规律，以便理解"反变"、"协变"等术语的含义，然后给出张量的定义，并且研究张量的运算法则.

例 1　n 维向量空间 V.

在向量空间V中取定一个基底$\{\delta_i\}$，则每一个向量$v\in V$可以唯一地表示为

$$v=\sum_{i=1}^{n}v^i\delta_i, \tag{4.1}$$

于是向量 v 对应于一组数$(v^1,\cdots,v^n)$. 但是向量 v 和数组$(v^1,\cdots,v^n)$ 的对应取决于基底$\{\delta_i\}$. 若取另一个基底$\{e_i\}$，则 v 对应于另一组数$(\tilde{v}^1,\cdots,\tilde{v}^n)$，使得

$$v=\sum_{i=1}^{n}\tilde{v}^ie_i. \tag{4.2}$$

假定基底$\{\delta_i\}$ 和$\{e_i\}$ 之间有如下关系：

$$e_j=\sum_{i=1}^{n}a_j^i\delta_i, \tag{4.3}$$

则数组(v^i) 和$(\tilde{v}^j)$ 之间的关系是

$$v^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^i\tilde{v}^j, \tag{4.4}$$

或者

$$\tilde{v}^j=\sum_{i=1}^{n}b_i^jv^i, \tag{4.5}$$

其中(b_i^j) 是(a_j^i) 的逆矩阵.

上面的(4.3)，(4.4) 和(4.5) 都是线性变换. 为了进行比较，不管变换的对象是数组还是向量组，一律把它们写成列向量的形式，则(4.3) 式成为

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

将上式的系数矩阵记成 A,即

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

同样(4.4)式可写成

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \vdots \\ \tilde{v}^n \end{pmatrix} = A^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \vdots \\ \tilde{v}^n \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \vdots \\ \tilde{v}^n \end{pmatrix} = (A^{\mathrm{T}})^{-1} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

这就是说,假如“新”基底$\{e_i\}$用“旧”基底$\{\delta_i\}$线性表示时其系数矩阵记为 A,则向量 v 的“新”分量$(\tilde{v}^i)$用“旧”分量(v^i)线性表示的系数矩阵为$(A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

例 2　向量空间 V 的对偶空间 V^*.

若映射 $\alpha: V \to \mathbf{R}$ 满足条件:

$$\begin{cases} \alpha(v_1 + v_2) = \alpha(v_1) + \alpha(v_2), & \forall\, v_1, v_2 \in V; \\ \alpha(\lambda v) = \lambda\alpha(v), & \forall\, v \in V, \lambda \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

则称 α 是 V 上的线性函数. 向量空间 V 上的全体线性函数的集合记作 V^*. 函数的加法和数乘法在集合 V^* 中是封闭的,从而使 V^* 成为向量空间,称为 V 的**对偶空间**. 函数 $\alpha: V \to \mathbf{R}$ 是由它在基底向量 δ_i 上的值唯一确定的. 设

$$\alpha_i = \alpha(\delta_i), \tag{4.8}$$

则对任意的 $v = \sum_{i=1}^{n} v^i \delta_i \in V$ 有

$$\alpha(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v^i. \tag{4.9}$$

考虑线性函数 $\delta^j: V \to \mathbf{R}$ 使得

$$\delta^j(\delta_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{4.10}$$

则

$$\delta^j(v) = v^j. \tag{4.11}$$

所以函数 δ^j 就是取向量关于基底的$\{\delta_i\}$的第 j 个分量,即它是关于基底$\{\delta_i\}$的

第 j 个坐标函数.

$\{\delta^i\}$ 构成对偶空间 V^* 的一个基底. 事实上若 $\alpha\in V^*$, 则由(4.9), (4.11)两式得到

$$\alpha(v)=\sum_{i=1}^n\alpha_i v^i=\sum_{i=1}^n\alpha_i\delta^i(v)=\Big(\sum_{i=1}^n\alpha_i\delta^i\Big)(v),\quad \forall\, v\in V,$$

故

$$\alpha=\sum_{i=1}^n\alpha_i\delta^i=\sum_{i=1}^n\alpha(\delta_i)\delta^i. \tag{4.12}$$

易见, 上述表达式是唯一的. 我们称 $\{\delta^i\}$ 为对偶空间 V^* 中与 $\{\delta_i\}$ **对偶的基底**. (4.12) 式说明, 函数 α 关于对偶基底 $\{\delta^i\}$ 的分量 α_i 恰好是 α 在基底向量 δ_i 上的值.

下面我们来考察对偶基底 $\{\delta^i\}$ 及 $\alpha\in V^*$ 的分量 (α_i) 在空间 V 的基底 $\{\delta_i\}$ 变换时的变换规律. 设 $\{e_i\}$ 是空间 V 的另一个基底, 由(4.3) 式给出, 其对偶基底记为 $\{e^i\}$, 故

$$e^i(e_j)=\delta^i_j=\begin{cases}1, & j=i,\\ 0, & j\neq i.\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}\delta^i(e_j)&=\delta^i\Big(\sum_{k=1}^n a^k_j\delta_k\Big)\\ &=a^i_j=\sum_{k=1}^n a^i_k e^k(e_j),\end{aligned}$$

即

$$\delta^i=\sum_{k=1}^n a^i_k e^k. \tag{4.13}$$

上式与(4.4) 式一致.

若设 α 关于基底 $\{e^i\}$ 的分量记作 $\tilde{\alpha}_i$, 则

$$\tilde{\alpha}_i=\alpha(e_i)=\sum_{j=1}^n a^j_i\alpha_j, \tag{4.14}$$

它与(4.3) 式一致.

用矩阵表示, (4.13), (4.14) 两式分别成为

$$\begin{pmatrix}e^1\\ \vdots\\ e^n\end{pmatrix}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}\begin{pmatrix}\delta^1\\ \vdots\\ \delta^n\end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_1\\ \vdots\\ \tilde{\alpha}_n\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

注意到向量空间 V 与其对偶空间 V^* 的关系是相互的，即向量 $v \in V$ 也可以看作空间 V^* 上的线性函数：

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(v) = \alpha_1(v) + \alpha_2(v), \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in V^*,$$
$$(\lambda\alpha)(v) = \lambda \cdot \alpha(v), \quad \forall\, \alpha \in V^*, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

此时，V 可以看作 V^* 的对偶空间，$V = (V^*)^*$，而 $\{\delta_i\}$ 是 $\{\delta^i\}$ 的对偶基底. 因此，在比较线性变换规律时总是选定一个向量空间 V 作为基准，而其余的对象作为 V 的衍生物遵从一定的坐标变换规律：V 上的线性函数 α 的分量的变换规律与 V 的基底变换规律是一致的，向量 $v \in V$ 的分量的变换矩阵是 V 的基底变换矩阵的转置逆矩阵. 我们称线性函数 α 的分量遵从协变变换规律，向量 v 的分量遵从反变变换规律.

线性函数的概念还可以作适当的推广.

定义 4.1　设 $V_1, \cdots, V_r$ 是 r 个向量空间. 若 r 元函数 $f: V_1 \times \cdots \times V_r \to \mathbf{R}$ 对于每一个自变量都是线性的，即对于任意的指标 α，$1 \leqslant \alpha \leqslant r$，及向量 u_α，$w_\alpha \in V_\alpha$，有

$$f(\cdots, u_\alpha + w_\alpha, \cdots) = f(\cdots, u_\alpha, \cdots) + f(\cdots, w_\alpha, \cdots),$$
$$f(\cdots, \lambda u_\alpha, \cdots) = \lambda \cdot f(\cdots, u_\alpha, \cdots),$$

其中 $\lambda \in \mathbf{R}$，则称 f 是 $V_1 \times \cdots \times V_r$ 上的 r **重线性函数**.

$V_1 \times \cdots \times V_r$ 上的 r 重线性函数的集合记为 $\mathscr{L}(V_1, \cdots, V_r; \mathbf{R})$. 特别地，$\mathscr{L}(V; \mathbf{R}) = V^*$.

例 3　向量空间 V 到自身的线性变换.

设映射 $f: V \to V$ 是向量空间 V 到其自身的线性变换，即它满足

$$\begin{cases} f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \forall\, v_1, v_2 \in V; \\ f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v), \forall\, v \in V, \lambda \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

线性变换 f 同样是由它在基底向量 δ_i 上的值唯一确定的. 设

$$f(\delta_i) = \sum_{j=1}^{n} f_i^j \delta_j, \tag{4.17}$$

则 (f_i^j) 称为线性变换 f 在基底 $\{\delta_i\}$ 下的矩阵，它的元素 f_i^j 可以称为 f 的分量.

现在来求分量 f_i^j 在基底 $\{\delta_i\}$ 变换时的规律. 由于我们将遇到多重和号，采用 Einstein 的和式约定是比较方便的(参看(1.7)式后面的说明). 这样，(4.3)式成为

$$e_i = a_i^j \delta_j.$$

用 $\widetilde{f}_i^j$ 表示 f 在基底 $\{e_i\}$ 下的分量，即

$$f(e_i) = \widetilde{f}_i^j e_j, \tag{4.18}$$

于是

$$f(e_i) = f(a_i^j \delta_j) = a_i^j f(\delta_j) = a_i^j \widetilde{f}_j^k \delta_k. \tag{4.19}$$

比较(4.18)和(4.19)两式得到

$$\tilde{f}_i^j a_j^k = a_i^j f_j^k,$$

或

$$\tilde{f}_i^j = a_i^l b_k^j f_l^k. \tag{4.20}$$

其中(b_i^j)是(a_i^j)的逆矩阵. 对照(4.5)式和(4.14)式,(4.20)式是双重线性变换,一次与(4.5)一致,一次与(4.14)式一致,我们称f的分量f_i^j遵从一次反变、一次协变的变换规律.

线性变换f可以看作$V^* \times V$上的2重线性函数$F: V^* \times V \to \mathbf{R}$,定义为:$\forall\ (\alpha, v) \in V^* \times V$,

$$F(\alpha, v) = \alpha(f(v)). \tag{4.21}$$

F关于各个自变量的线性性质是明显的. 反过来,若有2重线性函数$F: V^* \times V \to \mathbf{R}$,则可以定义线性变换$f: V \to V$为

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} F(\delta^i, v)\delta_i. \tag{4.22}$$

容易证明,右端与基底$\{\delta_i\}$的选取无关,故映射$f: V \to V$的定义是合理的. 在f和F的上述对应下,F的分量为

$$f_i^j = F(\delta^j, \delta_i).$$

综合以上三个例子,我们给出下面的定义:

定义 4.2　设V是n维向量空间,V^*是它的对偶向量空间,(p,q)是一对非负整数. 所谓V上的一个(p,q)**型张量**是指$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p\text{个}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q\text{个}}$上的一个$p+q$重线性函数,其中$p$为反变阶数,$q$为协变阶数. 全体$V$上的$(p,q)$型张量的集合记作$V_q^p$,或

$$\mathscr{L}(\underbrace{V^*, \cdots, V^*}_{p\text{个}}, \underbrace{V, \cdots, V}_{q\text{个}}; \mathbf{R}).$$

特别地,(1,0)型张量就是向量空间V中的元素;(0,1)型张量就是对偶空间V^*中的元素,即V上的线性函数. 为方便起见,把实数称为(0,0)型张量或数量.

在向量空间V中取定一个基底$\{\delta_i\}$,并设对偶空间V^*中的对偶基底为$\{\delta^i\}$. 若f是一个(p,q)型张量,取$\alpha^1, \cdots, \alpha^p \in V^*, v_1, \cdots, v_q \in V$,并且设

$$\alpha^r = \alpha_i^r \delta^i, \qquad 1 \leqslant r \leqslant p,$$

$$v_s = v_s^i \delta_i, \qquad 1 \leqslant s \leqslant q,$$

则

$$f(\alpha^1, \cdots, \alpha^p, v_1, \cdots, v_q)$$

$$= \alpha^1_{i_1} \cdots \alpha^p_{i_p} v^{j_1}_1 \cdots v^{j_q}_q f(\delta^{i_1}, \cdots, \delta^{i_p}, \delta_{j_1}, \cdots, \delta_{j_q})$$

$$= f^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q} \alpha^1_{i_1} \cdots \alpha^p_{i_p} v^{j_1}_1 \cdots v^{j_q}_q, \tag{4.23}$$

其中

$$f^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q} = f(\delta^{i_1}, \cdots, \delta^{i_p}, \delta_{j_1}, \cdots, \delta_{j_q}). \tag{4.24}$$

它们总共有 n^{p+q} 个数，称为张量 f 在基底$\{\delta_i\}$下的**分量**. 对应于反变阶数 p，f 的分量有 p 个上指标；对应于协变阶数q，f 的分量有q个下指标. 容易验证，当 V 的基底$\{\delta_i\}$变换时，分量 $f^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q}$ 关于每个上指标遵从反变变换规律，关于每个下指标遵从协变变换规律. 即：若$\{e_i\}$是 V 的另一个基底，并且如(4.3)式所示，则张量 f 在基底$\{e_i\}$下的分量 $\tilde{f}^{k_1 \cdots k_p}{}_{l_1 \cdots l_q}$ 满足下式：

$$\tilde{f}^{k_1 \cdots k_p}{}_{l_1 \cdots l_q} = b^{k_1}_{i_1} \cdots b^{k_p}_{i_p} a^{j_1}_{l_1} \cdots a^{j_q}_{l_q} f^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q}, \tag{4.25}$$

其中(b^i_j)是(a^i_j)的逆矩阵.

反过来，如果对于 V 的每一个基底$\{\delta_i\}$都指定一个由 n^{p+q} 个数构成的数组$\{f^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q}\}$，其中 p 个指标记成上指标，q 个指标记成下指标，并且当基底$\{\delta_i\}$按(4.3)式变换时，相应的数组按(4.25)式进行变换，那么必有一个(p,q)型张量 f，以 $f^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q}$ 为它在基底$\{\delta_i\}$下的分量. 实际上，用(4.23)式定义的 $p+q$ 重线性函数是有意义的，即(4.23)式给出了一个确定的、与基底选取无关的、定义在$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p\text{个}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q\text{个}}$上的$(p+q)$重线性函数，并且它在基底向量 $\delta^{i_1}, \cdots, \delta^{i_p}, \delta_{j_1}, \cdots, \delta_{j_q}$ 上的值恰好是 $f^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q}$. Ricci 就是用变换规律(4.25)来定义$(p,q)$型张量的. 上面的断言表明，这两种定义是一致的.

在定义 4.2 中，我们把(p,q)型张量的线性函数自变量都集中在前面，把向量自变量都集中在后面. 但是，作为 $p+q$ 重线性函数，两类自变量出现的次序可能不同于前面的安排，也就是说会有不同类型的(p,q)型张量. 然而，任何一种(p,q)型张量的空间都同构于定义 4.2 所叙述的(p,q)型张量空间 V^p_q. 为简便起见，我们只考虑定义 4.2 给出的张量.

积空间$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p\text{个}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q\text{个}}$上的 $p+q$ 重线性函数的加法和数乘法是有意义的，(p,q)型张量的集合 $V^p_q = \mathscr{L}(\underbrace{V^*, \cdots, V^*}_{p\text{个}}, \underbrace{V, \cdots, V}_{q\text{个}}; \mathbf{R})$ 关于上述运算自动地成为向量空间.

不同类型的张量还能作张量积运算.

定义 4.3 设 V, W 是两个向量空间，$\alpha \in V^*$，$\beta \in W^*$，则 α 和 β 的张量积 $\alpha \otimes \beta$ 是积空间 $V \times W$ 上的 2 重线性函数，定义为

$$\alpha \otimes \beta(v, w) = \alpha(v) \cdot \beta(w), \quad \forall\, v \in V, w \in W. \tag{4.26}$$

一般地，设 $V_1, \cdots, V_p, W_1, \cdots, W_q$ 是 $p+q$ 个向量空间，$\alpha \in \mathscr{L}(V_1, \cdots, V_p; \mathbf{R})$，

$\beta \in \mathscr{L}(W_1,\cdots,W_q;\mathbf{R})$，则张量积 $\alpha \otimes \beta$ 是 $V_1 \times \cdots \times V_p \times W_1 \times \cdots \times W_q$ 上的 $p+q$ 重线性函数，定义为

$$\begin{aligned} &\alpha \otimes \beta(v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q) \\ &= \alpha(v_1,\cdots,v_p)\cdot\beta(w_1,\cdots,w_q), \end{aligned} \tag{4.27}$$

其中 $v_r \in V_r, 1 \leqslant r \leqslant p, w_s \in W_s, 1 \leqslant s \leqslant q$.

多重线性函数的张量积有以下的运算律：

定理 4.1　张量积运算 $\otimes$ 遵从分配律和结合律，即：

(1) 若 $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathscr{L}(V_1,\cdots,V_p;\mathbf{R}),\beta \in \mathscr{L}(W_1,\cdots,W_q;\mathbf{R})$，则

$$(\alpha_1+\alpha_2)\otimes\beta = \alpha_1\otimes\beta+\alpha_2\otimes\beta,$$

$$\beta\otimes(\alpha_1+\alpha_2) = \beta\otimes\alpha_1+\beta\otimes\alpha_2;$$

(2) 若 $\alpha \in \mathscr{L}(V_1,\cdots,V_r;\mathbf{R}),\beta \in \mathscr{L}(W_1,\cdots,W_s;\mathbf{R}),\gamma \in \mathscr{L}(Z_1,\cdots,Z_t;\mathbf{R})$ 则

$$(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma = \alpha\otimes(\beta\otimes\gamma).$$

因此 $\alpha\otimes\beta\otimes\gamma$ 是有意义的.

定理的证明留给读者作为习题.

按照定义 4.3，(r_1,r_2) 型张量 f 和 (s_1,s_2) 型张量 g 的张量积 $f\otimes g$ 是一个 (r_1+s_1,r_2+s_2) 型张量，定义为：

$$\begin{aligned} &f\otimes g(\alpha^1,\cdots,\alpha^{r_1+s_1},v_1,\cdots,v_{r_2+s_2}) \\ &=f(\alpha^1,\cdots,\alpha^{r_1},v_1,\cdots,v_{r_2})\cdot g(\alpha^{r_1+1},\cdots,\alpha^{r_1+s_1},v_{r_2+1},\cdots,v_{r_2+s_2}), \end{aligned} \tag{4.28}$$

其中 $\alpha^1,\cdots,\alpha^{r_1+s_1} \in V^*, v_1,\cdots,v_{r_2+s_2} \in V$.

现在取定 V 的一个基底 $\{\delta_i\}$，设在对偶空间 V^* 中的对偶基底为 $\{\delta^i\}$，于是借助于张量积运算可构造 (p,q) 型张量

$$\delta_{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta_{i_p}\otimes\delta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{j_q}, \quad 1\leqslant i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\leqslant n. \tag{4.29}$$

根据定义，对于任意的 $\alpha^1,\cdots,\alpha^p \in V^*, v_1,\cdots,v_q \in V$ 有

$$\begin{aligned} &\delta_{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta_{i_p}\otimes\delta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{j_q}(\alpha^1,\cdots,\alpha^p,v_1,\cdots,v_q) \\ &=\alpha^1(\delta_{i_1})\cdots\alpha^p(\delta_{i_p})\delta^{j_1}(v_1)\cdots\delta^{j_q}(v_q) \\ &=\alpha^1_{i_1}\cdots\alpha^p_{i_p}v_1^{j_1}\cdots v_q^{j_q}. \end{aligned}$$

因此由 (4.23) 得到

$$\begin{aligned} &f(\alpha^1,\cdots,\alpha^p,v_1,\cdots,v_q) \\ &=f^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}\alpha^1_{i_1}\cdots\alpha^p_{i_p}v_1^{j_1}\cdots v_q^{j_q} \\ &=f^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}\delta_{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta_{i_p}\otimes\delta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{j_q}(\alpha^1,\cdots,\alpha^p,v_1,\cdots,v_q), \end{aligned}$$

故 (p,q) 型张量 f 可以表示成

$$f = f^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}\delta_{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta_{i_p}\otimes\delta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{j_q}, \tag{4.30}$$

其中

$$f^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}=f(\delta^{i_1},\cdots,\delta^{i_p},\delta_{j_1},\cdots,\delta_{j_q}).$$

定理 4.2　在向量空间 V 中取定基底 $\{\delta_i\}$，在对偶空间 V^* 中取对偶基底 $\{\delta^i\}$，则(4.29)式给出的 n^{p+q} 个 (p,q) 型张量构成空间 V_q^p 的基底，因此 $\dim V_q^p=n^{p+q}$.

证明　(4.30)式已表明任意一个 (p,q) 型张量 f 可以表示成这 n^{p+q} 个张量的线性组合，现要证明它们是线性无关的. 设有线性组合(4.30)为零张量，将这个零张量在 $(\delta^{k_1},\cdots,\delta^{k_p},\delta_{l_1},\cdots,\delta_{l_q})$ 上取值，得到

$$\begin{aligned}0&=f^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}\delta^{k_1}_{i_1}\cdots\delta^{k_p}_{i_p}\delta^{j_1}_{l_1}\cdots\delta^{j_q}_{l_q}\\&=f^{k_1\cdots k_p}{}_{l_1\cdots l_q},\end{aligned}$$

其中 $1\leqslant k_1,\cdots,k_p,l_1,\cdots,l_q\leqslant n$，故组合系数必须为零，即(4.29)式给出的 n^{p+q} 个 (p,q) 型张量是线性无关的. 证毕.

设 V,W 是两个向量空间，V,W 中的元素 v,w 可以分别看作 V^*,W^* 上的线性函数，从而求它们的张量积 $v\otimes w$. 一般说来，集合 $\{v\otimes w: v\in V,w\in W\}$ 本身不是向量空间，这导至下面的定义：

定义 4.4　设 V,W 是两个向量空间，由形如张量积 $v\otimes w(v\in V,w\in W)$ 的元素所生成的向量空间称为 V 和 W 的**张量积**，记作 $V\otimes W$.

定理 4.3　设 V,W 分别是 m 维和 n 维向量空间，则它们的张量积 $V\otimes W$ 是 $m\cdot n$ 维向量空间.

证明　在 V 和 W 中分别取基底 $\{\delta_i: 1\leqslant i\leqslant m\}$ 和 $\{e_\alpha: 1\leqslant\alpha\leqslant n\}$. 若 $\xi\in V,\eta\in W$，则 ξ 和 η 分别有表达式

$$\xi=\sum_{i=1}^m\xi^i\delta_i,$$

$$\eta=\sum_{\alpha=1}^n\eta^\alpha e_\alpha,$$

由于张量积运算有分配律，故有

$$\xi\otimes\eta=\sum_{i=1}^m\sum_{\alpha=1}^n\xi^i\eta^\alpha\delta_i\otimes e_\alpha.$$

因为张量积 $V\otimes W$ 的元素都是形如 $\xi\otimes\eta(\xi\in V,\eta\in W)$ 的元素的线性组合，因此 $V\otimes W$ 的元素能表示成 $m\cdot n$ 个元素 $\delta_i\otimes e_\alpha,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant\alpha\leqslant n$，的线性组合.

容易证明，上面的 $m\cdot n$ 个元素是线性无关的. 设 $\{\delta^i\}$ 是 $\{\delta_i\}$ 的对偶基底，$\{e^\alpha\}$ 是 $\{e_\alpha\}$ 的对偶基底. 若有线性组合

$$\zeta=\sum_{i=1}^m\sum_{\alpha=1}^n a^{i\alpha}\delta_i\otimes e_\alpha,\qquad a^{i\alpha}\in\mathbf{R},$$

那么$\zeta=0$的充分必要条件是上述线性组合中所有的系数$a^{i\alpha}$必须为零.实际上,ζ是$V^*\times W^*$上的2重线性函数,并且

$$\begin{aligned}\zeta(\delta^i,e^\alpha)&=\sum_{j=1}^m\sum_{\beta=1}^n a^{j\beta}\delta_j\otimes e_\beta(\delta^i,e^\alpha)\\&=\sum_{j=1}^m\sum_{\beta=1}^n a^{j\beta}\delta^i(\delta_j)e^\alpha(e_\beta)\\&=a^{i\alpha}.\end{aligned}$$

所以,$\zeta=0$当且仅当$a^{i\alpha}=0,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant\alpha\leqslant n$.故$\{\delta_i\otimes e_\alpha:1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant\alpha\leqslant n\}$构成张量积空间$V\otimes W$的基底,特别是

$$\dim(V\otimes W)=m\cdot n.$$

从定义可以明显地看出,张量积$V\otimes W$和2重线性函数构成的向量空间$\mathscr{L}(V^*,W^*;\mathbf{R})$是同一个空间.一般地,由定义4.2,$(p,q)$型张量构成的空间

$$V_q^p=\mathscr{L}(\underbrace{V^*,\cdots,V^*}_{p\text{个}},\underbrace{V,\cdots,V}_{q\text{个}};\mathbf{R})$$

就是张量积$\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{p\text{个}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{q\text{个}}$.

现在考虑直和

$$\mathscr{T}(V)=\bigoplus_{p,q\geqslant 0}V_q^p,\tag{4.31}$$

其中每个元素是有限个张量的形式和.在$\mathscr{T}(V)$中可以定义加法,数乘法和张量积,使得$\mathscr{T}(V)$成为一个代数.此外,张量积运算给出映射$V_q^p\times V_s^r\to V_{q+s}^{p+r}$,因此这样的代数称为分次代数.我们把$\mathscr{T}(V)$称为向量空间$V$上的张量代数.张量代数的结构是代数学的研究对象,在此不多赘言了.

张量积运算的结果是从低阶张量出发得到高阶张量.还有一种运算叫做缩并,它把高阶张量变成低阶张量.

定义 4.5　任取两个指标r,s,使得$1\leqslant r\leqslant p,1\leqslant s\leqslant q$,则从任意一个$(p,q)$型张量$\xi\in V_q^p$出发可构造$(p-1,q-1)$型张量$C_s^r(\xi)$如下:

$$\begin{aligned}&(C_s^r(\xi))(\alpha^1,\cdots,\alpha^{p-1},v_1,\cdots,v_{q-1})\\&=\sum_{i=1}^n\xi(\alpha^1,\cdots,\alpha^{r-1},\delta^i,\alpha^r,\cdots,\alpha^{p-1},v_1,\cdots,v_{s-1},\delta_i,v_s,\cdots,v_{q-1}),\end{aligned}\tag{4.32}$$

其中$\{\delta_i\}$是V的一个基底,$\{\delta^i\}$是它的对偶基底.上式右端与基底$\{\delta_i\}$的取法是无关的.映射$C_s^r:V_q^p\to V_{q-1}^{p-1}$称为**缩并**.

很明显,缩并$C_s^r:V_q^p\to V_{q-1}^{p-1}$是线性映射.下面我们考虑在各种表达形式下的张量作缩并的结果.

假定(p,q)型张量ξ可以表示成一些线性函数和向量的张量积,即

$$\xi = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^q,$$

其中 $v_1, \cdots, v_p \in V, \alpha^1, \cdots, \alpha^q \in V^*$. 这样的张量 ξ 称为可分解的. 那么

$$\begin{aligned} & C_s^r(\xi) \\ = & \sum_{i=1}^n (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^q)(\cdots, \delta^i, \cdots, \delta_i, \cdots) \\ = & \sum_{i=1}^n v_r(\delta^i)\alpha^s(\delta_i) v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_r \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \hat{\alpha}^s \otimes \cdots \otimes \alpha^q \\ = & \alpha^s(v_r) \cdot v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_r \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \hat{\alpha}^s \otimes \cdots \otimes \alpha^q, \end{aligned} \tag{4.33}$$

其中记号 ^ 表示去掉它下面的元素. 由此可见, C_s^r 在可分解张量上的作用是将它的第 r 个反变因子与第 s 个协变因子配对求值的结果.

现在假定 (p,q) 型张量 ξ 在基底(4.29)下有表式

$$\xi = \xi^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q} \delta_{i_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{i_p} \otimes \delta^{j_1} \otimes \cdots \otimes \delta^{j_q}, \tag{4.34}$$

则由(4.33)式得到

$$\begin{aligned} & C_s^r(\xi) \\ = & \xi^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q} C_s{}^r(\delta_{i_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{i_p} \otimes \delta^{j_1} \otimes \cdots \otimes \delta^{j_q}) \\ = & \xi^{i_1 \cdots i_{r-1} k i_r \cdots i_{p-1}}{}_{j_1 \cdots j_{s-1} k j_s \cdots j_{q-1}} \delta_{i_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{i_{p-1}} \otimes \delta^{j_1} \otimes \cdots \otimes \delta^{j_{q-1}}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

因此, $C_s^r(\xi)$ 的分量是将 ξ 的分量的第 r 个上指标与第 s 个下指标相等并求和的结果.

缩并是求某个对象的不变量的手段之一.

例 3(续)　线性变换 $f: V \to V$ 等同于 $(1,1)$ 型张量 F(参看(4.21), (4.22)两式). 对 F 作缩并得到

$$\begin{aligned} C_1^1(F) &= \sum_{i=1}^n F(\delta^i, \delta_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \delta^i(f(\delta_i)) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \delta^i(f_i^j \delta_j) = \sum_{i=1}^n f_i^i. \end{aligned}$$

因此 $\sum_{i=1}^n f_i^i$ 是线性变换 f 的不变量(也就是它与 V 的基底 $\{\delta_i\}$ 的选取无关), 称为 f 的迹, 记为 $\mathrm{tr} f$. 上面的计算告诉我们

$$\mathrm{tr} f = C_1^1(F).$$

例 4　设 $\alpha \in V^*, v \in V$, 则

$$\alpha(v) = C_1^1(v \otimes \alpha).$$

这是(4.33)式在 $p=q=1$ 的情形.实际上,取 V 的基底 $\{\delta_i\}$ 及 V^* 中的对偶基底 $\{\delta^i\}$,则

$$C_1^1(v\otimes\alpha)=\sum_i v\otimes\alpha(\delta^i,\delta_i)=\sum_i\delta^i(v)\cdot\alpha(\delta_i)$$
$$=\alpha\Big(\sum_i\delta^i(v)\delta_i\Big)=\alpha(v).$$

最后让我们讨论欧氏向量空间中的张量.

在 §1,我们把向量空间 V 连同指定的一个欧氏内积 $\langle\ ,\ \rangle$ 称为欧氏向量空间,欧氏内积 $\langle\ ,\ \rangle: V\times V\to\mathbf{R}$ 是对称、正定的双线性函数,因而是 V 上的对称、正定的 2 阶协变张量,也称为欧氏向量空间的**度量张量**,或基本张量.在下面我们把欧氏向量空间的度量张量记为 g.

任意取定 V 的一个基底 $\{\delta_i\}$,在 V^* 中的对偶基底为 $\{\delta^i\}$,则

$$g=g_{ij}\delta^i\otimes\delta^j,\tag{4.36}$$

其中 g 的分量 g_{ij} 是

$$g_{ij}=g(\delta_i,\delta_j)=\langle\delta_i,\delta_j\rangle.\tag{4.37}$$

张量 g 的对称性、正定性表现为矩阵 (g_{ij}) 的对称性和正定性.用 (g^{ij}) 表示 (g_{ij}) 的逆矩阵,我们有下列重要事实:

引理 4.4 g^{ij} 遵循 2 阶反变张量分量的变换规律.

证明 假定由(4.3)式给出 V 的另一个基底 $\{e_i\}$,则度量张量 g 在新基底下的分量 $\tilde{g}_{ij}$ 与 g_{ij} 的关系是

$$\tilde{g}_{kl}=a_k^ia_l^jg_{ij}.\tag{4.38}$$

用 $(\tilde{g}^{ij})$ 表示 $(\tilde{g}_{ij})$ 的逆矩阵.由(4.38)式得到

$$b_i^k\tilde{g}_{kl}=a_l^jg_{ij}$$

两边乘以 $\tilde{g}^{lr}g^{si}$,并对 l,i 求和得到

$$b_i^rg^{si}=a_l^s\tilde{g}^{lr}$$

因此

$$g^{si}=a_l^sa_r^i\tilde{g}^{lr},\tag{4.39}$$

即 g^{ij} 遵循 2 阶反变张量的规律.

令

$$^{\#}g=g^{ij}\delta_i\otimes\delta_j,\tag{4.40}$$

则 $^{\#}g$ 与 V 的基底 $\{\delta_i\}$ 的选取无关,是一个完全确定的 2 阶反变张量,称为 g 的共轭张量.

定理 4.5 设 (V,g) 是 n 维欧氏向量空间,则有自然同构 $\eta: V\to V^*$,它把 $v\in V$ 映为 V 上的线性函数

$$\eta(v)=g(v,\ \cdot).\tag{4.41}$$

证明　(4.41) 式给出的映射 η 显然是线性的. 下面证明 η 有逆映射 $\eta^{-1}: V^* \to V$.

任取 $f \in V^*$. 若 $f = 0$,则只要取 $v = 0$. 设 $f \neq 0$,则 f 的零化子空间

$$W = \{v \in V : f(v) = 0\}$$

是 V 的 $n-1$ 维子空间. 用 u 记 W 的单位法向量,即 $u \in W^{\perp}$,且 $\langle u,u \rangle = 1$. 令 $v = f(u)u$,则对任意的 $w \in V$ 有 $(w - \langle w,u \rangle u) \perp u$,故 $w - \langle w,u \rangle u \in W$,所以

$$\begin{aligned} f(w) &= f(w - \langle w,u \rangle u + \langle w,u \rangle u) \\ &= f(u)\langle w,u \rangle \\ &= \langle v,w \rangle = (\eta(v))(w). \end{aligned}$$

向量 v 是唯一的. 若有另一个向量 $\tilde{v}$ 使得

$$\eta(\tilde{v}) = f,$$

则对任意的 $w \in V$ 有

$$(\eta(v))(w) = (\eta(\tilde{v}))(w),$$

即

$$\langle v - \tilde{v}, w \rangle = 0.$$

由于内积的正定性,因上式对于任意的 w 成立,故有

$$v = \tilde{v}.$$

这样,我们令 $\eta^{-1}(f) = v$.

由于 η^{-1} 是 η 的逆映射,且 η 是线性的,故 η 是同构. 此同构与基底选取无关,所以是自然同构. 证毕.

定理 4.5 的意义是:借助于度量张量 g,可以把向量和线性函数等同起来. 为了看清楚度量张量 g 的作用,我们来求 $\eta(v)$ 的分量与 v 的分量之间的关系.

设 $\{\delta_i\}$ 是 V 的一个基底,度量张量 g 的分量是

$$g_{ij} = g(\delta_i, \delta_j).$$

假定 $v \in V$,并且 v 的表达式是

$$v = v^i \delta_i,$$

则由 $\eta(v)$ 的定义得到

$$\eta(v) = (\eta(v))(\delta_i)\delta^i = g(v,\delta_i)\delta^i = g_{ij}v^j\delta^i.$$

因此

$$(\eta(v))_i = g_{ij}v^j.$$

反过来,如果

$$f = f_i \delta^i \in V^*,$$

则

$$(\eta^{-1}(f))^i = g^{ij} f_j.$$

由于定理 4.5，在欧氏向量空间中可以把向量 v 及其对应的线性函数 $\eta(v)$ 看作同一个对象的不同表现形式，并且把 $(\eta(v))_i$ 记成 v_i，即

$$v_i = g_{ij}v^j, \tag{4.42}$$

$$v^j = g^{ij}v_i. \tag{4.43}$$

通常我们把 v_i 说成是从 v^j 用 g_{ij} 把指标下降的结果，v^i 是从 v_j 用 g^{ij} 将指标上升的结果.

上面的做法可以用于任意的张量. 例如：设 h 是 2 阶协变张量，它的分量表达式是

$$h = h_{ij}\delta^i \otimes \delta^j,$$

与它对应的(1,1) 型张量有

$$h_i{}^j\delta^i \otimes \delta_j, \quad h^i_j\delta_i \otimes \delta^j,$$

对应的 2 阶反变张量是

$$h^{ij}\delta_i \otimes \delta_j,$$

其中

$$\begin{aligned} h_i{}^j &= h_{ik}g^{kj}, \\ h^i_j &= h_{kj}g^{ki}, \\ h^{ij} &= h_{kl}g^{ki}g^{lj}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

在书写时，要注意在将 h_{ij} 的指标上升时保留该指标的空位，而上升后的指标与该空位对齐. 在指标下降时也遵从这同一个书写规则. 这四个张量可以看作同一个对象的不同的表现形式. 从上述观点看，度量张量 g 及其共轭张量 $^{\#}g$ 只是一个对象两种表现，即

$$({}^{\#}g)^{ij} = g^{ij} = g^{ik}g^{jl}g_{kl}.$$

§5 外 代 数

在本节，我们首先叙述对称张量和反对称张量的概念，然后着重讨论反对称 张量. 为叙述方便起见，我们只考虑 V 上的协变张量，同样的讨论也适用于 V 上的反变张量.

定义 5.1 设 ξ 是 V 上的 q 阶协变张量，即 $\xi: V \times \cdots \times V$($q$ 个因子)$\to$ $\mathbf{R}$ 是 V 上的 q 重线性函数. 若任意交换两个自变量的位置，ξ 的值不变，则称 ξ 是**对称**的 q 阶协变张量. 若任意交换两个自变量的位置 ξ 的值只改变符号，则称 ξ 是**反对称**的 q 阶协变张量.

用 $\mathscr{S}(q)$ 表示 q 个不同元素的置换群. 对于 $\sigma \in \mathscr{S}(q)$，可以定义映射 $\sigma: V^0_q \to V^0_q$ 如下：设 $f \in V^0_q$，且 $v_1,\cdots,v_q \in V$，则

$$(\sigma(f))(v_1,\cdots,v_q) = f(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(q)}). \tag{5.1}$$

很明显，$\sigma: V_q^0 \to V_q^0$ 是线性映射.

若 f 是可分解成张量积的协变张量，它的表达式是 $f = \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^q$，其中 $\alpha^1, \cdots, \alpha^q \in V^*$，则容易得到

$$\sigma(f) = \alpha^{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha^{\tau(q)},$$

其中 $\tau = \sigma^{-1}$ 是置换 σ 的逆.

从定义(5.1)可知：若张量 f 在基底 $\{\delta_i\}$ 下的分量是 $f_{i_1 \cdots i_q}$，则 $\sigma(f)$ 的分量是 $f_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(q)}}$.

由于每个置换是若干个对换的乘积，所以 $\xi \in V_q^0$ 是对称张量的充要条件是：对于任意的 $\sigma \in \mathscr{S}(q)$，有

$$\sigma(\xi) = \xi. \tag{5.2}$$

$\xi \in V_q^0$ 是反对称张量的充要条件是：对于任意的 $\sigma \in \mathscr{S}(q)$ 有

$$\sigma(\xi) = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \xi, \tag{5.3}$$

其中

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \sigma \text{ 是偶置换}, \\ -1, & \text{若 } \sigma \text{ 是奇置换}. \end{cases} \tag{5.4}$$

根据上面的讨论，我们有

命题 5.1 设 $\xi \in V_q^0$，则 ξ 是对称张量的充要条件是 ξ 的分量关于各个指标是对称的，即

$$\xi_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(q)}} = \xi_{i_1 \cdots i_q}, \quad \forall\, \sigma \in \mathscr{S}(q).$$

ξ 是反对称张量的充要条件是 ξ 的分量关于各个指标是反对称的，即

$$\xi_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(q)}} = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \xi_{i_1 \cdots i_q}, \quad \forall\, \sigma \in \mathscr{S}(q).$$

定义 5.2 设 $\xi \in V_q^0$，令

$$S_q(\xi) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}(q)} \sigma(\xi), \tag{5.5}$$

$$A_q(\xi) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}(q)} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \sigma(\xi), \tag{5.6}$$

则 $S_q(\xi)$ 是对称的 q 阶协变张量，$A_q(\xi)$ 是反对称的 q 阶协变张量. S_q 称为**对称化算子**，A_q 称为**反对称化算子**.

定义 5.2 中的断言证明如下：任取 $\tau \in \mathscr{S}(q)$，则 τ 在 $\mathscr{S}(q)$ 中元素上的左乘（即 τ 与 $\mathscr{S}(q)$ 中的置换的合成）给出了从 $\mathscr{S}(q)$ 到它自身的一一对应，所以

$$\tau(S_q(\xi)) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}(q)} \tau \circ \sigma(\xi) = S_q(\xi),$$

$$\begin{aligned} \tau(A_q(\xi)) &= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}(q)} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot (\tau \circ \sigma)(\xi) \\ &= \mathrm{sign}(\tau) \cdot \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}(q)} \mathrm{sign}(\tau \circ \sigma) \cdot \tau \circ \sigma(\xi) \end{aligned}$$

$$=\operatorname{sign}(\tau)\cdot A_q(\xi),$$

因此 $S_q(\xi)$，$A_q(\xi)$ 分别是对称张量和反对称张量.

容易证明：S_q 把对称的 q 阶协变张量映到它自身，同时 A_q 把反对称的 q 阶协变张量映到它自身.

对称化算子和反对称化算子还能够对于协变张量的部分自变量进行. 由于本节我们着重考虑的是反对称张量，所以只讨论部分自变量的反对称化.

设 $1\leqslant r<q$，$\mathscr{S}(r)$ 是指元素 $1,\cdots,r$ 的置换群. 当然，$\mathscr{S}(r)$ 可以看作 $\mathscr{S}(q)$ 的子群，即 $\sigma\in\mathscr{S}(r)$ 可表为

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & \cdots & r\\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(r)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & q\\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(r) & r+1 & \cdots & q\end{pmatrix}.$$

$\sigma\in\mathscr{S}(r)$ 在 q 阶协变张量 $\xi\in V_q^0$ 上的作用定义为 σ 看作 $\mathscr{S}(q)$ 中的元素在 ξ 上的作用，即

$$\sigma(\xi)(u_1,\cdots,u_q)=\xi(u_{\sigma(1)},\cdots,u_{\sigma(r)},u_{r+1},\cdots,u_q),\quad \forall\, u_1,\cdots,u_q\in V. \tag{5.7}$$

这样，对于 ξ 的前 r 个自变量作反对称化的结果是

$$a_r(\xi)=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(r)}\operatorname{sign}(\sigma)\cdot\sigma(\xi). \tag{5.8}$$

显然 $a_r(\xi)$ 仍是 q 阶协变张量，且它关于前 r 个自变量是反对称的.

下面的引理是有用的：

引理 5.2 设 $1\leqslant r<q$. 用 A_q 表示作用在 q 阶协变张量上的反对称化算子，用 a_r 表示 q 阶协变张量关于前 r 个自变量的反对称化算子，则对任意的 $\xi\in V_q^0$ 有

$$A_q\circ a_r(\xi)=A_q(\xi).$$

证明 为了使证明过程简化，我们引进广义的 **Kronecker δ-** 记号：

$$\delta^{i_1\cdots i_q}_{j_1\cdots j_q}=\begin{cases}1, & i_1,\cdots,i_q \text{ 互不相同，且 } j_1,\cdots,j_q \text{ 是 } i_1,\cdots,i_q \text{ 的偶置换；}\\ -1, & i_1,\cdots,i_q \text{ 互不相同，且 } j_1,\cdots,j_q \text{ 是 } i_1,\cdots,i_q \text{ 的奇置换；}\\ 0, & \text{其它情形.}\end{cases} \tag{5.9}$$

根据定义，$\delta^{i_1\cdots i_q}_{j_1\cdots j_q}$ 关于上指标是反对称的，关于下指标也是反对称的，并且对于 $\sigma\in\mathscr{S}(q)$ 有

$$\operatorname{sign}(\sigma)=\delta^{\sigma(1)\cdots\sigma(q)}_{1\cdots q}. \tag{5.10}$$

由反对称化的表达式(5.6)，我们有

$$(A_q(\xi))(u_1,\cdots,u_q)=\frac{1}{q!}\delta^{i_1\cdots i_q}_{1\cdots q}\xi(u_{i_1},\cdots,u_{i_q}),$$

其中 $i_1,\cdots,i_q$ 独立地从 1 到 q 求和. 然而，在实际上仅当 $i_1,\cdots,i_q$ 是 $1,\cdots,q$ 的一

个置换时该项才对右端的和式有贡献.

这样,对于 $\xi \in V_q^0$ 有

$$\begin{aligned}&(A_q \circ a_r(\xi))(u_1,\cdots,u_q)\\&=\frac{1}{q!}\delta_{1\cdots q}^{i_1\cdots i_q}a_r(\xi)(u_{i_1},\cdots,u_{i_q})\\&=\frac{1}{q!}\frac{1}{r!}\delta_{1\cdots q}^{i_1\cdots i_q}\delta_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_r}\xi(u_{j_1},\cdots,u_{j_r},u_{i_{r+1}},\cdots,u_{i_q}).\end{aligned}$$

很明显,

$$\frac{1}{r!}\delta_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_r}\delta_{1\cdots q}^{i_1\cdots i_r i_{r+1}\cdots i_q}=\delta_{1\cdots q}^{j_1\cdots j_r i_{r+1}\cdots i_q}. \tag{5.11}$$

实际上,上式左边是对于 $\delta_{1\cdots q}^{j_1\cdots j_r i_{r+1}\cdots i_q}$ 的前 r 个上指标作反对称化,而 $\delta_{1\cdots q}^{j_1\cdots j_r i_{r+1}\cdots i_q}$ 关于前 r 个上指标却是反对称的,故上式成立. 所以,

$$\begin{aligned}&(A_q \circ a_r(\xi))(u_1,\cdots,u_q)\\&=\frac{1}{q!}\delta_{1\cdots q}^{j_1\cdots j_r i_{r+1}\cdots i_q}\xi(u_{j_1},\cdots,u_{j_r},u_{i_{r+1}},\cdots,u_{i_q})\\&=(A_q(\xi))(u_1,\cdots,u_q).\end{aligned}$$

引理中的 a_r 可以换成对于 ξ 的任意指定的 r 个自变量的反对称化,结论仍旧成立.

向量空间 V 上的外形式是一种特殊的张量,其定义如下:

定义 5.3 向量空间 V 上的反对称 r 阶协变张量,即 V 上的反对称 r 重线性函数,称为 V 上的 r **次外形式**,简称为 r- 形式.

例 1 设 V 是 n 维向量空间,$\{\delta_i\}$ 是它的一个基底. 任意取定 r 个指标 $1\leqslant i_1,\cdots,i_r\leqslant n$,令

$$D^{i_1\cdots i_r}(u_1,\cdots,u_r)=\begin{vmatrix}u_1^{i_1} & \cdots & u_r^{i_1}\\ \vdots & & \vdots\\ u_1^{i_r} & \cdots & u_r^{i_r}\end{vmatrix}, \tag{5.12}$$

其中 $u_1,\cdots,u_r\in V$,u_α^i 是向量 u_α 关于基底 $\{\delta_i\}$ 的第 i 个分量. 交换两个向量 u_α,u_β 的位置相当于在右边的行列式中交换第 α 列和第 β 列的元素. 由于行列式关于每一列是线性的,并且在交换任意两列元素的位置时,行列式变号,由此可知 $D^{i_1\cdots i_r}$ 是 V 上的反对称 r 重线性函数,即 $D^{i_1\cdots i_r}$ 是一个 r 次外形式.

容易验证:

$$D^{i_1\cdots i_r}(\delta_{j_1},\cdots,\delta_{j_r})=\begin{vmatrix}\delta_{j_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_r}^{i_1}\\ \vdots & & \vdots\\ \delta_{j_1}^{i_r} & \cdots & \delta_{j_r}^{i_r}\end{vmatrix}=\delta_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_r}. \tag{5.13}$$

V 上全体 r 次外形式的集合记作 $\wedge^r V^*$. 很明显,加法和数乘法在 $\wedge^r V^*$

中是封闭的，因此，$\wedge^r V^*$ 是一个向量空间. 为了求出向量空间 $\wedge^r V^*$ 的维数，我们设法找出它的一个基底.

为此先定义外形式的乘法. 两个外形式作为协变张量可以作张量积，而反对称化算子能够把一个协变张量变成外形式. 把这两种运算结合起来，便从两个外形式出发获得次数为它们的次数之和的一个新的外形式.

定义 5.4 设 $\alpha \in \wedge^r V^*$，$\beta \in \wedge^s V^*$. 令

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(r+s)!}{r!s!} A_{r+s}(\alpha \otimes \beta), \tag{5.14}$$

则 $\alpha \wedge \beta$ 是 $r+s$ 次外形式，称为外形式 α 和 β 的**外积**.

定理 5.3 外积运算服从下列运算律，设 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2 \in \wedge^r V^*$，$\beta,\beta_1,\beta_2 \in \wedge^s V^*$，$\gamma \in \wedge^t V^*$，则有

(1) 分配律

$$(\alpha_1+\alpha_2)\wedge\beta = \alpha_1\wedge\beta+\alpha_2\wedge\beta,$$
$$\alpha\wedge(\beta_1+\beta_2) = \alpha\wedge\beta_1+\alpha\wedge\beta_2;$$

(2) 反交换律

$$\alpha\wedge\beta = (-1)^{rs}\beta\wedge\alpha;$$

(3) 结合律

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma = \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma).$$

证明 (1) 由于张量积有分配律，而反对称化算子是线性的，所以外积的分配律成立.

(2) 由于 $\alpha\wedge\beta$ 是反对称协变张量，故对任意的 $\sigma\in\mathscr{S}(r+s)$ 有

$$\sigma(\alpha\wedge\beta) = \mathrm{sign}(\sigma)\cdot(\alpha\wedge\beta).$$

现取

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & r+s \\ s+1 & \cdots & s+r & 1 & \cdots & s \end{pmatrix},$$

则

$$\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{rs}.$$

任取 $r+s$ 个向量 $u_1,\cdots,u_{r+s}\in V$，则有

$$\begin{aligned}
&\alpha\wedge\beta(u_1,\cdots,u_{r+s})\\
&=\mathrm{sign}(\sigma)\cdot\sigma(\alpha\wedge\beta)(u_1,\cdots,u_{r+s})\\
&=(-1)^{rs}\alpha\wedge\beta(u_{s+1},\cdots,u_{s+r},u_1,\cdots,u_s)\\
&=(-1)^{rs}\frac{1}{r!s!}\sum_{\tau\in\mathscr{S}(r+s)}\mathrm{sign}(\tau)\cdot\alpha(u_{\tau(s+1)},\cdots,u_{\tau(s+r)})\beta(u_{\tau(1)},\cdots,u_{\tau(s)})\\
&=(-1)^{rs}\frac{1}{r!s!}\sum_{\tau\in\mathscr{S}(r+s)}\mathrm{sign}(\tau)\cdot\beta(u_{\tau(1)},\cdots,u_{\tau(s)})\alpha(u_{\tau(s+1)},\cdots,u_{\tau(s+r)})
\end{aligned}$$

$$=(-1)^{rs}\beta\wedge\alpha(u_1,\cdots,u_{r+s}),$$

即

$$\alpha\wedge\beta=(-1)^{rs}\beta\wedge\alpha.$$

(3) 结合律的关键在于外积定义中的系数的适当配置(若在外积定义中取系数为 1,则结合律也成立,这就给出定义外积的另一种方式). 由定义,

$$\begin{aligned}&(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\\&=\frac{(r+s+t)!}{(r+s)!t!}A_{r+s+t}((\alpha\wedge\beta)\otimes\gamma)\\&=\frac{(r+s+t)!}{(r+s)!t!}\cdot\frac{(r+s)!}{r!s!}A_{r+s+t}(A_{r+s}(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma)\\&=\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}A_{r+s+t}\circ a_{r+s}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma),\end{aligned}$$

其中 a_{r+s} 是指对于 $\alpha\otimes\beta\otimes\gamma$ 的前 $r+s$ 个自变量作反对称化. 由引理 5.2

$$A_{r+s+t}\circ a_{r+s}=A_{r+s+t},$$

故有

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}A_{r+s+t}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma).\tag{5.15}$$

同理,我们有

$$\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)=\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}A_{r+s+t}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma).$$

因此结合律成立.

从反交换律可知,只要在 α,β 中有一个是偶次外形式,则 $\alpha\wedge\beta=\beta\wedge\alpha$; 若 α,β 都是奇次外形式,则 $\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha$. 特别是,当 α 是 1 次外形式时,$\alpha\wedge\alpha=0$.

根据公式(5.15)不难用归纳法得到:若 $\alpha^1,\cdots,\alpha^r\in V^*$,则

$$\begin{aligned}&\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^r\\&=r!A_r(\alpha^1\otimes\cdots\otimes\alpha^r)\\&=\delta^{1\cdots r}_{i_1\cdots i_r}\alpha^{i_1}\otimes\cdots\otimes\alpha^{i_r}.\end{aligned}$$

特别是,若 $\{\delta^i\}$ 是 V^* 的一个基底,则对任意取定的一组指标 $1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n$,便有一个 r 次外形式

$$\begin{aligned}&\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r}\\&=\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}\delta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{j_r}.\end{aligned}\tag{5.16}$$

设 $u_1,\cdots,u_r$ 是 V 中任意 r 个向量,那么

$$\begin{aligned}&\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r}(u_1,\cdots,u_r)\\&=\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}\delta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{j_r}(u_1,\cdots,u_r)\end{aligned}$$

$$=\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}u^{j_1}_1\cdots u^{j_r}_r$$

$$=\begin{vmatrix} u^{i_1}_1 & \cdots & u^{i_1}_r \\ \vdots & & \vdots \\ u^{i_r}_1 & \cdots & u^{i_r}_r \end{vmatrix}.$$

由此可见 $\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r}$ 恰好就是例 1 中所给出的外形式 $D^{i_1\cdots i_r}$,特别是

$$\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r}(\delta_{j_1},\cdots,\delta_{j_r})=\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}. \qquad (5.13)'$$

定理 5.4　设 V 是 n 维向量空间,$\{\delta_i\}$ 是它的一个基底,$\{\delta^i\}$ 是其对偶基底,则下列 $\binom{n}{r}$ 个 r 次外形式

$$\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r},\quad 1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n \qquad (5.17)$$

构成 r 次外形式空间 $\wedge^r V^*$ 的基底. 由此可见,$\dim\wedge^r V^*=\binom{n}{r}$.

证明　为此只要证明任意一个 r 次外形式能够唯一地表示成(5.17) 所列的 $\binom{n}{r}$ 个 r 次外形式的线性组合.

设 $\xi\in\wedge^r V^*$. 由于 ξ 是 r 阶协变张量,根据(4.30) 式,我们有

$$\xi=\xi_{i_1\cdots i_r}\delta^{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{i_r}, \qquad (5.18)$$

其中

$$\xi_{i_1\cdots i_r}=\xi(\delta_{i_1},\cdots,\delta_{i_r}).$$

由于 ξ 是反对称的,故 $\xi_{i_1\cdots i_r}$ 关于下指标是反对称的,并且 $A_r(\xi)=\xi$(见定义 5.2 后面的注记). 因此从(5.18)、(5.16) 两式得到

$$\begin{aligned}\xi&=A_r(\xi)\\&=\xi_{i_1\cdots i_r}A_r(\delta^{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{i_r})\\&=\frac{1}{r!}\xi_{i_1\cdots i_r}\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r}\\&=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}\xi_{i_1\cdots i_r}\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r}.\end{aligned} \qquad (5.19)$$

ξ 的表达式(5.19) 是唯一的. 实际上,假定 ξ 是零形式,且它能表达成

$$0=\xi=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}\xi_{i_1\cdots i_r}\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r}, \qquad (5.20)$$

我们要证:在上述表达式中所有的系数 $\xi_{i_1\cdots i_r}$ 必须为零. 为此,任意取定一组指标 $1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n$,将表达式(5.20) 的右端在基底向量 $\delta_{j_1},\cdots,\delta_{j_r}$ 上求值得到

$$0=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}\xi_{i_1\cdots i_r}\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r}(\delta_{j_1},\cdots,\delta_{j_r})$$

$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \xi_{i_1 \cdots i_r} \delta_{j_1 \cdots j_r}^{i_1 \cdots i_r}$$

$$= \xi_{j_1 \cdots j_r}.$$

因此，(5.17) 的这 $\binom{n}{r}$ 个 r 次外形式构成了空间 $\wedge^r V^*$ 的基底.

表达式(5.19) 称为 r 次外形式 ξ 的标准表达式. 特别要指出的是，在标准表达式(5.19) 中的系数 $\xi_{i_1 \cdots i_r}$ 恰好是 ξ 在基底向量 $\delta_{i_1}, \cdots, \delta_{i_r}$ 上的值. 从表达式(5.19) 可知，高于 n 次的外形式必定是零形式.

推论 5.5　设 $\{\delta_i\}$ 是向量空间 V 的一个基底，ξ 是 V 上的 r 次外形式，则对于任意的 $u_1, \cdots, u_r \in V$ 有

$$\begin{aligned} &\xi(u_1, \cdots, u_r) \\ &= \xi_{i_1 \cdots i_r} u_1^{i_1} \cdots u_r^{i_r} \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \xi_{i_1 \cdots i_r} \begin{vmatrix} u_1^{i_1} & \cdots & u_r^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{i_r} & \cdots & u_r^{i_r} \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{5.21}$$

其中 $\xi_{i_1 \cdots i_r} = \xi(\delta_{i_1}, \cdots, \delta_{i_r}), u_\alpha = u_\alpha^i \delta_i$.

(5.21) 式称为 r 次外形式 ξ 的求值公式，是(5.19) 式和(5.13) 式的直接推论.

定义 5.5　设 $f: V \to W$ 是从向量空间 V 到向量空间 W 的一个线性映射，则 f 诱导出外形式空间之间的线性映射 $f^*: \wedge^r W^* \to \wedge^r V^*$，其定义是：对于任意的 $\alpha \in \wedge^r W^*$ 及 $u_1, \cdots, u_r \in V$ 有

$$(f^* \alpha)(u_1, \cdots, u_r) = \alpha(f(u_1), \cdots, f(u_r)). \tag{5.22}$$

f^* 称为 f 的诱导映射.

特别是在 $r = 1$ 时，f^* 是从 W^* 到 V^* 的线性映射，其定义是

$$(f^* \alpha)(u) = \alpha(f(u)), \forall\, \alpha \in W^*, u \in V.$$

诱导映射 f^* 的重要性在于它与外积是可交换的.

定理 5.6　设 $f: V \to W$ 是线性映射，$f^*: \wedge^r W^* \to \wedge^r V^*$ 是诱导映射 $(r = 1, 2, \cdots)$，则对任意的 $\alpha \in \wedge^r W^*, \beta \in \wedge^s W^*$ 有

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^* \alpha \wedge f^* \beta. \tag{5.23}$$

证明　任取 $u_1, \cdots, u_{r+s} \in V$，则有

$$\begin{aligned} &(f^*(\alpha \wedge \beta))(u_1, \cdots, u_{r+s}) \\ &= (\alpha \wedge \beta)(f(u_1), \cdots, f(u_{r+s})) \\ &= \frac{1}{r!s!} \delta_{1 \cdots r+s}^{i_1 \cdots i_{r+s}} \alpha(f(u_{i_1}), \cdots, f(u_{i_r})) \cdot \beta(f(u_{i_{r+1}}), \cdots, f(u_{i_{r+s}})) \\ &= (f^* \alpha) \wedge (f^* \beta)(u_1, \cdots, u_{r+s}). \end{aligned}$$

外形式和外微分式(参看第四章)的理论在微分几何、微分方程及力学、数学物理中有广泛的应用,已经成为微分流形基础理论的一个重要组成部分.针对各种应用和研究所提出的问题,外形式和外微分式的理论也得到了充分的发展.在下面我们要介绍几个关于外形式的可除性定理.关于外形式理论更多的内容,读者可查阅[7].

定理 5.7 1次形式 $\xi^1,\cdots,\xi^r\in V^*$ 线性相关的充分必要条件是

$$\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^r=0. \tag{5.24}$$

证明 若 $\xi^1,\cdots,\xi^r$ 线性相关,则其中必有一个成员能表示成其它成员的线性组合.不妨设

$$\xi^r=a_1\xi^1+\cdots+a_{r-1}\xi^{r-1}.$$

于是

$$\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^r=\sum_{\lambda=1}^{r-1}a_\lambda\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^{r-1}\wedge\xi^\lambda=0.$$

反过来,设 $\xi^1,\cdots,\xi^r$ 线性无关,则它们能扩充为 V^* 的一个基底 $\{\xi^1,\cdots,\xi^r,\cdots,\xi^n\}$.用 $\{e_i\}$ 表示 V 中与 $\{\xi^i\}$ 对偶的基底,则由(5.16)式得到

$$\begin{aligned}&\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^r(e_1,\cdots,e_r)\\&=\delta^{1\cdots r}_{i_1\cdots i_r}\xi^{i_1}(e_1)\cdots\xi^{i_r}(e_r)\\&=\begin{vmatrix}\xi^1(e_1)&\cdots&\xi^1(e_r)\\\vdots&&\vdots\\\xi^r(e_1)&\cdots&\xi^r(e_r)\end{vmatrix}\\&=1,\end{aligned}$$

即 $\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^r\neq0$.

定义 5.6 设 $\xi^1,\cdots,\xi^r$ 是 r 个1次形式,Ω 是 p 次外形式.如果存在 r 个 $p-1$ 次外形式 $\varphi_1,\cdots,\varphi_r$ 使得 $\Omega=\xi^1\wedge\varphi_1+\cdots+\xi^r\wedge\varphi_r$,则记

$$\Omega\equiv0\ \mathrm{mod}(\xi^1,\cdots,\xi^r).$$

特别当 $\Omega=\xi^1\wedge\varphi_1$ 时,称 Ω 可被1次形式 ξ^1 除尽,记作 $\Omega\equiv0\ \mathrm{mod}\xi^1$.

定理 5.8 设 $\xi^1,\cdots,\xi^r$ 是 r 个线性无关的1次形式,Ω 是 p 次外形式,则 $\Omega\equiv0\ \mathrm{mod}(\xi^1,\cdots,\xi^r)$ 的充分必要条件是

$$\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^r\wedge\Omega=0. \tag{5.25}$$

证明 必要性是显然的.若

$$\Omega=\xi^1\wedge\varphi_1+\cdots+\xi^r\wedge\varphi_r, \tag{5.26}$$

则

$$\begin{aligned}&\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^r\wedge\Omega\\&=\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^r\wedge(\xi^1\wedge\varphi_1+\cdots+\xi^r\wedge\varphi_r)=0.\end{aligned}$$

充分性. 将 $\xi^1,\cdots,\xi^r$ 扩充成 V^* 的一个基底 $\{\xi^1,\cdots,\xi^r,\cdots,\xi^n\}$，则 p 次外形式 Ω 有表达式

$$\Omega = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n} \Omega_{i_1\cdots i_p}\xi^{i_1}\wedge\cdots\wedge\xi^{i_p}. \tag{5.27}$$

当 $r+p>n$ 时，(5.25) 式是自动成立的. 此时，$p>n-r$，故在每一项

$$\xi^{i_1}\wedge\cdots\wedge\xi^{i_p}\quad (1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n)$$

中至少有 $\xi^1,\cdots,\xi^r$ 的一个因子，否则 p 个指标 $i_1,\cdots,i_p$ 只能在 $r+1,\cdots,n$ 中取值，因而至少有两个指标会取相同的值，该项必为零. 因此

$$\Omega\equiv 0 \bmod(\xi^1,\cdots,\xi^r).$$

设 $r+p\leqslant n$. 由条件(5.25) 得到

$$\begin{aligned}0 &= \xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^r\wedge\Omega\\ &= \sum_{r+1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\Omega_{i_1\cdots i_p}\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^r\wedge\xi^{i_1}\wedge\cdots\wedge\xi^{i_p}.\end{aligned}$$

但是

$$\{\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^r\wedge\xi^{i_1}\wedge\cdots\wedge\xi^{i_p} : r+1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n\}$$

是外形式空间 $\wedge^{r+p}V^*$ 的基底的一部分，因此上式意味着

$$\Omega_{i_1\cdots i_p}=0,\qquad r+1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n.$$

这就是说，只有当 i_1 取 $1,\cdots,r$ 之间的值时，$\Omega_{i_1\cdots i_p}$ 才可能不等于零，于是

$$\Omega = \sum_{\lambda=1}^{r}\xi^\lambda\wedge\Big(\sum_{\lambda<i_2<\cdots<i_p\leqslant n}\Omega_{\lambda i_2\cdots i_p}\xi^{i_2}\wedge\cdots\wedge\xi^{i_p}\Big).$$

定理 5.9　设 $\xi^1,\cdots,\xi^r$ 是 r 个 1 次形式，用 W 表示 $\xi^1,\cdots,\xi^r$ 的零化子空间，即

$$W=\{u\in V : \xi^\lambda(u)=0, 1\leqslant\lambda\leqslant r\},$$

则 $\Omega\equiv 0 \bmod(\xi^1,\cdots,\xi^r)$ 当且仅当 $\Omega|_W=0$.

证明　很明显，可以假定 $\xi^1,\cdots,\xi^r$ 是线性无关的. 设 $\Omega\in\wedge^pV^*$，且

$$\Omega=\xi^1\wedge\varphi_1+\cdots+\xi^r\wedge\varphi_r.$$

任取 $u_1,\cdots,u_p\in W$，则

$$\begin{aligned}&\Omega(u_1,\cdots,u_p)\\ &=\sum_{\lambda=1}^{r}\xi^\lambda\wedge\varphi_\lambda(u_1,\cdots,u_p)\\ &=\sum_{\lambda=1}^{r}\sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha+1}\xi^\lambda(u_\alpha)\varphi_\lambda(u_1,\cdots,\hat{u}_\alpha,\cdots,u_p)\\ &=0,\end{aligned}$$

必要性得证.

充分性. 将$\xi^1,\cdots,\xi^r$扩充成V^*的一个基底$\{\xi^1,\cdots,\xi^n\}$，它在V中的对偶基底设为$\{e_i\}$，于是

$$W=\mathrm{Span}\{e_{r+1},\cdots,e_n\}.$$

如定理 5.8 所证，当$r+p>n$时，p次外形式Ω总是满足$\Omega\equiv 0 \bmod(\xi^1,\cdots,\xi^r)$的. 以下设$r+p\leqslant n, p\leqslant n-r$. 假定$p$次外形式$\Omega$有表示式

$$\Omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\Omega_{i_1\cdots i_p}\xi^{i_1}\wedge\cdots\wedge\xi^{i_p}.$$

当$r+1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n$时，$e_{i_1},\cdots,e_{i_p}\in W$，由假设条件$\Omega|_W=0$得到

$$\Omega_{i_1\cdots i_p}=\Omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})=0.$$

因此，$\Omega\equiv 0 \bmod(\xi^1,\cdots,\xi^r)$(参看定理 5.8 的证明的最后一段).

定理 5.10(Cartan 引理) 设$\alpha^1,\cdots,\alpha^r,\beta_1,\cdots,\beta_r$是$2r$个 1 次形式，其中$\alpha^1,\cdots,\alpha^r$是线性无关的，并且

$$\sum_{\lambda=1}^r\alpha^\lambda\wedge\beta_\lambda=0, \tag{5.28}$$

则

$$\beta_\lambda=\sum_{\mu=1}^r a_{\lambda\mu}\alpha^\mu, \tag{5.29}$$

并且

$$a_{\lambda\mu}=a_{\mu\lambda}. \tag{5.30}$$

证明 把$\alpha^1,\cdots,\alpha^r$扩充成V^*的一个基底$\{\alpha^i\}$，则每一个β_λ可以用这组基底表示为

$$\beta_\lambda=\sum_{i=1}^n a_{\lambda i}\alpha^i.$$

由条件(5.28)得到

$$0=\sum_{\lambda=1}^r\sum_{i=1}^n a_{\lambda i}\alpha^\lambda\wedge\alpha^i$$

$$=\sum_{\lambda<\mu}(a_{\lambda\mu}-a_{\mu\lambda})\alpha^\lambda\wedge\alpha^\mu+\sum_{\lambda=1}^r\sum_{i=r+1}^n a_{\lambda i}\alpha^\lambda\wedge\alpha^i.$$

因为$\{\alpha^i\wedge\alpha^j: i<j\}$构成$\wedge^2V^*$的基底，这些 2 次外形式必是线性无关的，所以上面的线性组合是平凡的，即

$$a_{\lambda\mu}-a_{\mu\lambda}=0,\quad 1\leqslant\lambda,\mu\leqslant r,$$

$$a_{\lambda i}=0,\qquad 1\leqslant\lambda\leqslant r, r+1\leqslant i\leqslant n.$$

最后我们要提一下外形式的秩的概念，这无论在理论上还是在实际应用中都是重要的.

设 $\xi \in \Lambda^r(V^*)$. 如果存在1-形式 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in V^*$ 使得 ξ 可以表示成 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 中 r 个成员的外积之和,则称 ξ 可以用 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的外积表示. 因此,V 上的每一个外形式都可以用 V^* 的基底向量 $\delta^1, \cdots, \delta^n$ 的外积表示. 很明显,用于外积表示一个非零 r 次外形式 ξ 的线性无关的 1- 形式的个数可能小于空间 V^* 的维数 n,但是不会小于 ξ 的次数 r. 据此,我们有下面的定义:

定义 5.7 设 $\xi \in \Lambda^r V^*$,能用于外积表示 ξ 的线性无关的 1- 形式的最小个数称为外形式 ξ 的秩.

关于一个 r 次外形式 ξ 的秩的计算可以归结为求一组 1- 形式(称为 ξ 的伴随 1- 形式)的秩的问题,具体的做法可参看[7]. 在此我们叙述下面的定理.

定理 5.11 一个非零 r 次外形式的秩是 r,当且仅当它能写成 r 个 1- 形式的外积.

定理的证明是容易的,留给读者做练习.

能表成 r 个 1- 形式的外积的 r 次外形式称为可分解的. 因此,定理 5.11 的意思是:一个 r 次外形式是可分解的,当且仅当它的秩是 r.

本节关于外形式的讨论可全部用于反对称反变张量. 实际上,这些讨论可以抽象化:考虑有 n 个变元 $x^1, \cdots, x^n$ 的多项式,假定字母 x^i 与 x^j 之间的乘法是反交换的,即

$$x^i \wedge x^j = - x^j \wedge x^i;$$

结合律和分配律对这种乘法 $\wedge$ 是成立的. 这样,一个 r 次多项式总是可以写成

$$\begin{aligned} & a_{i_1 \cdots i_r} x^{i_1} \wedge \cdots \wedge x^{i_r} \\ = & r! \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} a_{i_1 \cdots i_r} x^{i_1} \wedge \cdots \wedge x^{i_r}, \end{aligned}$$

其中假定系数 $a_{i_1 \cdots i_r}$ 关于下指标是反对称的. 这样的多项式称为 r 次外多项式. 一般的外多项式是各次外多项式和. 由于字母之间乘法的反交换性,不存在次数高于 n 的非零外多项式. 因此,n 个变元的外多项式的基底由下列成员组成:

$$\begin{aligned} & 1; \\ & x^i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \\ & x^i \wedge x^j, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n; \\ & \cdots\cdots \\ & x^{i_1} \wedge \cdots \wedge x^{i_r}, \quad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n; \\ & \cdots\cdots \\ & x^1 \wedge \cdots \wedge x^n. \end{aligned}$$

这意味着 n 个变元的外多项式构成一个 2^n 维向量空间,记成 Λ. 将外积 $\wedge$ 按照分配律扩充到空间 Λ 中来,使它成为一个结合代数,称为外代数.

若用 Λ^r 记 r 次外多项式的集合,则 $\Lambda = \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda^r$,并且外积 $\wedge$ 给出了从 $\Lambda^r \times$

Λ^s 到 Λ^{r+s} 的映射. 所以,外代数是一个分次代数.

很明显,我们在本节所讨论的外形式只不过是一种有具体含义的外多项式. 在这里,V^* 中的对偶基底 $\{\delta^i\}$ 的元素 δ^i 当作多项式的字母 x^i,所有的运算规律是一致的. 特别是,将各次外形式作形式和,并将外积 $\wedge$ 按照分配律扩充到外形式的形式和之间,则我们便得到外代数

$$\wedge V^* = \bigoplus_{r=0}^{n} \wedge^r V^*.$$

习　题　一

1. 设 $\mathbf{R}^n$ 是 n 元数组的集合. 证明:$\mathbf{R}^n$ 是一个 n 维仿射空间,它以 $\mathbf{R}^n$ 自身为它的伴随向量空间.

2. 设 E^n 是 n 维欧氏空间. 对任意两点 $P,Q \in E^n$,令

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}|,$$

称为点 P 和 Q 之间的距离. 证明:E^n 关于距离函数 d 成为一个度量空间.

3. 设 E^n 是 n 维欧氏空间. 对于任意一点 $P \in E^n$ 及实数 $\varepsilon > 0$,令

$$B_\varepsilon(P) = \{Q \in E^n : d(P,Q) < \varepsilon\},$$

称为以点 P 为中心、以 ε 为半径的球形邻域. 设 $A \subset E^n$. 若对 A 内任意一点 P,都有以 P 为中心的某个球形邻域落在 A 内,则称 A 是 E^n 的一个开子集. 证明:

(1) E^n 的全体开子集给出了 E^n 的一个拓扑;

(2) E^n 在上述拓扑下是一个 Hausdorff 空间;

(3) E^n 满足第二可数公理.

4. 设 $\sigma: E^n \to E^n$ 是从 n 维欧氏空间 E^n 到它自身的一个等距变换. 证明:

(1) σ 把 E^n 中的直线变为直线;

(2) σ 把 E^n 中的平行直线变为平行直线;

(3) σ 把单位正交标架 $\{O;\delta_i\}$ 变为另一个单位正交标架.

5. 在 $\mathbf{R}^n$ 中定义两点

$$x = (x^1,\cdots,x^n), \quad y = (y^1,\cdots,y^n)$$

之间的距离为

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y^i - x^i)^2},$$

$\sigma: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是等距变换. 证明:σ 必是如下的线性变换:

$$\sigma(x^1,\cdots,x^n)$$
$$= (a_0^1,\cdots,a_0^n) + (x^1,\cdots,x^n)\cdot\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix},$$

其中$(a_0^1,\cdots,a_0^n)\in\mathbf{R}^n$,且$(a_j^i)$是一个$n\times n$正交矩阵.

6. 设等距变换$\sigma:E^n\to E^n$把单位正交标架$\{O;\delta_i\}$变为单位正交标架$\{P;e_i\}$.设$Q\in E^n$,$Q'=\sigma(Q)$.证明:点Q'关于$\{P;e_i\}$的坐标等于点Q关于$\{O;\delta_i\}$的坐标.

7. 证明:在定义2.2中,映射$f:\mathbf{R}\to E^n$的连续性和r次连续可微性与E^n中直角坐标系$\{O;\delta_i\}$的选取是无关的.

8. 证明:光滑曲线的切向量的定义式(2.6)与空间E^n中直角坐标系$\{O;\delta_i\}$的选取是无关的.

9. 证明:光滑函数沿向量u的方向导数D_u服从下列运算法则:

(1) 若$g,h\in C_P^\infty$,$\lambda\in\mathbf{R}$,则

$$\mathrm{D}_u(g+\lambda h)=\mathrm{D}_u g+\lambda\mathrm{D}_u h;$$

(2) 若$g,h\in C_P^\infty$,则

$$\mathrm{D}_u(g\cdot h)=g(P)\cdot\mathrm{D}_u h+h(P)\cdot\mathrm{D}_u g.$$

10. 设E^n是n维欧氏空间,用$x^i(P)$表示点P在直角坐标系$\{O;\delta_i\}$下的坐标.证明:x^i作为E^n上的函数是C^∞函数.

11. 设$f:E^m\to E^n$是一个光滑映射.

(1) 在E^m,E^n中分别取定直角坐标系之后,f能表示成n个m元光滑函数.试求:f作为n个m元光滑函数的Jacobi矩阵在E^m,E^n的直角坐标系变换下的变换公式;

(2) 证明:f的Jacobi矩阵的秩与E^m,E^n中直角坐标系的选取无关;

(3) 如果在E^m,E^n中分别引进曲纹坐标系,则在曲纹坐标变换下,关于映射f的Jacobi矩阵会得到什么样的结论?

12. 设$(x^1,\cdots,x^n)$是$E^n(n\geqslant 2)$中的直角坐标系,$r_1,\cdots,r_n$是n个正数,令

$$\begin{cases}x^1=r_1u^n\cos u^1\cdots\cos u^{n-2}\cos u^{n-1},\\ x^2=r_2u^n\cos u^1\cdots\cos u^{n-2}\sin u^{n-1},\\ x^3=r_3u^n\cos u^1\cdots\sin u^{n-2},\\ \qquad\cdots\cdots\\ x^n=r_nu^n\sin u^1.\end{cases}$$

证明:$(u^1,\cdots,u^n)$给出E^n中除坐标面$\{(0,0,x^3,\cdots,x^n):x^3,\cdots,x^n\in\mathbf{R}\}$以外的任意一点的邻域内的曲纹坐标系.

13. 求E^3中由球坐标系诱导的自然标架场,并计算这个自然标架场的度量系数和Christoffel记号.

14. 求E^3中由柱坐标系诱导的自然标架场、度量系数和Christoffel记

号.

15. 设$\{P;e_i(P)\}$是E^n中曲纹坐标系$(u^1,\cdots u^n)$所诱导的自然标架场，v是E^n中的向量场，它在自然标架场下有表示公式

$$v=\sum_{i=1}^{n}v^ie_i.$$

证明：v是平行向量场的充分必要条件是v^i满足微分方程组

$$\mathrm{d}v^i+v^j\Gamma^i_{jk}\mathrm{d}u^k=0,$$

其中Γ^i_{jk}是曲纹坐标系$(u^1,\cdots,u^n)$诱导的自然标架场的度量系数的 Christoffel 记号.

16. 用$\mathscr{L}(V_1,\cdots,V_r;\mathbf{R})$表示$V_1\times\cdots\times V_r$上的$r$重线性函数的集合，证明$\mathscr{L}(V_1,\cdots,V_r;\mathbf{R})$一个向量空间.

17. 设$\{\delta_i\}$是向量空间V的一个基底，$\{\delta^i\}$是对偶空间V^*中的对偶基底，假定$\tilde{f}:V\times V^*\to\mathbf{R}$是2重线性函数，令

$$f(u)=\sum_{i=1}^{n}\tilde{f}(u,\delta^i)\delta_i,\quad\forall\,u\in V.$$

证明：映射$f:V\to V$是一个线性变换，并且它的定义与基底$\{\delta_i\}$的选取无关.

18. 设$t:V\times\cdots\times V$(共r个因子)$\to V$是在V中取值的r重线性映射，证明：t等同于一个$(1,r)$型张量.

19. 证明：多重线性函数的张量积服从分配律和结合律.

20. 设V,W是两个向量空间. 证明：当$\dim V\geqslant 2,\dim W\geqslant 2$时，形如$v\otimes w(v\in V,w\in W)$的元素组成的集合不成为一个向量空间.

21. 设$f:V\to V$是从n维向量空间V到自身一个线性变换，假定f在基底$\{\delta_i\}$下的矩阵是(b_i^j). 证明：$B_3=b_i^jb_k^ib_j^k$是与基底$\{\delta_i\}$的选取无关的不变量，并且试用张量的缩并把这个不变量表示出来.

22. 设$\delta_i^j,1\leqslant i,j\leqslant n$，是 Kronecker δ-记号. 证明：这n^2个数能作为n维向量空间V上某个$(1,1)$型张量在任意一个基底下的分量. 试问：这个张量是什么？

23. 设

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

是否存在一个$(0,2)$型张量，使得它在任意一个基底下的分量是δ_{ij}？为什么？

24. 设V是n维向量空间，$f=\alpha^1\otimes\cdots\otimes\alpha^q$，其中$\alpha^1,\cdots,\alpha^q\in V^*$. 证明：对于任意的$\sigma\in\mathscr{S}(q)$，

$$\sigma(f)=\alpha^{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes\alpha^{\tau(q)},$$

其中$\tau=\sigma^{-1}$.

25. 设 ξ 是 n 维向量空间 V 上的 q 阶协变张量. 证明:

(1) ξ 是对称张量当且仅当 $S_q(\xi) = \xi$;

(2) ξ 是反对称张量当且仅当 $A_q(\xi) = \xi$.

26. 设 ξ 是 V 上的 2 阶协变张量. 证明: ξ 可以写成一个 2 阶对称协变张量和一个 2 阶反对称协变张量之和.

27. 设 φ 是 V 上的 3 阶协变张量. 证明:若 φ 关于前两个自变量是对称的,关于后两个自变量是反对称的,则 φ 必是零张量.

28. 设 a 是 $(0,2)$ 型张量. 证明:若对任意的 $x \in V$ 有 $a(x,x) = 0$,则 $S_2(a) = 0$.

29. 设 a 是 $(2,0)$ 型张量, b 是 $(0,2)$ 型张量. 证明:若对任意的对称张量 a 都有 $a^{ij}b_{ij} = 0$,则 b 是反对称张量.

30. 设 $f, \tilde{f}$ 是空间 V 上两个对称的 $(0,2)$ 型张量. 证明:若对任意的 $x \in V$ 有 $f(x,x) = \tilde{f}(x,x)$,则 $f = \tilde{f}$.

31. 设 $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}$ 是广义的 Kronecker δ- 记号. 证明:

$$\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} = \begin{vmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_r}_{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta^{i_1}_{j_r} & \cdots & \delta^{i_r}_{j_r} \end{vmatrix}.$$

32. 证明恒等式:

(1) $\dfrac{1}{r!}\delta^{k_1\cdots k_r}_{j_1\cdots j_r}\delta^{i_1\cdots i_{r+s}}_{k_1\cdots k_r j_{r+1}\cdots j_{r+s}} = \delta^{i_1\cdots i_{r+s}}_{j_1\cdots j_{r+s}}$;

(2) $\delta^{i_1\cdots i_r}_{i_1\cdots i_r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$,其中 $i_1,\cdots,i_r$ 在 1 至 n 中取值.

33. 设 $a = (a^j_i)$ 是 $n \times n$ 矩阵. 证明:

$$\det a = \frac{1}{n!}\delta^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_n} a^{j_1}_{i_1}\cdots a^{j_n}_{i_n}.$$

34. 证明: $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}(1 \leqslant i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_r \leqslant n)$ 可以作为 n 维向量空间 V 上某个 (r,r) 型张量在任意一个基底下的分量. 试问:这个张量是什么?

35. 令

$$\varepsilon_{i_1\cdots i_n} = \delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}.$$

问: $\varepsilon_{i_1\cdots i_n}(1 \leqslant i_1,\cdots,i_n \leqslant n)$ 能否作为 n 维向量空间 V 上某个 $(0,n)$ 型张量在任意一个基底下的分量?为什么?

36. 设线性变换 $f: V \to V$ 在基底 $\{\delta_i\}$ 下的矩阵是 (b^j_i). 证明:

$$\widetilde{B}_r = \delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} b^{j_1}_{i_1}\cdots b^{j_r}_{i_r}$$

是与基底 $\{\delta_i\}$ 的选取无关的不变量.

37. 设 $\{\delta^i\}$ 是 V^* 的一个基底. 证明:

$$\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r}(u_1,\cdots,u_r)=\begin{vmatrix}u_1^{i_1}&\cdots&u_1^{i_r}\\ \vdots&&\vdots\\ u_r^{i_1}&\cdots&u_r^{i_r}\end{vmatrix},\quad\forall\, u_1,\cdots,u_r\in V,$$

这里 u_α^i 表示向量 u_α 关于对偶的基底$\{\delta_i\}$的分量.

38.　在 V 中取定一个基底$\{\delta_i\}$,设$\{\delta^i\}$是在 V^* 中的对偶基底. 证明:(r,r)型张量

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}(\delta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta_{i_r})\otimes(\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r})$$

与基底$\{\delta_i\}$的取法是无关的.

39.　设 V 是 n 维向量空间,$\xi\in V^*$,$\eta\in\wedge^pV^*$. 证明:对于任意的 $u_1,\cdots,u_{p+1}\in V$ 有

$$\xi\wedge\eta(u_1,\cdots,u_{p+1})=\sum_{\alpha=1}^{p+1}(-1)^{\alpha+1}\xi(u_\alpha)\eta(u_1,\cdots,\hat{u}_\alpha,\cdots,u_{p+1}).$$

40.　设 X,Y,Z 是三个向量空间,$f:X\to Y$,$g:Y\to Z$ 是线性映射. 证明:诱导映射 $f^*:Y^*\to X^*$,$g^*:Z^*\to Y^*$ 满足下列链法则:

$$(g\circ f)^*=f^*\circ g^*:Z^*\to X^*.$$

41.　设 $\alpha^1,\cdots,\alpha^r\in V^*$,$u_1,\cdots,u_r\in V$. 证明:

$$\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^r(u_1,\cdots,u_r)=\begin{vmatrix}\alpha^1(u_1)&\cdots&\alpha^r(u_1)\\ \vdots&&\vdots\\ \alpha^1(u_r)&\cdots&\alpha^r(u_r)\end{vmatrix}.$$

42.　设$\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$是 V 中一组向量,$\{x_\alpha\}_{1\leqslant\alpha\leqslant r}$是 V 中另一组向量,并且

$$x_\alpha=\sum_{i=1}^n a_\alpha^i e_i.$$

证明:

$$x_1\wedge\cdots\wedge x_r=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}\begin{vmatrix}a_1^{i_1}&\cdots&a_1^{i_r}\\ \vdots&&\vdots\\ a_r^{i_1}&\cdots&a_r^{i_r}\end{vmatrix}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}.$$

43.　设 $\varphi\in\wedge^rV^*$,$\psi\in\wedge^sV^*$. 证明:对于任意的 $v_1,\cdots,v_{r+s}\in V$ 有

$$\varphi\wedge\psi(v_1,\cdots,v_{r+s})=\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_r\\ i_{r+1}<\cdots<i_{r+s}}}\delta_{1\cdots r+s}^{i_1\cdots i_{r+s}}\varphi(v_{i_1},\cdots,v_{i_r})\psi(v_{i_{r+1}},\cdots,v_{i_{r+s}}).$$

44.　设 $u\in V$,定义映射 $i(u):\wedge^rV^*\to\wedge^{r-1}V^*$ 如下:对于任意的 $\varphi\in\wedge^rV^*$ 及 $u_1,\cdots,u_{r-1}\in V$,

$$(i(u)\varphi)(u_1,\cdots,u_{r-1})=\varphi(u,u_1,\cdots,u_{r-1}).$$

证明:

(1) $i(u):\wedge^rV^*\to\wedge^{r-1}V^*$ 是线性映射;

(2) $i(u)(\varphi \wedge \psi) = (i(u)\varphi) \wedge \psi + (-1)^r \varphi \wedge (i(u)\psi)$,其中 $\varphi \in \wedge^r V^*$.

45. 设 $\alpha \in V^*$,定义映射 $e(\alpha): \wedge^r V^* \to \wedge^{r+1} V^*$,使得

$$e(\alpha)\varphi = \alpha \wedge \varphi, \quad \forall \varphi \in \wedge^r V^*.$$

证明:

(1) $e(\alpha): \wedge^r V^* \to \wedge^{r+1} V^*$ 是线性映射;

(2) $e(\alpha)(\varphi \wedge \psi) = (e(\alpha)\varphi) \wedge \psi = (-1)^r \varphi \wedge (e(\alpha)\psi)$,其中 $\varphi \in \wedge^r V^*$.

46. 设 $u \in V, \alpha \in V^*$. 证明:

$$i(u) \circ e(\alpha) + e(\alpha) \circ i(u)$$
$$= \alpha(u) \cdot \mathrm{id}: \wedge^r V^* \to \wedge^r V^*.$$

47. 证明:

(1) 当 $\dim V \leqslant 3$ 时,V 上每一个 r 次外形式都是可分解的;

(2) 当 $\dim V = n > 3$ 时,V 上每一个 $n-1$ 次外形式都是可分解的;

(3) 试给出一个不可分解的 r 次外形式的例子.

48. 设 α 是 n 维向量空间 V 上的 2 次外形式. 证明:在 V^* 中存在一个基底 $\{\sigma^i\}$,使得

$$\alpha = \sigma^1 \wedge \sigma^2 + \cdots + \sigma^{2r-1} \wedge \sigma^{2r},$$

其中的数 $2r$ 只与 α 有关;证明:$\alpha^r \neq 0, \alpha^{r+1} = 0$.

49. 设 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ 是 n 维欧氏向量空间. 空间 $\wedge^p V$ 的元素称为 p 向量,它们是 V 上的反对称 p 阶反变张量. 在 $\wedge^p V$ 中定义双线性形式 $\langle\ ,\ \rangle$ 如下:对于

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, \quad w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \in \wedge^p V,$$

令

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle = \det(\langle v_\alpha, w_\beta \rangle)_{1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant p};$$

并且将 $\langle\ ,\ \rangle$ 在一般的 p 向量上作双线性扩充.

(1) 证明:$\langle\ ,\ \rangle$ 是 $\wedge^p V$ 上的欧氏内积;

(2) 证明:设 $\{\delta_i\}$ 是 V 的单位正交基底,则

$$\{\delta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \delta_{i_p} : 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n\}$$

是 $\wedge^p V$ 的单位正交基底.

50. 设 $A: V \to W$ 是从向量空间 V 到 W 的线性映射. 定义映射

$$\wedge^p A: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p\text{个}} \to \wedge^p W,$$

使得

$$\wedge^p A(v_1, \cdots, v_p) = (Av_1) \wedge \cdots \wedge (Av_p), v_1, \cdots, v_p \in V.$$

(1) 证明:$\wedge^p A$ 给出了从 $\wedge^p V$ 到 $\wedge^p W$ 的线性映射;

(2) 在 V 中取基底 $\{\delta_i\}$,在 W 中取基底 $\{\sigma_\alpha\}$,设 $A(\delta_i) = a_i^\alpha \sigma_\alpha$. 求 $\wedge^p A$ 在相

应的基底下的矩阵；

(3) 设 Z,V,W 是向量空间，$B:Z\to V$，$A:V\to W$ 是线性映射. 证明：

$$\wedge^p(A\circ B)=\wedge^p A\circ\wedge^p B.$$

上式两边分别看作向量空间 $\wedge^p Z$，$\wedge^p V$，$\wedge^p W$ 之间的线性映射.

第二章　微 分 流 形

在上一章我们已经介绍了 n 维欧氏空间以及欧氏空间中曲纹坐标系的概念，如同例子所表明的那样，欧氏空间中的曲纹坐标系往往只定义在欧氏空间的一个开子集上，而不是定义在整个空间上. 但是，由于欧氏空间具有线性结构，在整个空间上存在着笛卡儿直角坐标系，这说明用一个坐标系就可以把整个欧氏空间盖住了，因此欧氏空间是最简单的空间.

在现实世界中存在更复杂的空间，例如球面. 在球面上不能建立单个的坐标系，使它适用于球面上的每一点. 我们在地球上纵然可以建立经纬线网，使得地球上的点可以用它所对应的经度和纬度来描述，然而南极和北极显然是两个例外点，北极对应于北纬 90°，但经度不确定；同样，南极对应于南纬 90°，经度也不确定. 所以经纬线网不是在数学上严格意义的适用于地球上每一点的坐标网. 事实上，倘若在球面上能建立单个的坐标系适用于球面上每一点的话，球面便能够与欧氏平面内的一个连通开集建立同胚，故球面应该和欧氏平面内的一个连通开集有相同的拓扑性质. 这自然是荒谬的结论(我们知道球面的 Euler 示性数是 2，而平面上连通开集的 Euler 示性数 $\leqslant 1$，两者是不可能同胚的).

B. Riemann 大概是第一个使用“流形”一词的人，他在 1854 年提交的著名论文“论几何学的基本假设”中，有“流形(Mannigfaltigkeit)”的提法. 无疑地，在他的脑海中流形的概念是清楚的，他把一组变量看作某个广义的空间中的点的坐标，它们允许作变换，因此坐标本身不再具有特殊的几何含义. 对流形(拓扑流形)的概念第一次作出准确的数学描述的是 D. Hilbert(参看他的《几何基础》(1902)). 后来，H. Weyl 在他的名著《黎曼面的概念》(1913) 中对微分流形作了清晰的数学描述，并把复变函数中多值函数的黎曼面与一维复流形等同起来. 在 20 世纪 30 年代，H. Whitney 致力于微分流形在欧氏空间中的嵌入问题，开始了对于微分流形的拓扑的认真研究. 直到 1957 年，J. Milnor 发现了 7 维怪球，从而证实空间的微分结构未必是由它的拓扑结构决定的. 这样，微分拓扑学成为独立于拓扑学的一个分支而出现了，它的研究对象是微分流形的结构及其不变量.

本章的目的是叙述微分流形的定义、基本概念和介绍微分流形的一些例子.

§1　微分流形的定义

假定 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏空间，点 $p \in \mathbf{R}^n$ 的第 i 个坐标记为 $(p)^i$，即 $(\ )^i$ 是 $\mathbf{R}^n$

中的第 i 个坐标函数.

定义 1.1 设 M 是一个 Hausdorff 拓扑空间,若 M 的每一点 p 都有一个开邻域 $U \subset M$,使得 U 和 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开子集是同胚的,则称 M 是一个 n 维**拓扑流形**,简称为 n 维流形.

假定在定义 1.1 中所提到的同胚是 $\varphi: U \to \varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$,其中 $\varphi(U)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集,则称 (U,φ) 为流形 M 的一个**坐标卡**,并且把象点 $\varphi(p)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标 $(\varphi(p))^i$ 称为点 $p \in U$ 的坐标,记为 $x^i(p) = (\varphi(p))^i$(严格地说,坐标 x^i 依赖于同胚 φ,因此应该记为 x^i_φ. 为了记号简单起见,我们把 x^i 看作对应于同胚 φ 的坐标系,即 $x^i(p) = (\varphi(p))^i$;对应于同胚 ψ 的坐标系则用另一个字母表示,例如 $y^i(p) = (\psi(p))^i$). 我们也称 $(U;x^i)$ 为流形 M 的一个**局部坐标系**. 显然,拓扑流形必定是局部紧致的,即在每一点 $p \in M$,必有 p 的一个邻域 V,使得 $\overline{V}$ 是紧致的.

定义 1.1 的含义是:所谓 n 维流形就是在它的每一点的一个邻域内可以建立 n 维局部坐标系的 Hausdorff 拓扑空间. 如果 (U,φ) 和 (V,ψ) 是 n 维流形 M 的两个坐标卡,且 $U \cap V \neq \varnothing$,那么 $U \cap V$ 是 M 的一个非空开集,并且在 $U \cap V$ 上有两个坐标系,它们分别是由同胚 φ,ψ 给出的. 如前所述,令

$$x^i(p) = (\varphi(p))^i, \quad y^i(p) = (\psi(p))^i, \quad \forall\, p \in U \cap V,$$

那么点 $p \in U \cap V$ 的两组坐标 $x^i(p)$ 和 $y^i(p)$ 是彼此连续依赖的. 实际上,因为

$$\varphi: U \to \varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$$

和

$$\psi: V \to \psi(V) \subset \mathbf{R}^n$$

是同胚,它们在非空开集 $U \cap V$ 上的限制

$$\varphi|_{U\cap V}: U \cap V \to \varphi(U \cap V) \subset \mathbf{R}^n,$$

$$\psi|_{U\cap V}: U \cap V \to \psi(U \cap V) \subset \mathbf{R}^n$$

也是同胚. 因此,我们有 $\mathbf{R}^n$ 中的开集 $\varphi(U \cap V)$ 到 $\psi(U \cap V)$ 的同胚(见图 5)

$$\psi|_{U\cap V} \circ (\varphi|_{U\cap V})^{-1}: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

及其逆映射

$$\varphi|_{U\cap V} \circ (\psi|_{U\cap V})^{-1}: \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V).$$

上述同胚的坐标表达式恰好是坐标 $x^i(p)$ 和 $y^i(p)$ 之间的关系式,记成:

$$\begin{aligned} y^i(p) &= (\psi(p))^i = (\psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)))^i \\ &\equiv f^i(x^1(p),\cdots,x^n(p)), \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} x^i(p) &= (\varphi(p))^i = (\varphi \circ \psi^{-1}(\psi(p)))^i \\ &\equiv g^i(y^1(p),\cdots,y^n(p)), \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $p \in U \cap V$. 因此,$y^i = f^i(x^1,\cdots,x^n)$,$x^i = g^i(y^1,\cdots,y^n)$ 都是连续函数,

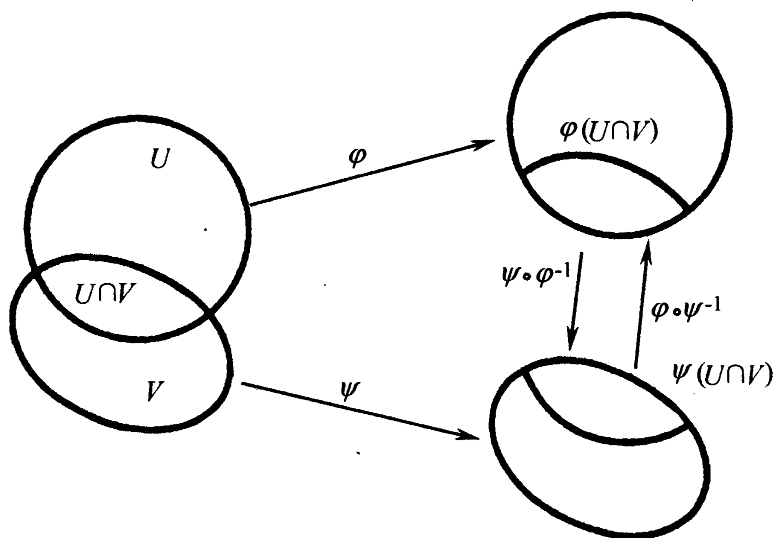


图　5

并且它们互为反函数，即有恒等式

$$y^i = f^i(g^1(y^1,\cdots,y^n),\cdots,g^n(y^1,\cdots,y^n)), \tag{1.3}$$

$$x^i = g^i(f^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots,f^n(x^1,\cdots,x^n)). \tag{1.4}$$

由此可见，在拓扑流形上局部坐标系之间的变换必定是连续的.

由于 $y^i = f^i(x^1,\cdots,x^n)$，$x^i = g^i(y^1,\cdots,y^n)$ 都是欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的开集上的函数，因此它们的可微性是可以定义的. 坐标变换

$$\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V)$$

和

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$$

的可微性就定义为函数 $f^i(x^1,\cdots,x^n)$ 和 $g^i(y^1,\cdots,y^n)$ 的可微性. 特别是，如果 $f^i(x^1,\cdots,x^n)$，$g^i(y^1,\cdots,y^n)$ 有连续的 r 次偏导数，则称 $\psi\circ\varphi^{-1}$，$\varphi\circ\psi^{-1}$ 是 C^r 的. 如果 $f^i(x^1,\cdots,x^n)$，$g^i(y^1,\cdots,y^n)$ 有连续的任意次偏导数，则称 $\psi\circ\varphi^{-1}$，$\varphi\circ\psi^{-1}$ 是光滑的，或称它们是 C^∞ 的. 若 $f^i(x^1,\cdots,x^n)$，$g^i(y^1,\cdots,y^n)$ 在每一点的邻域内都能展开成收敛的幂级数，则称 $\psi\circ\varphi^{-1}$，$\varphi\circ\psi^{-1}$ 是解析的，或称它们是 C^ω 的.

定义 1.2　设 M 是一个 n 维拓扑流形，(U,φ) 和 (V,ψ) 是它的两个坐标卡. 若当 $U\cap V\neq\varnothing$ 时，$\psi\circ\varphi^{-1}$，$\varphi\circ\psi^{-1}$ 都是 C^r 的（其中 r 是正整数，或 ∞，或 ω），则称坐标卡 (U,φ) 和 (V,ψ) 是 C^r **相关的**.

当 $U\cap V=\varnothing$ 时，我们总是认为 (U,φ) 和 (V,ψ) 对于任意的 r 是 C^r 相关的.

定义 1.3　设 M 是 n 维拓扑流形，假定 $\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in I\}$ 是 M 的坐标卡的一个集合，并且满足以下条件：

(1) $\{U_\alpha:\alpha\in I\}$ 构成流形 M 的一个开覆盖；

(2) 属于 $\mathscr{A}$ 的任意两个坐标卡都是 C^r 相关的；

(3)$\mathscr{A}$是C^r极大的,即:如果(U,φ)是M的一个坐标卡,且(U,φ)与$\mathscr{A}$中的每一个成员都是C^r相关的,则(U,φ)必属于$\mathscr{A}$.

此时我们称坐标卡集$\mathscr{A}$为流形M上的一个C^r**微分结构**;当$r=\infty$时,$\mathscr{A}$称为M上的一个**光滑结构**;当$r=\omega$时,$\mathscr{A}$称为M上的一个**解析结构**.

由定义可知,当$r=0$时,$\mathscr{A}$恰好是流形M上全体坐标卡的集合.一般说来,当$r\geqslant 1$时,M上的C^r微分结构$\mathscr{A}$只是M上的坐标卡集合的一个子集.

在定义1.3中,条件(1),(2)是本质的.我们有下面的命题.

命题 1.1 设$\mathscr{A}_0$是M上满足定义1.3中的条件(1),(2)的一个坐标卡集,则在M上存在唯一的一个C^r微分结构$\mathscr{A}\supset\mathscr{A}_0$.

证明 设$\mathscr{A}$是与$\mathscr{A}_0$中每个成员都是C^r相关的坐标卡的集合,则$\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A}$,因此定义1.3中的条件(1),(3)对于坐标卡的集合$\mathscr{A}$显然是成立的.至于条件(2),只要证明:若(U,φ),(V,ψ)是M的两个坐标卡,它们与$\mathscr{A}_0$中每个成员都是C^r相关的,则它们彼此必定是C^r相关的.该断言的证明留给读者作为习题.

假定$\mathscr{A}_1$是另一个包含$\mathscr{A}_0$在内的C^r微分结构,则$\mathscr{A}_1$的成员与$\mathscr{A}_0$的每一个成员都是C^r相关的,由$\mathscr{A}$的定义可知$\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}$.设$(U,\varphi)\in\mathscr{A}$,由于$\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}$,故$(U,\varphi)$与$\mathscr{A}_1$的每个成员都是$C^r$相关的;根据$C^r$微分结构$\mathscr{A}_1$的$C^r$极大性,得知$(U,\varphi)\in\mathscr{A}_1$,即$\mathscr{A}\subset\mathscr{A}_1$,因此$\mathscr{A}=\mathscr{A}_1$.

命题1.1指出了在流形M上给定C^r微分结构的方法,即:只要在M上指定一组坐标卡$\{(U_i,\varphi_i):i\in I\}$,使得$\{U_i\}$构成$M$的开覆盖,并且这些坐标卡彼此是$C^r$相关的,则在$M$上就唯一地确定了包含$\{(U_i,\varphi_i):i\in I\}$在内的$C^r$微分结构.

定义 1.4 设M是一个n维拓扑流形,若在M上指定了一个C^r微分结构$\mathscr{A}$,则称$(M,\mathscr{A})$为一个n维C^r**微分流形**.属于$\mathscr{A}$的坐标卡(U,φ)称为该微分流形的**容许坐标卡**.

当$r=\infty$时,称$(M,\mathscr{A})$为**光滑流形**;当$r=\omega$时,称$(M,\mathscr{A})$为**解析流形**.

我们以后也常常简单地称M为一个n维C^r微分流形,此时认为在M上已经取定了一个C^r微分结构,并且把M的容许坐标卡简称为微分流形M的坐标卡,相应的容许局部坐标系就简称为微分流形的局部坐标系.

例 1 n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$.

取$U=\mathbf{R}^n$,$\varphi:U\to\mathbf{R}^n$是恒同映射,则$\mathbf{R}^n$上由$\{(U,\varphi)\}$生成的光滑结构称为$\mathbf{R}^n$的标准光滑结构.$\mathbf{R}^n$关于标准光滑结构成为n维光滑流形.在第一章§3所定义的曲纹坐标系恰好是属于标准光滑结构的局部坐标系.

例 2 在$\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$上可以构造不同的光滑结构.

设坐标卡(U,φ)如例 1 所示，此时假定$n = 1$，所生成的光滑结构记为$\mathscr{A}_1$.

另取$V = \mathbf{R}$，定义同胚$\psi: V \to \mathbf{R}$为

$$\psi(x) = x^3, \quad \forall\, x \in V,$$

则$\{(V,\psi)\}$在$\mathbf{R}$上决定了另一个光滑结构$\mathscr{A}_2$.

很明显，$\mathscr{A}_1$和$\mathscr{A}_2$是两个不同的光滑结构. 实际上，坐标卡(U,φ)与(V,ψ)不是C^∞相关的，因为坐标变换$\varphi\circ\psi^{-1}: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$的表达式是

$$x = \sqrt[3]{y},$$

它在$y = 0$处不是连续可微的.

例 3　n维球面$S^n = \{x : x \in \mathbf{R}^{n+1}，且\ |x| = 1\}$.

由于$\mathbf{R}^{n+1}$是 Hausdorff 拓扑空间，故S^n作为$\mathbf{R}^{n+1}$的拓扑子空间也是 Hausdorff 的 .

对每一个$\alpha, 1 \leqslant \alpha \leqslant n+1$，令

$$U_\alpha^+ = \{(x^1,\cdots,x^{n+1}) \in S^n : x^\alpha > 0\}, \tag{1.5}$$

$$U_\alpha^- = \{(x^1,\cdots,x^{n+1}) \in S^n : x^\alpha < 0\}. \tag{1.6}$$

注意到，U_α^+, U_α^-分别是球面S^n与半空间

$$\{(x^1,\cdots,x^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : x^\alpha > 0\}$$

和

$$\{(x^1,\cdots,x^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : x^\alpha < 0\}$$

的交，故它们是S^n的开集，并且

$$S^n = \bigcup_{\alpha=1}^{n+1}(U_\alpha^+ \cup U_\alpha^-).$$

定义映射$\varphi_\alpha^+ : U_\alpha^+ \to \mathbf{R}^n$，使得

$$\varphi_\alpha^+(x^1,\cdots,x^{n+1}) = (x^1,\cdots,\hat{x}^\alpha,\cdots,x^{n+1}), \tag{1.7}$$

其中$\hat{x}^\alpha$表示把分量x^α去掉；同样，定义映射$\varphi_\alpha^- : U_\alpha^- \to \mathbf{R}^n$，使得

$$\varphi_\alpha^-(x^1,\cdots,x^{n+1}) = (x^1,\cdots,\hat{x}^\alpha,\cdots,x^{n+1}). \tag{1.8}$$

这样，$\varphi_\alpha^+(U_\alpha^+)$和$\varphi_\alpha^-(U_\alpha^-)$都是$\mathbf{R}^n$中的单位圆盘，并且$(U_\alpha^+,\varphi_\alpha^+)$，$(U_\alpha^-,\varphi_\alpha^-)$都是球面$S^n$的坐标卡. 映射$\varphi_\alpha^+,\varphi_\alpha^-$的几何意义是将半球面$U_\alpha^+,U_\alpha^-$沿$x^\alpha$-轴投影到平面$x^\alpha = 0$.

当$\alpha \neq \beta$时，$U_\alpha^+ \cap U_\beta^+, U_\alpha^+ \cap U_\beta^-, U_\alpha^- \cap U_\beta^-$均为非空开集. 以$U_\alpha^+ \cap U_\beta^-$为例，我们把坐标变换

$$\varphi_\alpha^+ \circ (\varphi_\beta^-)^{-1} : \varphi_\beta^-(U_\alpha^+ \cap U_\beta^-) \to \varphi_\alpha^+(U_\alpha^+ \cap U_\beta^-)$$

和

$$\varphi_\beta^- \circ (\varphi_\alpha^+)^{-1} : \varphi_\alpha^+(U_\alpha^+ \cap U_\beta^-) \to \varphi_\beta^-(U_\alpha^+ \cap U_\beta^-)$$

具体地写出来，其余的坐标变换公式留给读者自己去写.

不妨设 $\alpha<\beta$，则对于 $(x^1,\cdots,x^{n+1})\in U_\alpha^+\cap U_\beta^-$ 有 $\sum_{\gamma=1}^{n+1}(x^\gamma)^2=1$，且 $x^\alpha>0,x^\beta<0$，于是

$$\begin{aligned}&\varphi_\alpha^+\circ(\varphi_\beta^-)^{-1}(x^1,\cdots,\hat{x}^\beta,\cdots,x^{n+1})\\&=\left(x^1,\cdots,\hat{x}^\alpha,\cdots,x^{\beta-1},-\sqrt{1-\sum_{\gamma\neq\beta}(x^\gamma)^2},x^{\beta+1},\cdots,x^{n+1}\right),\end{aligned}\tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}&\varphi_\beta^-\circ(\varphi_\alpha^+)^{-1}(x^1,\cdots,\hat{x}^\alpha,\cdots,x^{n+1})\\&=\left(x^1,\cdots,x^{\alpha-1},\sqrt{1-\sum_{\gamma\neq\alpha}(x^\gamma)^2},x^{\alpha+1},\cdots,\hat{x}^\beta,\cdots,x^{n+1}\right).\end{aligned}\tag{1.10}$$

很明显，$\varphi_\alpha^+\circ(\varphi_\beta^-)^{-1}$ 和 $\varphi_\beta^-\circ(\varphi_\alpha^+)^{-1}$ 分别是 $(x^1,\cdots,\hat{x}^\beta,\cdots,x^{n+1})$ 和 $(x^1,\cdots,\hat{x}^\alpha,\cdots,x^{n+1})$ 的光滑函数，因此 $(U_\alpha^+,\varphi_\alpha^+)$ 和 $(U_\beta^-,\varphi_\beta^-)$ 是 C^∞ 相关的. 同样道理，其余的坐标卡彼此都是 C^∞ 相关的，所以

$$\{(U_\alpha^+,\varphi_\alpha^+),(U_\alpha^-,\varphi_\alpha^-):1\leqslant\alpha\leqslant n+1\}$$

在 S^n 上决定了一个光滑结构，使 S^n 成为一个 n 维光滑流形.

例 4　实射影空间 RP^n.

实射影空间 RP^n 是指 $n+1$ 维向量空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中全体一维线性子空间组成的集合. 更形式地，在 $\mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ 中定义一个等价关系：设 $u,v\in\mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\}$，则 u 与 v 等价（记成 $u\sim v$）当且仅当存在非零实数 λ，使得 $u=\lambda v$. 也就是说，把共线的两个非零向量称为等价的. 很明显，RP^n 恰好是 $\mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ 在上述等价关系 $\sim$ 下的等价类的集合，$RP^n=\mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim$.

用 $\pi:\mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\}\to RP^n$ 表示典型投影，记 $\pi(v)=[v]$ 为非零向量 v 所张的一维线性子空间，即 v 所在的 $\sim$ 等价类. 在 RP^n 中取商拓扑，即 U 是 RP^n 中的开子集当且仅当完全逆象 $\pi^{-1}(U)$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ 中的开子集.

注意到任意一个一维子空间与单位球面 S^n 有两个交点，所以实射影空间 RP^n 可以看成单位球面 $S^n\subset\mathbf{R}^{n+1}$ 在对径点等同下的结果. 无论采取哪一种看法，都能明显地看出 RP^n 是 Hausdorff 拓扑空间（参看 §5,1°）.

设

$$U_\alpha=\{[(x^1,\cdots,x^{n+1})]:(x^1,\cdots,x^{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1},x^\alpha\neq0\},\tag{1.11}$$

则

$$\pi^{-1}(U_\alpha)=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1},x^\alpha\neq0\},$$

故 U_α 是 RP^n 的开子集，并且 $\{U_\alpha:1\leqslant\alpha\leqslant n+1\}$ 构成 RP^n 的开覆盖.

定义映射 $\psi_\alpha:U_\alpha\to\mathbf{R}^n$，使得

$$\psi_\alpha([(x^1,\cdots,x^{n+1})])=\left(\frac{x^1}{x^\alpha},\cdots,\frac{x^{\alpha-1}}{x^\alpha},\frac{x^{\alpha+1}}{x^\alpha},\cdots,\frac{x^{n+1}}{x^\alpha}\right).\tag{1.12}$$

显然 ψ_α 是 1－1 的，因为 ψ_α 有逆映射

$$\psi_\alpha^{-1}(y^1,\cdots,y^n)=[(y^1,\cdots,y^{\alpha-1},1,y^\alpha,\cdots,y^n)].$$

实际上,ψ_α 的几何意义是将 U_α 的元素(即 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中经过原点的一条直线)对应于它和平面 $x^\alpha=1$ 的交点,所以从直观上容易看出 ψ_α 和它的逆映射 ψ_α^{-1} 是连续的,故 $\psi_\alpha:U_\alpha\to\mathbf{R}^n$ 是同胚.严格的证明留给读者作为练习.

将坐标卡(U_α,ψ_α)的局部坐标系记作${}_\alpha\xi^\gamma=\dfrac{x^\gamma}{x^\alpha}$,则坐标变换

$$\psi_\alpha\circ\psi_\beta^{-1}:\psi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\psi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$$

的表达式是

$$\begin{cases}{}_\alpha\xi^\gamma=\dfrac{{}_\beta\xi^\gamma}{{}_\beta\xi^\alpha}, & \gamma\neq\alpha,\beta,\\ {}_\alpha\xi^\beta=\dfrac{1}{{}_\beta\xi^\alpha}.\end{cases}\tag{1.13}$$

因此(U_α,ψ_α)与(U_β,ψ_β)是 C^∞ 相关的.坐标卡集$\{(U_\alpha,\psi_\alpha):1\leqslant\alpha\leqslant n+1\}$决定了 RP^n 上的光滑结构,使 RP^n 成为 n 维光滑流形.

例 5 积流形.

设 M,N 分别是 m 维和 n 维光滑流形,它们的光滑结构分别是

$$\mathscr{A}_1=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in I_1\}\quad 和\quad \mathscr{A}_2=\{(V_i,\psi_i):i\in I_2\},$$

那么,$\{U_\alpha\times V_i:\alpha\in I_1,i\in I_2\}$ 是拓扑积 $M\times N$ 的一个开覆盖.对每一对指标

$$(\alpha,i)\in I_1\times I_2,$$

定义映射 $\varphi_\alpha\times\psi_i:U_\alpha\times V_i\to\mathbf{R}^{m+n}$ 如下:

$$(\varphi_\alpha\times\psi_i)(x,y)=(\varphi_\alpha(x),\psi_i(y)),\quad\forall\ (x,y)\in U_\alpha\times V_i.\tag{1.14}$$

很明显,$\varphi_\alpha\times\psi_i$ 是从 $U_\alpha\times V_i$ 到 $\varphi_\alpha(U_\alpha)\times\psi_i(V_i)$ 的同胚.由于当

$$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing,\quad V_i\cap V_j\neq\varnothing$$

时有

$$(\varphi_\alpha\times\psi_i)\circ(\varphi_\beta\times\psi_j)^{-1}=(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})\times(\psi_i\circ\psi_j^{-1}),$$

故$(U_\alpha\times V_i,\varphi_\alpha\times\psi_i)$与$(U_\beta\times V_j,\varphi_\beta\times\psi_j)$是 C^∞ 相关的.这样,

$$\{(U_\alpha\times V_i,\varphi_\alpha\times\psi_i):\alpha\in I_1,i\in I_2\}$$

在 $M\times N$ 上决定了一个 $m+n$ 维光滑结构,使 $M\times N$ 成为 $m+n$ 维光滑流形,称为 M 和 N 的**积流形**.

例 6 r 维环面 T^r.

1 维单位球面 S^1 有例 3 给出的光滑结构,成为 1 维光滑流形.所谓 r 维环面就是 r 个 S^1 的积流形 $T^r=S^1\times\cdots\times S^1$($r$ 个).

r 维环面 T^r 还有另一种构造的方法.在 $\mathbf{R}^r$ 中定义如下的关系:设

$$(x^1,\cdots,x^r),\quad(y^1,\cdots,y^r)\in\mathbf{R}^r,$$

则$(x^1,\cdots,x^r)\sim(y^1,\cdots,y^r)$当且仅当$y^i\equiv x^i \bmod 1, 1\leqslant i\leqslant r$. 显然，$\sim$是一个等价关系，环面$T^r$恰好是$\mathbf{R}^r$关于等价关系$\sim$的商空间$\mathbf{R}^r/\sim$. 关于这种构造方法的详细情形参看 §5, 2°.

例 7 开子流形.

设M是m维光滑流形，光滑结构为$\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in I\}$. 设$V$是$M$的一个开子集，令

$$V_\alpha=U_\alpha\cap V,$$

则$\{V_\alpha:\alpha\in I\}$构成拓扑空间V(具有从M诱导的拓扑)的开覆盖. 令

$$\psi_\alpha=\varphi_\alpha|_{V_\alpha}:V_\alpha\to\mathbf{R}^m,$$

则ψ_α是从V_α到$\psi_\alpha(V_\alpha)=\varphi_\alpha(V_\alpha)\subset\mathbf{R}^m$的同胚. 当

$$V_\alpha\cap V_\beta=U_\alpha\cap U_\beta\cap V\neq\varnothing$$

时，坐标变换为

$$\psi_\alpha\circ\psi_\beta^{-1}=\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}|_{\varphi_\beta(V_\alpha\cap V_\beta)},$$

故它们是C^∞映射. 所以$\{(V_\alpha,\psi_\alpha):\alpha\in I\}$决定了$V$的一个光滑结构，使$V$成为$m$维光滑流形，称为$M$的一个**开子流形**.

例1，例3，例4，例5中的微分流形实际上都是解析流形. 在 §5 将给出的许多例子也是解析流形. 由于在本书范围内所叙述的结果不涉及流形的解析性，所以我们只谈论流形的光滑结构，尽管它们也可能有解析结构. 关于微分流形的更多的例子将在 §5 中介绍.

§2 光滑映射

设M是m维光滑流形. 在流形M上首先能够引进的概念是光滑流形M上的光滑函数.

假定$f:M\to\mathbf{R}$是定义在流形M上的连续函数，对于光滑流形M的任意一个容许坐标卡(U,φ)，$f\circ\varphi^{-1}$成为定义在欧氏空间$\mathbf{R}^m$的开子集$\varphi(U)$上的连续函数，因而该函数的连续可微性是可以定义的. 我们就利用$f\circ\varphi^{-1}$的连续可微性来定义函数f的连续可微性.

定义 2.1 设$f:M\to\mathbf{R}$是定义在光滑流形M上的连续函数. 若在点$x\in M$，存在M的一个容许坐标卡(U,φ)，使得$x\in U$，且$f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\mathbf{R}$是在点$\varphi(x)$处光滑的函数，则称函数$f$**在点$x$处是光滑的**.

需要指出的是，函数f在点x处的光滑性与容许坐标卡(U,φ)的选择无关. 若有另一个容许坐标卡(V,ψ)，使得$x\in V$，则$U\cap V$是M的非空开子集. 映射$f\circ\psi^{-1}$在开集$\psi(U\cap V)\subset\mathbf{R}^m$上的限制可以表示为

$$(f\circ\psi^{-1})|_{\psi(U\cap V)}=(f\circ\varphi^{-1})|_{\varphi(U\cap V)}\circ(\varphi\circ\psi^{-1})|_{\psi(U\cap V)}.$$

由于坐标卡(U,φ)和(V,ψ)的C^∞相关性，映射

$$(\varphi\circ\psi^{-1})|_{\psi(U\cap V)}:\psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V)$$

是光滑的．根据复合函数求导的链法则，函数$f\circ\psi^{-1}$在点$\psi(x)$的邻域内是光滑的当且仅当函数$f\circ\varphi^{-1}$在点$\varphi(x)$的邻域内是光滑的．

定义 2.2　设$f:M\to\mathbf{R}$是定义在光滑流形M上的连续函数．若f在每一点$x\in M$都是光滑的，则称f是流形M上的**光滑函数**．

光滑流形M上全体光滑函数的集合记作$C^\infty(M)$．函数的加法和乘法在$C^\infty(M)$中是封闭的，因此$C^\infty(M)$在代数上是一个环．

我们把定义在点$x\in M$的邻域内且在点x处光滑的函数的集合记作C_x^∞．属于C_x^∞的两个函数可能有不同的定义域．因此我们约定：若$f,g\in C_x^\infty$，则$f+g$，$f\cdot g$看作在f和g的定义域之交上有定义的函数．显然，仍旧有$f+g$，$f\cdot g\in C_x^\infty$．注意到C_x^∞关于加法不构成群（因为在上述加法运算下，一个元素的逆元素无法确切地定义），因而更不是一个环，但是C_x^∞关于上面所约定的运算有交换律和分配律．

流形的实质就是在局部上可坐标化的拓扑空间．我们的研究对象定义在整个空间上，而着眼点却是局部坐标域．因此，把在局部上定义的对象扩展成全局定义的对象是十分重要的步骤．主要工具之一是下面的引理所叙述的“截断函数”．

引理 2.1　设$B(r_1)$，$B(r_2)$是$\mathbf{R}^n$中以原点为中心的两个同心球，且$r_1<r_2$，则有函数$F\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，使得

$$F|_{B(r_1)}\equiv 1,\quad F|_{\mathbf{R}^n\setminus B(r_2)}\equiv 0.$$

证明　首先定义函数$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{(x-r_1^2)(x-r_2^2)}}, & r_1^2<x<r_2^2,\\ 0, & x\leqslant r_1^2\text{ 或 }x\geqslant r_2^2.\end{cases}\tag{2.1}$$

由于g的各阶导数当$x\to r_1^2+0$及$x\to r_2^2-0$时的极限皆为零，故g是$\mathbf{R}$上的光滑函数，且它在区间(r_1^2,r_2^2)内取正值，在该区间外的值为零（参看图 6）．

其次，令

$$G(x)=\frac{\displaystyle\int_x^\infty g(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{-\infty}^\infty g(x)\mathrm{d}x},\tag{2.2}$$

则G仍然是$\mathbf{R}$上的光滑函数，并且

$$G(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant r_1^2,\\ 0, & x\geqslant r_2^2.\end{cases}$$

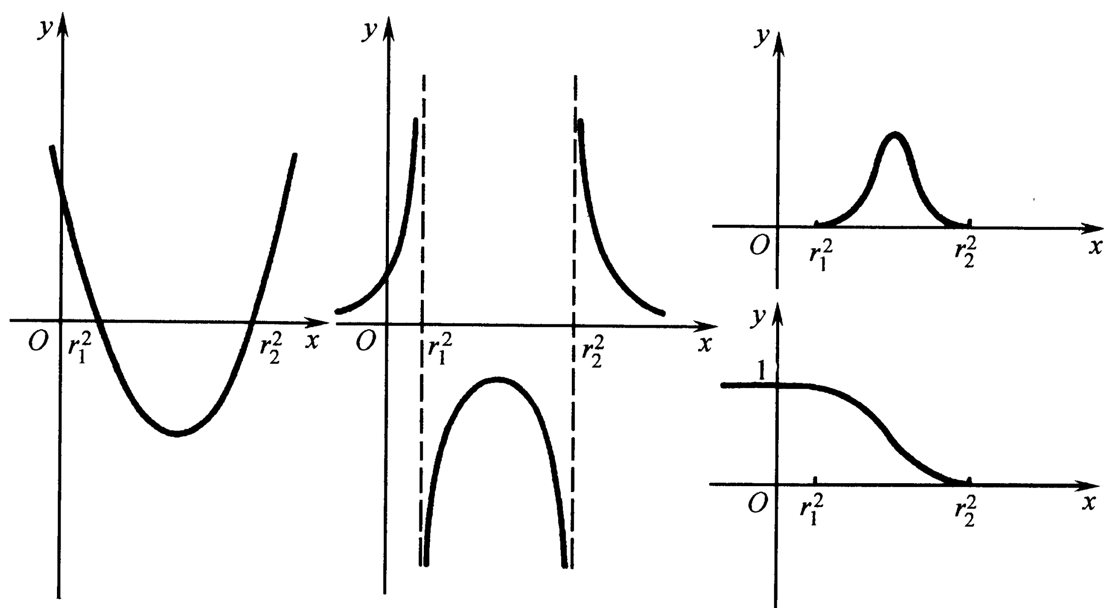


图 6

为得到引理所要求的函数，只要取

$$F(x^1,\cdots,x^n)=G((x^1)^2+\cdots+(x^n)^2) \tag{2.3}$$

就行了.

引理 2.2 设U,V是光滑流形M的两个开子集，$\overline{U}$是紧致的，并且$\overline{U}\cap\overline{V}=\varnothing$，则存在光滑函数$f\in C^\infty(M)$，使得$f|_U\equiv 1, f|_V\equiv 0$.

证明 由于$\overline{U}\cap\overline{V}=\varnothing$，故$\overline{U}\subset M\backslash\overline{V}$. 对于任意一点$p\in\overline{U}$，必有开邻域$U_p,W_p$，使得

$$p\in U_p\subset\overline{U}_p\subset W_p\subset\overline{W}_p\subset Z_p\subset M\backslash\overline{V},$$

其中Z_p是点p的一个坐标邻域，其坐标映射为φ_p. 不妨假定$\varphi_p(U_p)$和$\varphi_p(W_p)$是$\mathbf{R}^n$中以原点为中心的两个同心球域. 根据引理 2.1，存在函数$F_p\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，使得

$$F_p|_{\varphi_p(U_p)}\equiv 1, \qquad F_p|_{\mathbf{R}^n\backslash\varphi_p(W_p)}\equiv 0.$$

令

$$f_p(x)=\begin{cases}F_p(\varphi_p(x)), & \forall x\in Z_p,\\ 0, & \forall x\notin Z_p,\end{cases} \tag{2.4}$$

则容易验证$f_p\in C^\infty(M)$，且$f_p|_{U_p}\equiv 1, f_p|_{M\backslash W_p}\equiv 0$.

由于$\overline{U}$是紧致的，在开覆盖$\{U_p:p\in\overline{U}\}$中必存在有限子覆盖，记作$\{U_\alpha:1\leqslant\alpha\leqslant r\}$，它们所对应的光滑函数族记为$\{f_\alpha:1\leqslant\alpha\leqslant r\}$. 令

$$f=1-(1-f_1)\cdot\cdots\cdot(1-f_r), \tag{2.5}$$

那么$f\in C^\infty(M)$；并且当$x\in U$时，必有某个指标α，使得$x\in U_\alpha$，于是$f_\alpha(x)$

$= 1, f(x) = 1$；当 $x \in V$ 时，$x \notin W_a, \forall\, a$，故 $f_a(x) = 0, \forall\, a$，因此 $f(x) = 0$.
证毕.

利用引理 2.2，在点 x 处光滑的函数很容易扩充成定义在整个光滑流形 M 上的光滑函数.

定理 2.3　设 U 是光滑流形 M 的一个开子集，$f \in C^\infty(U)$，则在任意一点 $p \in U$，必有点 p 的一个邻域 $V \subset U$，以及光滑函数 $\tilde{f} \in C^\infty(M)$，使得

$$\tilde{f}\,|_V = f|_V.$$

证明　利用流形的局部紧致性，可以取到点 p 的邻域 V, W，使得 $\overline{V}$ 是紧致的，并且

$$p \in V \subset \overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset U,$$

因此

$$\overline{V} \cap (M \backslash W) \subset W \cap (M \backslash W) = \varnothing.$$

由引理 2.2，存在光滑函数 $g \in C^\infty(M)$，使得

$$g|_V \equiv 1, \qquad g|_{M \backslash W} \equiv 0.$$

令

$$\tilde{f}\,(x) = \begin{cases} f(x) \cdot g(x), & \forall\, x \in U, \\ 0, & \forall\, x \notin U. \end{cases} \tag{2.6}$$

由于 M 是开集 U 与 $M \backslash \overline{W}$ 的并集，而 $\tilde{f}\,|_U$ 是两个光滑函数 f 和 g 的乘积，故 $\tilde{f}\,|_U$ 是光滑的；又 $\tilde{f}\,|_{M \backslash \overline{W}} \equiv 0$，故 $\tilde{f}\,|_{M \backslash \overline{W}}$ 也是光滑的，因此 $\tilde{f}$ 是光滑流形 M 上的光滑函数. 当 $x \in V$ 时，$g(x) = 1$，故

$$\tilde{f}\,(x) = f(x).$$

引理 2.2 的另一个重要应用是证明光滑流形上的单位分解定理，而单位分解定理是在光滑流形上将各个局部构造拼接成全局构造的工具，我们先引进几个概念.

定义 2.3　设 $f: M \to \mathbf{R}$ 是流形 M 上的连续函数，所谓 f 的**支撑集**是指 f 取非零值的点的集合的闭包，记作 $\mathrm{Supp} f$，即

$$\mathrm{Supp} f = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}.$$

支撑集 $\mathrm{Supp} f$ 的补集是 M 中使 $f = 0$ 的最大的开子集.

定义 2.4　设 Σ_0 是 M 的子集的一个集合. 如果 M 中每一点都有一个邻域，它仅与 Σ_0 中有限多个成员相交，则称子集族 Σ_0 是**局部有限**的.

有限的子集族自然是局部有限的，但是局部有限的子集族所包含的成员的个数未必是有限的. 很明显，对于 M 的局部有限子集族 Σ_0 而言，M 的每一个紧致子集至多与 Σ_0 中有限多个成员相交.

定义 2.5　设 Σ_1, Σ_2 是 M 的两个开覆盖. 如果对于 Σ_1 中任意一个成员 U，

必能在 Σ_2 中找到一个成员 V，使得 $U \subset V$，则称 Σ_1 是开覆盖 Σ_2 的**加细**.

下面一系列拓扑学引理是证明单位分解定理的准备工作.

引理 2.4　设 M 是满足第二可数公理的拓扑空间，则 M 的任意一个开覆盖必定含有一个可数的子覆盖.

证明　因为 M 满足第二可数公理，故 M 有一个拓扑基含有可数多个成员，设为 $\{V_n\}_{1\leqslant n\leqslant\infty}$. 假定 $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 M 的任意一个开覆盖.

根据拓扑基的定义，每一个开集 U_α 必是某些 V_n 的并集，把拓扑基 $\{V_n\}$ 中凡能包含于某个 U_α 中的成员的集合记为 $\{V_{n_i}\}$，它至多是一个可数集. 由于每一个开集 U_α 是某些 V_{n_i} 的并集，故 $\{V_{n_i}\}$ 是 M 的一个开覆盖.

把开覆盖 $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ 中包含 V_{n_i} 在内的开集记为 U_i，于是 $\{U_i\}_{1\leqslant i<\infty}$ 是 M 的开覆盖，并且它是开覆盖 $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ 的可数的子覆盖.

引理 2.5　设 M 是局部紧致的、满足第二可数公理的拓扑空间，则存在可数多个紧致子集 $\{K_n\}$，使得 $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$（$K_{n+1}$ 的内部），并且它们构成 M 的覆盖，即 $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

证明　所谓 M 是局部紧致的意思是：每一点 $p \in M$ 有一个邻域 U_p，使得它的闭包 $\overline{U}_p$ 是紧致的. 这样，$\{U_p : p \in M\}$ 自然是 M 的一个开覆盖.

由于 M 满足第二可数公理，引理 2.4 断言开覆盖 $\{U_p : p \in M\}$ 必包含一个可数的子覆盖，设为 $\{U_i : 1 \leqslant i < \infty\}$. 根据假定，每个 $\overline{U}_i$ 是紧致的.

现在用归纳法构造所求的紧致子集 K_n，令 $K_1 = \overline{U}_1$. 假定已经作出紧致子集 $K_1, \cdots, K_r$，使得

$$K_i \subset \mathring{K}_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r-1,$$

并且

$$U_i \subset \overline{U}_i \subset K_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

令

$$K'_{r+1} = K_r \cup \overline{U}_{r+1},$$

K'_{r+1} 是紧致子集，故在 $\{U_i\}$ 中有有限多个成员 $U_1, \cdots, U_{m_{r+1}}$ 覆盖了 K'_{r+1}，即

$$K'_{r+1} \subset \bigcup_{i=1}^{m_{r+1}} U_i,$$

取

$$K_{r+1} = \bigcup_{i=1}^{m_{r+1}} \overline{U}_i,$$

则 K_{r+1} 是紧致的，并且

$$K_r \subset K'_{r+1} \subset \mathring{K}_{r+1}, \quad U_{r+1} \subset \overline{U}_{r+1} \subset K_{r+1}.$$

由于 $\{U_i\}$ 是 M 的覆盖，故有 $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$.

引理 2.6　设 M 是局部紧致的、满足第二可数公理的拓扑空间，则 M 的任意一个开覆盖 $\Sigma = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ 必定有一个可数的、局部有限的加细开覆盖.

证明 因为M是局部紧致的、满足第二可数公理的拓扑空间，由引理2.5，存在可数多个紧致子集$\{K_i\}$，使得$K_i \subset \mathring{K}_{i+1}$，并且$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. 令

$$W_i = \mathring{K}_{i+1} - K_{i-2},\ E_i = K_i - \mathring{K}_{i-1},\ i = 1, 2, \cdots,$$

其中规定$K_{-1} = K_0 = \varnothing$. 这样，$W_i$是开集，$E_i$是包含在紧致子集$K_i$内的闭集，故$E_i$也是紧致子集(见图7).

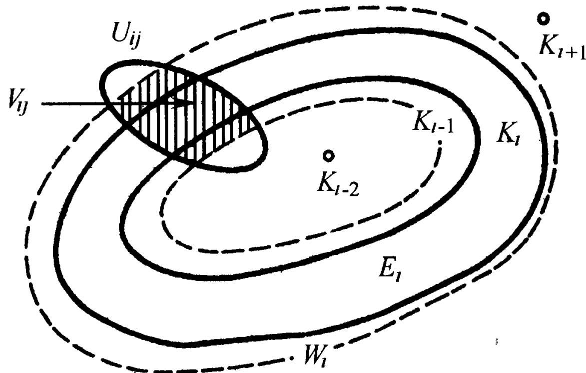


图 7

现在$\Sigma = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$是$M$的一个开覆盖，故有有限多个成员$U_{i1}, \cdots, U_{im_i}$覆盖了$E_i$，令

$$V_{ij} = U_{ij} \cap W_i, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m_i,$$

则$\{V_{ij} : 1 \leqslant j \leqslant m_i\}$是$E_i$的开覆盖. 由于

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = M,$$

所以
$$\Sigma_0 = \{V_{ij} : 1 \leqslant i < \infty, \quad 1 \leqslant j \leqslant m_i\}$$
是M的一个可数开覆盖，并且它是Σ的加细开覆盖.

下面要证Σ_0是局部有限的. 设$p \in M$，U是点p的一个邻域，使得$A = \overline{U}$是M的一个紧致子集，则在Σ_0中有有限多个成员构成A的开覆盖. 假设在这有限多个成员中出现指标i的最大者为s，则$V_{ij} \subset \mathring{K}_{i+1} \subset \mathring{K}_{s+1}$(当$i \leqslant s$时)，故$A \subset \mathring{K}_{s+1}$. 注意到当$t \geqslant s+3$时，$V_{tj}(1 \leqslant j \leqslant m_t)$与$\mathring{K}_{s+1}$不相交，因此与$U$相交的开子集至多是$V_{ij}(1 \leqslant i \leqslant s+2, 1 \leqslant j \leqslant m_i)$，即$\Sigma_0$是局部有限的.

定理 2.7(单位分解定理) 设M是满足第二可数公理的n维光滑流形，$\Sigma = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$是$M$的任意一个开覆盖，则$\Sigma$必有一个可数的、局部有限的加细开覆盖$\Sigma_0 = \{V_i : 1 \leqslant i < \infty\}$，以及定义在$M$上的一族光滑函数$\{f_i \in C^\infty(M) : 1 \leqslant i \leqslant \infty\}$，使得$0 \leqslant f_i \leqslant 1$，Supp f_i是包含在V_i内的紧致子集，并且$\sum_{i=1}^{\infty} f_i = 1$.

光滑函数族$\{f_i \in C^\infty(M): 1 \leqslant i \leqslant \infty\}$称为从属于覆盖$\Sigma$的**单位分解**. 由于$\mathrm{Supp} f_i \subset V_i$,且$\{V_i: 1 \leqslant i \leqslant \infty\}$是局部有限的,所以每一点$p \in M$必有一个邻域$W$,使$\overline{W}$紧致,因而$W$只与有限多个邻域$V_i$相交,换言之,只有有限多个函数$f_i$在点$p$不为零,故$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(p)$只是有限多项的和.

证明 因为M是满足第二可数公理的流形,故M必是局部紧致的,由引理2.6开覆盖Σ必定有一个可数的、局部有限的加细开覆盖$\Sigma_0 = \{V_i: 1 \leqslant i < \infty\}$. 由引理2.6的证明可知每个成员$V_i$的闭包$\overline{V}_i$是$M$的紧致子集.

现在我们要把Σ_0中的每个成员V_i稍作收缩得到W_i,使得$\overline{W}_i \subset V_i$,并且$\{W_i\}$仍然是$M$的开覆盖. 为叙述简便起见,令$V_0 = W_0 = \varnothing$. 我们要用归纳法证明下面的断言:对于任意的$r \geqslant 0$,存在开集$W_i, 0 \leqslant i \leqslant r$,使得$\overline{W}_i \subset V_i$,并且$\{W_0, W_1, \cdots, W_r, V_{r+1}, \cdots\}$仍是$M$的开覆盖. 当$r = 0$时,上述断言是自动成立的. 下面假定断言在$r(\geqslant 0)$时为真,证明断言在$r+1$时仍为真. 令

$$W = \left(\bigcup_{i=0}^{r} W_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \geqslant r+2} V_i\right),$$

则$M \backslash W$是包含在$V_{r+1} \subset \overline{V}_{r+1}$内的闭子集. 不妨假定$M \backslash W \neq \varnothing$. 因为,若$M \backslash W = \varnothing$,则可以在$\Sigma_0$中剔除$V_{r+1}$,于是$\Sigma_0$仍是$\Sigma$的可数的、局部有限的加细开覆盖. 因为$\overline{V}_{r+1}$是紧致集,故$M \backslash W$也是紧致集.

对每一点$p \in M \backslash W$,可作p的邻域Z_p,使得$\overline{Z}_p$是紧致的,且$p \in Z_p \subset \overline{Z}_p \subset V_{r+1}$. 这样,$\{Z_p: p \in M \backslash W\}$构成$M \backslash W$的开覆盖. 由于$M \backslash W$的紧致性,在上面的开覆盖中可以取出一个有限的子覆盖,设为$\{Z_i: 1 \leqslant i \leqslant m\}$. 令

$$W_{r+1} = \bigcup_{i=1}^{m} Z_i,$$

则
$$M \backslash W \subset W_{r+1} \subset \overline{W}_{r+1} \subset V_{r+1}.$$

很明显,$\{W_0, W_1, \cdots, W_{r+1}, V_{r+2}, \cdots\}$是$M$的开覆盖,并且$\overline{W}_{r+1} \subset V_{r+1}$,故断言在$r+1$时为真. 因此,根据归纳法原理,存在$M$的一个开覆盖$\{W_i\}$,使得$\overline{W}_i \subset V_i, \forall i$.

将上面的过程再次用到开覆盖$\{W_i\}$上,得到开覆盖$\{X_i\}$,使得对于每个i,有$\overline{X}_i \subset W_i$. 由引理2.2,在$M$上存在光滑函数$\tilde{f} \in C^\infty(M)$,使得$\tilde{f}_i|_{X_i} \equiv 1$, $\tilde{f}_i|_{M \backslash W_i} \equiv 0$,且$0 \leqslant \tilde{f}_i \leqslant 1$. 这样,$\mathrm{Supp} \tilde{f}_i \subset \overline{W}_i \subset V_i$. 由于$\{V_i\}$是$M$的局部有限的开覆盖,故在任意一点$p \in M$,只有有限多个$\tilde{f}_i$,使得$\tilde{f}_i(p) \neq 0$,因而$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_i(p)$是有限值. 另外,因为$\{X_i\}$也是$M$的开覆盖,故至少有一个$i$,使得$p \in X_i$,即$\tilde{f}_i(p) = 1$. 总之,$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_i$在每一点$p \in M$的值是有限的正数. 令

$$f_i = \frac{\tilde{f}_i}{\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{f}_j},$$

则 $0 \leqslant f_i \leqslant 1, f_i \in C^\infty(M), \mathrm{Supp} f_i \subset V_i \subset$ 某个 U_α，并且 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i = 1$，$\{f_i : 1 \leqslant i < \infty\}$ 就是定理所要求的属于开覆盖 Σ 的单位分解.

光滑函数的概念能够推广为光滑流形之间的光滑映射，而映射的光滑性是通过容许坐标卡把流形之间的映射化为欧氏空间的开集之间的映射的光滑性来定义的. 下面给出确切的定义.

定义 2.6 设 M, N 分别是 m 维，n 维光滑流形，$f : M \to N$ 是连续映射. 设 $x \in M$，若存在 M 在点 x 处的容许坐标卡 (U, φ) 及 N 在点 $f(x)$ 处的容许坐标卡 (V, ψ)，使得

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V))(\subset \mathbf{R}^m) \to \psi(V)(\subset \mathbf{R}^n)$$

是在点 $\varphi(x)$ 处的光滑映射，则称映射 f 在点 x 处是光滑的. 若映射 f 在 M 上是处处光滑的，则称 f 是从 M 到 N 的**光滑映射**.

很明显，$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 在点 $\varphi(x)$ 处的光滑性与坐标卡 (U, φ) 和 (V, ψ) 的取法无关.

在定义 2.6 中取 $N = \mathbf{R}$，则我们便回到定义 2.1. 若 $M = (a, b)$（$\mathbf{R}$ 中的一个开区间），则定义 2.6 给出的光滑映射 $f : (a, b) \to N$ 称为光滑流形 N 中的一条**光滑曲线**.

在拓扑空间之间可引进同胚的概念. 同胚的拓扑空间有相同的拓扑性质，因此在拓扑学中把同胚的拓扑空间看作同一个空间. 对于微分流形，我们有微分同胚的概念.

定义 2.7 设 M, N 是两个 n 维光滑流形，$f : M \to N$ 是同胚. 如果 $f : M \to N$ 和它的逆映射 $f^{-1} : N \to M$ 都是光滑映射，则称 $f : M \to N$ 是**光滑同胚**，或称 f 是微分同胚.

很明显，光滑同胚是光滑流形之间的一种等价关系. 我们所研究的光滑流形实际上是它在光滑同胚下的等价类.

若 M, N 是彼此光滑同胚的，则在 $C^\infty(M)$ 与 $C^\infty(N)$ 之间能建立一一对应. 微分拓扑学研究的就是微分流形在微分同胚下不变的概念和性质. 因此，光滑流形 M 上光滑函数的集合 $C^\infty(M)$ 是首先要研究的对象之一.

在同一个拓扑流形上可能有不同的微分结构，但是它们所构造的两个微分流形可能是彼此微分同胚的. 典型的例子就是 §1 的例 2.

在 §1 例 2 中由 $\mathbf{R}$ 上的恒同映射 φ 所决定的光滑结构记为 $\mathscr{A}_1$，由坐标卡 (V, ψ) 决定的光滑结构记为 $\mathscr{A}_2$，其中 $V = \mathbf{R}$，ψ 的定义是

$$\psi(x) = x^3, \qquad \forall\, x \in V.$$

前面已经说明 $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ 是两个彼此非 C^∞ 相关的微分结构(坐标卡$(\mathbf{R},\varphi)$ 和 $(\mathbf{R},\psi)$ 甚至不是 C^1 相关的),但是光滑流形 $M_1 = (\mathbf{R},\mathscr{A}_1)$ 和 $M_2 = (\mathbf{R},\mathscr{A}_2)$ 是彼此光滑同胚的. 实际上,我们考虑映射 $f: M_1 \to M_2$,使得

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \qquad \forall\, x \in M_1,$$

那么

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$$

由定义 2.6 可知 $f: M_1 \to M_2$ 是光滑同胚. 显然,f 的逆映射是 $f^{-1}(x) = x^3$,同样有

$$\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} = \mathrm{id}: \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$

故 f^{-1} 也是光滑映射. 因此,$f: M_1 \to M_2$ 是光滑同胚.

一个自然的问题:在同一个拓扑流形上,不同的光滑结构所给出的光滑流形是否一定是彼此光滑同胚的?即在拓扑流形上,所有可能的微分结构在微分同胚的意义下是否是唯一的?要在微分流形上把拓扑结构和微分结构分离开确实是一个十分困难的任务;在相当长时间内,人们趋向于相信在一个拓扑流形上只能定义一个微分结构,至多差一个微分同胚. 但是,J. Milnor 在 1956 年给出了一个令人震惊的答案,他在 7 维球面上建立了一个怪球结构,它与球面上标准微分结构不能建立可微同胚. 接着,Kervaire 和 Milnor 发现在很多维数不同的球面上,微分结构(在微分同胚的意义下)不是唯一的. 在 1961 年,Kervaire 发现了一个 10 维拓扑流形,它全然没有微分结构. 这样,微分拓扑学成为独立于拓扑学的一门分支学科. 直到本世纪 80 年代,才证明除了 $\mathbf{R}^4$ 以外,所有的欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 有唯一的微分结构,而 $\mathbf{R}^4$ 的微分结构有很多. 这是 Freedman 和 Donaldson 的研究工作所得出的结论. 这些工作是十分精深的,用到许多当代的数学工具,在这里就不多说了.

§3　切向量和切空间

在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中,切向量就是指经过一点的光滑曲线在该点的切向量,实际上它可以是从一点引出的任意一个向量,或者是从一点出发的任意一条有向线段. 这种在直观上容易理解的概念依赖于欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 本身所固有的线性结构,不能够直接搬到微分流形上来. 但是,在第一章我们已经把欧氏空间中的切向量进一步描述成作用在光滑函数上的方向导数,它遵循对函数求导的法则,而且切向量与沿该切向量的方向导数是一一对应的. 在微分流形上,可微函数是有定义的,因此在欧氏空间中解释为方向导数的切向量的概念可以毫无困难地移植到微分流形上来.

定义 3.1　设 M 是一个 m 维光滑流形,$x \in M$. 所谓光滑流形 M 在点 x 的

切向量 v 是指满足下列条件的一个映射 $v: C_x^\infty \to \mathbf{R}$:

(1) $\forall\, f,g \in C_x^\infty$,有 $v(f+g) = v(f) + v(g)$;

(2) $\forall\, f \in C_x^\infty, \forall\, \lambda \in \mathbf{R}$,有 $v(\lambda f) = \lambda \cdot v(f)$;

(3) $\forall\, f,g \in C_x^\infty$,有 $v(f \cdot g) = f(x) \cdot v(g) + g(x) \cdot v(f)$.

条件(1),(2)说明 v 是从 C_x^∞ 到 $\mathbf{R}$ 的线性映射,条件(3)称为Leibniz法则.

例 1 设 $\gamma: (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ 是光滑流形 M 中经过点 x_0 的一条光滑曲线,$\gamma(0) = x_0$,则曲线 γ 确定了一个映射 $v: C_{x_0}^\infty \to \mathbf{R}$,其定义是

$$v(f) = \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}, \quad \forall\, f \in C_{x_0}^\infty, \tag{3.1}$$

其中 t 是曲线 r 的自变量,$-\varepsilon < t < \varepsilon$.

上式右端是有意义的,因为 $f \circ \gamma: (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbf{R}$ 是在 $t=0$ 处光滑的函数,故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 有定义.

容易验证映射 v 满足定义 3.1 的条件. 为节省篇幅,我们只验证条件(3),其余类同. 设 $f,g \in C_{x_0}^\infty$,故

$$(f \cdot g) \circ \gamma = (f \circ \gamma) \cdot (g \circ \gamma),$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((f \cdot g) \circ \gamma) = (f \circ \gamma) \cdot \frac{\mathrm{d}(g \circ \gamma)}{\mathrm{d}t} + (g \circ \gamma) \cdot \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t},$$

让 $t = 0$ 则得

$$v(f \cdot g) = f(x_0) \cdot v(g) + g(x_0) \cdot v(f).$$

因此 v 是流形 M 在点 x_0 的一个切向量.

例 1 所定义的在点 x_0 的切向量 v 称为光滑曲线 γ 在点 $t=0$ 处的**切向量**,简记为 $\gamma'(0)$. 一般地,曲线 γ 在 t 处的切向量记为 $\gamma'(t)$. 反过来,光滑流形 M 在点 x_0 的任意一个切向量都可以看作光滑流形 M 上经过点 x_0 的一条光滑曲线 γ 在该点的切向量. 为证明这个事实,需要对切向量有更多的了解. 首先我们证明光滑流形 M 在一点 x_0 的全体切向量构成一个向量空间.

定理 3.1 设 M 是 m 维光滑流形,$x_0 \in M$. 用 $T_{x_0}M$ 表示 M 在点 x_0 处的全体切向量的集合,则在 $T_{x_0}M$ 中有自然的线性结构,使得 $T_{x_0}M$ 成为 m 维向量空间. 向量空间 $T_{x_0}M$ 称为光滑流形 M 在点 x_0 的**切空间**.

证明 设 $u,v \in T_{x_0}M, \lambda \in \mathbf{R}$,则映射 $u+v, \lambda u$ 定义为

$$(u+v)f = u(f) + v(f),$$
$$(\lambda u)f = \lambda \cdot u(f),$$

其中 $f \in C_{x_0}^\infty$. 显然,$u+v, \lambda u$ 仍然是从 $C_{x_0}^\infty$ 到 $\mathbf{R}$ 的线性映射,并且满足 Leibniz 法则,所以 $u+v, \lambda u \in T_{x_0}M$. 既然 $T_{x_0}M$ 作为线性算子 $u: C_{x_0}^\infty \to \mathbf{R}$ 的一个集合关于加法和数乘法是封闭的,它必然是一个线性子空间,即它满足线性空间

所应该满足的公理.

为证明 $\dim T_{x_0}M = m$，必须在 $T_{x_0}M$ 中找出由 m 个切向量构成的基底. 设光滑流形 M 在点 x_0 的容许坐标卡为 (U,φ)，相应的局部坐标系是 x^i，即

$$x^i(p) = (\varphi(p))^i, \qquad \forall\, p \in U.$$

假定点 x_0 的坐标是 $(x_0^1,\cdots,x_0^m)$. 任意固定一个指标 j，$1 \leqslant j \leqslant m$，考虑 M 中的曲线

$$\gamma_j:(-\varepsilon,\varepsilon) \to M,$$

使得

$$x^i(\gamma_j(t)) = x_0^i + \delta_j^i t, \tag{3.2}$$

其中 δ_j^i 是 Kronecker δ-记号，曲线 γ_j 就是让坐标 x^j 变动，而其余的坐标 $x^i(i \neq j)$ 保持为常值 x_0^i 的曲线，即 γ_j 是在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下经过点 x_0 的第 j 条坐标曲线. 用 $\frac{\partial}{\partial x^j}$ 记曲线 γ_j 在点 $t=0$ 处的切向量，即

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^j}(f) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\gamma_j)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(f\circ\varphi^{-1})(x_0^1,\cdots,x_0^j+t,\cdots,x_0^m) \\ &= \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}\Big|_{\varphi(x_0)}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

由此可见，$\frac{\partial}{\partial x^j}$ 在 f 上的作用恰好是函数 $f\circ\varphi^{-1}$ 关于第 j 个坐标 x^j 的偏导数. 特别是，如果 f 是第 i 个坐标函数 x^i，则有

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = \delta_j^i. \tag{3.4}$$

下面我们证明：任意一个切向量 $v \in T_{x_0}M$ 能够用这 m 个切向量 $\frac{\partial}{\partial x^j}$，$1 \leqslant j \leqslant m$ 线性表示. 为此，我们首先断言：切向量 $v \in T_{x_0}M$ 在常值函数上的作用为零. 实际上，由定义 3.1 的条件(3)，

$$v(1) = v(1\cdot 1) = 2v(1),$$

故

$$v(1) = 0.$$

再用条件(2)，对任意的常值函数 λ 有

$$v(\lambda) = v(\lambda\cdot 1) = \lambda\cdot v(1) = 0.$$

其次，我们断言：对于任意的 $f \in C_{x_0}^\infty$ 有

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^m (x^i - x_0^i)\, g_i(x), \tag{3.5}$$

其中 $g_i \in C_{x_0}^\infty$，且

$$g_i(x_0)=\left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(x_0)}=\frac{\partial}{\partial x^i}(f).\tag{3.6}$$

这是第一章的引理 2.2 在光滑流形情形的翻版. 实际上，$f\circ\varphi^{-1}$ 是欧氏空间 E^m 中在点 $\varphi(x_0)$ 处的光滑函数，由第一章的引理 2.2 得到

$$\begin{aligned}&f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m)\\&=f\circ\varphi^{-1}(x_0^1,\cdots,x_0{}^m)+\sum_{i=1}^m(x^i-x_0^i)h_i(x^1,\cdots,x^m),\end{aligned}\tag{3.7}$$

其中 h_i 是在点 $\varphi(x_0)$ 的光滑函数，并且

$$h_i(x_0^1,\cdots,x_0^m)=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(x_0^1,\cdots,x_0^m).$$

令 $g_i=h_i\circ\varphi$，则(3.7) 式化为(3.5) 式.

现在，利用切向量 v 所满足的条件，以及函数 $f\in C_{x_0}^\infty$ 的表达式(3.5)，我们有

$$\begin{aligned}v(f)&=v\Big(\sum_{i=1}^m(x^i-x_0^i)g_i\Big)\\&=\sum_{i=1}^m v(x^i)g_i(x_0)\\&=\sum_{i=1}^m v(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}(f),\end{aligned}$$

即

$$v=\sum_{i=1}^m v^i\frac{\partial}{\partial x^i},\tag{3.8}$$

其中 $v^i=v(x^i)$. 由此可见，切向量 v 能够表示成切向量 $\frac{\partial}{\partial x^i}$，$1\leqslant i\leqslant m$ 的线性组合，并且组合的系数 v^i 恰好是切向量 v 作用在第 i 个坐标函数 x^i 上所得到的值.

这 m 个切向量 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 显然是线性无关的. 实际上，假定零切向量有表达式

$$0=\sum_{i=1}^m a^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 $a^i\in\mathbf{R}$，将它作用在第 j 个坐标函数 x^j 上，则得

$$0=\sum_{i=1}^m a^i\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)=\sum_{i=1}^m a^i\delta_i^j=a^j.$$

这说明 $\frac{\partial}{\partial x^i}$，$1\leqslant i\leqslant m$ 是线性无关的.

综上所述，$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}:1\leqslant i\leqslant m\right\}$ 是 $T_{x_0}M$ 的一个基底，故 $\dim T_{x_0}M=m$.

我们把 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 称为切空间 $T_{x_0}M$ 在局部坐标系$(U;x^i)$ 下的**自然基底**，切向

量 v 展开成 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 的线性组合时的系数 $v^i = v(x^i)$ 称为切向量 v 关于自然基底 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 的分量.

作为例子,我们来求例 1 中光滑曲线 γ 的切向量在自然基底下的分量. 假定点 x_0 的坐标卡是 (U,φ),令

$$x^i(p) = (\varphi(p))^i,$$

则光滑曲线 γ 的参数方程是

$$x^i = x^i(t) = (\varphi(\gamma(t)))^i.$$

根据定义,曲线 γ 在 $t = 0$ 处的切向量是 $v = \gamma'(0)$,则对于任意的 $f \in C^\infty_{x_0}$,有

$$\begin{aligned} v(f) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(f \circ \gamma(t)) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ \varphi^{-1}(x^1(t),\cdots,x^m(t)) \\ &= \sum_{i=1}^m \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(x_0)} \frac{\mathrm{d}x^i(0)}{\mathrm{d}t} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\mathrm{d}x^i(0)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(f). \end{aligned}$$

因此,曲线 γ 的切向量 $v = \gamma'(0)$ 在自然基底下的分量恰好是曲线 γ 在相应局部坐标系下的参数方程的导数,即

$$v^i = \frac{\mathrm{d}x^i(0)}{\mathrm{d}t}. \tag{3.9}$$

在欧氏空间中,这恰好是参数曲线的切向量的定义(看第一章的(2.6)式). 但是我们现在所获得的微分流形上光滑曲线的切向量不再依赖空间有什么线性结构,因而不再具有欧氏空间中切向量的直观意义.

现在,不难把光滑流形 M 在点 x_0 的任意一个切向量表示成流形 M 上经过点 x_0 的一条光滑曲线在该点处的切向量. 事实上,设 $v \in T_{x_0}M$ 有表达式

$$v = \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{3.10}$$

其中 $v^i = v(x^i)$,则我们能在流形 M 上构造经过点 x_0 的一条光滑曲线 γ,其参数方程是

$$x^i(t) = x_0^i + tv^i. \tag{3.11}$$

根据(3.9)式,它是在 $t = 0$ 处的切向量是

$$\gamma'(0) = \sum_{i=1}^m \frac{\mathrm{d}x^i(0)}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = v.$$

注意到曲线 γ 的切向量 $\gamma'(0)$ 的分量只是曲线的参数方程 $x^i(t)$ 在 $t = 0$

处的一阶导数，因此当经过点 x_0 的两条光滑曲线的参数方程在 $t=0$ 处有相同的一阶导数时，它们在 x_0 处就有相同的切向量. 据此，在经过点 x_0 的光滑曲线的集合 Γ 中可以定义如下的关系：设 $\gamma,\widetilde{\gamma}\in\Gamma$，则在点 $x_0\in M$ 的一个局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，它们的参数方程可分别表示为

$$x^i = x^i(t) \qquad 和 \qquad x^i = \widetilde{x}^i(t),$$

并且

$$x^i(0) = \widetilde{x}^i(0) = x_0^i.$$

如果它们的参数方程在 $t=0$ 处有相同的一阶导数

$$\frac{\mathrm{d}x^i(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^i(0)}{\mathrm{d}t}, \qquad 1\leqslant i\leqslant m, \tag{3.12}$$

则称曲线 γ 和 $\widetilde{\gamma}$ 在点 x_0 处是相切的. 容易验证：经过点 x_0 的光滑曲线 $\gamma,\widetilde{\gamma}$ 在点 x_0 处相切的关系与点 x_0 的局部坐标系的取法无关. 另外，在曲线的集合 Γ 中，相切关系确实是一个等价关系.

前面的讨论说明：流形 M 在点 x_0 的切向量与在点 x_0 处彼此相切的光滑曲线集是一一对应的，即在直观上可以把点 x_0 处的切向量看作在点 x_0 处的一族彼此相切的光滑曲线. 这种看法在求切向量或切向量之间的关系时是十分有用的.

现在我们来考察光滑流形 M 上不同的局部坐标系所产生的自然基底之间的关系. 设 (U,φ) 和 (V,ψ) 是在点 x_0 处的两个容许坐标卡，$U\cap V\neq\varnothing$，设

$$x^i(p) = (\varphi(p))^i, \qquad y^i(p) = (\psi(p))^i,$$

其中 $p\in U\cap V$. 对应的自然基底分别记为 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 和 $\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$. 要将切向量 $\frac{\partial}{\partial y^i}$ 用基底 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 表示出来，只需利用公式(3.8). 于是

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial y^i}(x^j)\cdot\frac{\partial}{\partial x^j},$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial y^i}(x^j) = \left.\frac{\partial(x^j\circ\psi^{-1})}{\partial y^i}\right|_{\psi(x_0)} = \left.\frac{\partial(\varphi\circ\psi^{-1})^j}{\partial y^i}\right|_{\psi(x_0)},$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^m \left.\frac{\partial(\varphi\circ\psi^{-1})^j}{\partial y^i}\right|_{\psi(x_0)}\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{3.13}$$

由此可见，基底 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 变为基底 $\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ 的过渡矩阵正好是坐标变换

$$\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V)$$

在点 $\psi(x_0)$ 的 Jacobi 矩阵

$$\left(\left.\frac{\partial(\varphi\circ\psi^{-1})^j}{\partial y^i}\right|_{\psi(x_0)}\right).$$

设切向量 $v \in T_{x_0}M$，它在自然基底 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 和 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ 下分别有表达式

$$v = \sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{v}^i \frac{\partial}{\partial y^i},$$

则

$$\sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i,j=1}^{m} \widetilde{v}^j \left.\frac{\partial(\varphi \circ \psi^{-1})^i}{\partial y^j}\right|_{\psi(x_0)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

故

$$v^i = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{v}^j \left.\frac{\partial(\varphi \circ \psi^{-1})^i}{\partial y^j}\right|_{\psi(x_0)}. \tag{3.14}$$

因此，切向量 v 的分量在基底变换时遵循反变的变换规律.

切空间是微分流形上十分重要的构造，它是微分结构的产物. 在拓扑流形上不能定义切向量和切空间的概念. 由于在微分流形的每一点都有切空间这样的线性结构，线性代数就成为研究微分流形的重要代数工具. 在第三章，我们将展开关于微分流形上的外微分代数的研究. 在这里我们先介绍基于切空间所产生的若干线性代数的概念.

定义 3.2 切空间 $T_{x_0}M$ 的对偶空间称为光滑流形 M 在点 x_0 的**余切空间**，记作 $T_{x_0}^*M$. 余切空间 $T_{x_0}^*M$ 的元素称为光滑流形 M 在点 x_0 处的**余切向量**.

根据定义(参看第一章 §4 例 2)，在点 x_0 处的余切向量是切空间 $T_{x_0}M$ 上的线性函数. 设 $\alpha \in T_{x_0}^*M$，$v \in T_{x_0}M$. 为对称起见，我们把 α 在 v 上的值记为

$$\alpha(v) = \langle \alpha, v \rangle,$$

右端可以看作定义在 $T_{x_0}^*M \times T_{x_0}M$ 上的双线性函数.

例 2 光滑函数 f 在点 $x_0 \in M$ 处的微分 $\mathrm{d}f|_{x_0}$.

取定 $f \in C_{x_0}^\infty$，则任意一个切向量 $v \in T_{x_0}M$ 在 f 上的作用给出了从 $T_{x_0}M$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个线性映射

$$v \longmapsto v(f) \in \mathbf{R}.$$

这就是说，函数 $f \in C_{x_0}^\infty$ 决定了在点 x_0 处的一个余切向量，记作 $\mathrm{d}f \in T_{x_0}^*M$，它的定义是：

$$\mathrm{d}f(v) = \langle \mathrm{d}f, v \rangle = v(f). \tag{3.15}$$

余切向量 $\mathrm{d}f \in T_{x_0}^*M$ 称为函数 f 在点 x_0 的微分.

设 $(U; x^i)$ 是光滑流形 M 在点 x_0 处的局部坐标系，显然 $x^i \in C_{x_0}^\infty$. 于是我们在点 x_0 处有流形 M 的 m 个余切向量 $\mathrm{d}x^i$，$1 \leqslant i \leqslant m$，其定义是

$$\mathrm{d}x^i(v) = v(x^i), \qquad \forall\, v \in T_{x_0}M. \tag{3.16}$$

特别是

$$\mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = \delta_j^i, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant m. \tag{3.17}$$

因此，$\{\mathrm{d}x^i : 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 是 $T^*_{x_0}M$ 中与 $T_{x_0}M$ 的自然基底$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$对偶的基底.

设 $\alpha \in T^*_{x_0}M$，则对于任意的

$$v = \sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_{x_0}M ,$$

有
$$\alpha(v) = \sum_{i=1}^{m} v^i \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

但是
$$v^i = v(x^i) = \mathrm{d}x^i(v),$$

故
$$\alpha(v) = \sum_{i=1}^{m} \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i(v),$$

即
$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i. \tag{3.18}$$

所以，当余切向量 α 用对偶基底 $\{\mathrm{d}x^i\}$ 线性表示时，其系数恰好是 α 在基底向量 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 上的值 $\alpha\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$.

将(3.18)式用于微分 $\mathrm{d}f$ 时，我们有

$$\mathrm{d}f|_{x_0} = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}f\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0}\right)\mathrm{d}x^i = \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x_0} \mathrm{d}x^i,$$

即 $\mathrm{d}f|_{x_0}$ 就是函数 f 在点 x_0 的普通微分.

在切空间 $T_{x_0}M$ 和余切空间 $T^*_{x_0}M$ 的基础上能定义在点 x_0 处的 (r,s) 型张量，即它是空间

$$T^r_s(x_0) \equiv \underbrace{T_{x_0}M \otimes \cdots \otimes T_{x_0}M}_{r\text{个}} \otimes \underbrace{T^*_{x_0}M \otimes \cdots \otimes T^*_{x_0}M}_{s\text{个}}$$

的元素，$T^r_s(x_0)$ 是 m^{r+s} 维向量空间，它的一个基底是

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s} : 1 \leqslant i_1, \cdots i_r, j_1, \cdots, j_s \leqslant m\right\}.$$

在点 x_0 处的 (r,s) 型张量也可以看作乘积空间

$$\underbrace{T^*_{x_0}M \times \cdots \times T^*_{x_0}M}_{r\text{个}} \times \underbrace{T_{x_0}M \times \cdots \times T_{x_0}M}_{s\text{个}}$$

上的 $r+s$ 重线性函数. 设 $\alpha \in T^r_s(x_0)$，则有

$$\alpha = \alpha^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}, \tag{3.19}$$

其中

$$\alpha^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s} = \alpha\left(\mathrm{d}x^{i_1}, \cdots, \mathrm{d}x^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right). \tag{3.20}$$

在(3.19)式中用了 Einstein 的和式约定. 特别是，在点 x_0 处的 r 次外形式就是指切空间 $T_{x_0}M$ 上反对称的 r 重线性函数. 在第一章 §4, §5 所讨论的关于张

量和外形式的性质都可以搬到这里来，在此就不赘述了.

光滑流形之间的光滑映射，自然地诱导出在对应点的切空间之间的线性映射. 实际上，若 $\varphi: M \to N$ 是从光滑流形 M 到光滑流形 N 的光滑映射，则对于任意一点 $x_0 \in M$，φ 诱导出从 $C^\infty_{\varphi(x_0)}$ 到 $C^\infty_{x_0}$ 的映射 φ^*，定义为

$$\varphi^*(g) = g \circ \varphi, \qquad \forall\, g \in C^\infty_{\varphi(x_0)}. \tag{3.21}$$

容易验证 $\varphi^*(g) \in C^\infty_{x_0}$. 这样，对于任意的切向量 $v \in T_{x_0}M$，可以定义映射 $\varphi_{*x_0}(v): C^\infty_{\varphi(x_0)} \to \mathbf{R}$，使得对于任意的 $g \in C^\infty_{\varphi(x_0)}$ 有

$$\varphi_{*x_0}(v)(g) = v(\varphi^* g) = v(g \circ \varphi). \tag{3.22}$$

很明显，映射 $\varphi_{*x_0}(v): C^\infty_{\varphi(x_0)} \to \mathbf{R}$ 满足定义 3.1 中的条件(1)，(2)，(3)，即 $\varphi_{*x_0}(v)$ 是光滑流形 N 在点 $\varphi(x_0)$ 处的一个切向量.

定理 3.2 设 M, N 是光滑流形，$\varphi: M \to N$ 是光滑映射，$x_0 \in M$，则由(3.22)式给出的映射 $\varphi_{*x_0}: T_{x_0}M \to T_{\varphi(x_0)}N$，$v \mapsto \varphi_{*x_0}(v)$ 是线性映射，称为光滑映射 φ 在点 x_0 所诱导的**切映射**.

证明 很明显，若设 $u, v \in T_{x_0}M$，$g \in C^\infty_{\varphi(x_0)}$，则我们有

$$\begin{aligned}(\varphi_{*x_0}(u+v))g &= (u+v)(g\circ\varphi)\\ &= u(g\circ\varphi) + v(g\circ\varphi)\\ &= (\varphi_{*x_0}(u))g + (\varphi_{*x_0}(v))g\\ &= (\varphi_{*x_0}(u) + \varphi_{*x_0}(v))g,\\ (\varphi_{*x_0}(\lambda u))g &= (\lambda u)(g\circ\varphi)\\ &= \lambda\cdot u(g\circ\varphi)\\ &= (\lambda\cdot\varphi_{*x_0}(u))g,\end{aligned}$$

其中 $\lambda \in \mathbf{R}$，因此，

$$\varphi_{*x_0}(u+v) = \varphi_{*x_0}(u) + \varphi_{*x_0}(v),$$
$$\varphi_{*x_0}(\lambda u) = \lambda\cdot\varphi_{*x_0}(u).$$

线性映射由它在基底向量上的值完全确定，即线性映射与它在给定基底下的矩阵是彼此对应的. 在光滑流形 M 中取点 x_0 的局部坐标系 $(U; x^i)$，在光滑流形 N 中取点 $\varphi(x_0)$ 的局部坐标系 $(V; y^\alpha)$，则光滑映射 $\varphi: M \to N$ 在局部上可表示为

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, \cdots, x^m), \tag{3.23}$$

其中 $y^\alpha(x^1, \cdots, x^m)$ 是定义在 $U \cap \varphi^{-1}(V)$ 上的光滑函数. 在切空间 $T_{x_0}M$ 和 $T_{\varphi(x_0)}N$ 中分别有自然基底 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 和 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}\right\}$，设

$$\varphi_{*x_0}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} A_i^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}. \tag{3.24}$$

将上式两边作用在坐标函数 y^β 上，由定义式(3.22) 得到

$$\begin{aligned}A_i^\beta &= \left(\varphi_{*x_0}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)y^\beta \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i}(y^\beta\circ\varphi) \\ &= \frac{\partial y^\beta(x^1,\cdots,x^m)}{\partial x^i}.\end{aligned}\tag{3.25}$$

因此，切映射 φ_{*x_0} 在自然基底 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\},\left\{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right\}$ 下的矩阵恰好是映射 φ 的局部坐标表达式(3.23) 的 Jacobi 矩阵.

切映射有另一种表示方式，在实际计算时非常有用. 设 $v\in T_{x_0}M$，则在 M 中有一条光滑曲线 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$，使得 $\gamma(0)=x_0,\gamma'(0)=v$. 那么

$$\varphi_{*x_0}(v)=\varphi_{*x_0}(\gamma'(0))=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\varphi\circ\gamma(t),$$

即

$$\varphi_{*x_0}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma(t)\right)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\varphi\circ\gamma(t),\tag{3.26}$$

这里 $\varphi\circ\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to N$ 是光滑流形 N 中经过点 $\varphi(x_0)$ 的一条光滑曲线. (3.26) 式的意义是 φ_{*x_0} 把曲线 $\gamma(t)$ 在 $\gamma=0$ 处的切向量映为曲线 $\varphi\circ\gamma(t)$ 在 $t=0$ 处的切向量. 该式的成立是明显的. 任取 $g\in C^\infty_{\varphi(x_0)}$，则由(3.22) 和(3.1) 式得到

$$\begin{aligned}&\left(\varphi_{*x_0}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma(t)\right)\right)(g)=\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma(t)\right)(g\circ\varphi)\\ &=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}g\circ\varphi\circ\gamma(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}g(\varphi\circ\gamma(t))\\ &=\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\varphi\circ\gamma(t)\right)(g),\end{aligned}$$

故有(3.26) 式.

例 3 切空间 $T_{x_0}M$ 中不同的自然基底之间的关系可以看作从光滑流形 M 到自身的恒同映射在点 x_0 的切映射(仍旧是恒同映射) 在这两个自然基底下的表示. 设 $(U,\varphi),(V,\psi)$ 是光滑流形 M 在点 x_0 的两个容许坐标卡，记

$$x^i(p)=(\varphi(p))^i,\qquad y^i(p)=(\psi(p))^i,\quad \forall\, p\in U\cap V,$$

则由(3.24) 式得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y^i}&=(\mathrm{id})_*\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)\\ &=\sum_{j=1}^m A_i^j\frac{\partial}{\partial x^j},\end{aligned}\tag{3.27}$$

其中

$$A_i^j = \left.\frac{\partial x^j(y^1,\cdots,y^m)}{\partial y^i}\right|_{\psi(x_0)}. \tag{3.28}$$

这里 $x^j(y^1,\cdots,y^m)$ 是恒同映射 id 的局部坐标表示：

$$\begin{aligned} & x^j(y^1,\cdots,y^m) \\ &= (\varphi\circ \mathrm{id}\circ\psi^{-1})^j(y^1,\cdots,y^m) \\ &= (\varphi\circ\psi^{-1})^j(y^1,\cdots,y^m), \end{aligned}$$

即 $x^j(y^1,\cdots,y^m)$ 是从 $(U\cap V;y^i)$ 到 $(U\cap V;x^i)$ 的局部坐标变换.(3.27)式和(3.13)式是一致的.

例 4 切向量 $v\in T_{x_0}M$ 在复合函数上的作用.

设 $f\in C^\infty(\mathbf{R}^r)$, $g_1,\cdots,g_r\in C^\infty(M)$,则

$$F = f(g_1,\cdots,g_r)\in C^\infty(M).$$

设 $v\in T_{x_0}M$,则我们有

$$v(F) = \sum_{\alpha=1}^r \left.\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\right|_{(g_1(x_0),\cdots,g_r(x_0))}\cdot v(g_\alpha). \tag{3.29}$$

在欧氏空间中,上式恰恰是对于复合函数 F 求方向导数的链法则.(3.28)式成立的理由如下:

我们把 $G=(g_1,\cdots,g_r)$ 看成从 M 到 $\mathbf{R}^r$ 的光滑映射,于是 $F=f\circ G$,因此

$$v(F) = v(f\circ G) = (G_*v)f.$$

将 $\mathbf{R}^r$ 中的笛卡儿坐标系记作 $\{y^\alpha\}$,则

$$\begin{aligned} G_*v &= \sum_{\alpha=1}^r (G_*v)(y^\alpha)\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^r v(y^\alpha\circ G)\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^r v(g_\alpha)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \end{aligned}$$

故

$$v(F) = \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\cdot v(g_\alpha).$$

切映射 $\varphi_{*x_0}: T_{x_0}M\to T_{\varphi(x_0)}N$ 所诱导的余切空间之间的线性映射 $\varphi^*: T^*_{\varphi(x_0)}N\to T^*_{x_0}M$ 称为**余切映射**,定义为:

$$(\varphi^*\alpha)(v) = \alpha(\varphi_{*x_0}(v)), \tag{3.30}$$

其中 $\alpha\in T^*_{\varphi(x_0)}N$, $v\in T_{x_0}M$(参看第一章 §5,(5.22)).余切映射 φ^* 在对偶基底 $\{\mathrm{d}y^\alpha\}$, $\{\mathrm{d}x^i\}$ 下的矩阵仍然是映射 φ 的局部坐标表达式的 Jacobi 矩阵 $\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^i}\right)$.

实际上，根据(3.18)、(3.24)、(3.30) 式有

$$\begin{aligned}\varphi^* \mathrm{d}y^\alpha &= \sum_{i=1}^{m} (\varphi^* \mathrm{d}y^\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}y^\alpha\left(\varphi_{*x_0}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)\mathrm{d}x^i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i. \end{aligned} \tag{3.31}$$

例 5　设 $\varphi: M \to N$ 是光滑映射，$x_0 \in M$，$f \in C^\infty_{\varphi(x_0)}$，则 $\mathrm{d}f \in T^*_{\varphi(x_0)}N$，$\varphi^*\mathrm{d}f \in T^*_{x_0}M$. 假定 $(U;x^i)$ 是点 x_0 的局部坐标系，$(V;y^\alpha)$ 是点 $\varphi(x_0)$ 的局部坐标系，且

$$\mathrm{d}f = \sum_\alpha \frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\bigg|_{\varphi(x_0)} \mathrm{d}y^\alpha,$$

则

$$\begin{aligned}\varphi^*\mathrm{d}f &= \sum_{\alpha,i} \frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\circ\varphi\bigg|_{x_0} \cdot \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\bigg|_{x_0} \mathrm{d}x^i \\ &= \sum_i \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x^i}\bigg|_{x_0} \mathrm{d}x^i \\ &= \mathrm{d}(f\circ\varphi). \end{aligned} \tag{3.32}$$

由此可见，余切映射 φ^* 在函数 f 的微分 $\mathrm{d}f$ 上的作用恰好是复合函数 $f\circ\varphi$ 的微分.

最后我们要提一下复合映射的切映射和余切映射的链法则，其证明留给读者作练习.

定理 3.3　设 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$ 分别是光滑流形 X,Y,Z 之间的光滑映射，则复合映射 $g\circ f: X \to Z$ 的切映射和余切映射服从下列链法则：

(1) $(g\circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}: T_pX \to T_{g\circ f(p)}Z$，　$\forall\, p \in X$；

(2) $(g\circ f)^* = f^* \circ g^*: T^*_{g\circ f(p)}Z \to T^*_pX$，　$\forall\, p \in X$.

要注意的是，余切映射的方向与原映射的方向是相反的；复合映射的余切映射作为原映射的余切映射的复合映射时，复合的次序是倒过来的.

§4　子　流　形

在本节，我们要研究光滑流形之间的一种特殊的光滑映射 $f: M \to N$，使得在此映射下，至少是 M 在每一点的一个充分小的邻域能够一一地映为 N 的一个子集，从而可以把该邻域与它在 f 下的象等同起来. 这种映射能够用它的秩来刻画.

定义 4.1　设 M 和 N 分别是 m 维和 n 维光滑流形，$f: M \to N$ 是光滑映射. 设 $x_0 \in M$，$f_{*x_0}: T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N$ 是切映射. 象子空间 $f_{*x_0}(T_{x_0}M)$ 的维数

称为映射 f 在点 x_0 的**秩**，记为 $\mathrm{rk}_{x_0}(f)$.

很明显，$\mathrm{rk}_{x_0}(f) \leqslant \min(m,n)$.

若取 M 在点 x_0 的局部坐标系 $(U;x^i)$，取 N 在点 $f(x_0)$ 的局部坐标系 $(V;y^\alpha)$，则 $\mathrm{rk}_{x_0}(f)$ 恰好是在切向量

$$f_{*x_0}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right),\cdots,f_{*x_0}\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)$$

的集合中线性无关向量的最大个数，或映射 f 的局部坐标表示式的 Jacobi 矩阵的秩：

$$\mathrm{rk}_{x_0}(f) = \mathrm{rank}\left(\left.\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right|_{x_0}\right).$$

一般说来，光滑映射 f 在各点的秩未必是相同的. 但是，如果 f 在点 x_0 的秩达到最大值 $\min(m,n)$，则 f 在点 x_0 的一个邻域内必有相同的秩 $\min(m,n)$. 事实上，当

$$\mathrm{rk}_{x_0}(f) = k \equiv \min(m,n)$$

时，Jacobi 矩阵 $\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)$ 有一个 k 阶子式在点 x_0 不为 0. 由于该子式连续地依赖于点 x_0，所以它必在 x_0 的一个邻域内处处不为 0，然而 Jacobi 矩阵 $(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i})$ 没有 $k+1$ 阶以上的子式，故 f 在该邻域内的秩均为 k.

很明显，若 $\mathrm{rk}_{x_0}f = m$，则切映射 f_{*x_0} 是非退化的（即 f_{*x_0} 必定把非零切向量映为非零切向量）；反之亦然. 此时已假定 $m \leqslant n$. 我们要叙述两个十分有用的定理，它们是欧氏空间中的反函数定理（第一章 §3，定理 3.2）的翻版和应用.

定理 4.1 设 M,N 是两个 n 维光滑流形，$f: M \to N$ 是光滑映射，若映射 f 在点 $x_0 \in M$ 的秩为 n，则必有 M 在点 x_0 的一个邻域 U，使得 $V = f(U)$ 是 N 在点 $f(x_0)$ 的邻域，并且 $f|_U: U \to V$ 是光滑同胚.

证明 取光滑流形 M 在点 x_0 的容许坐标卡 $(\tilde{U},\varphi)$ 以及光滑流形 N 在点 $f(x_0)$ 的容许坐标卡 $(\tilde{V},\psi)$，不妨设 $f(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$. 由光滑映射的定义，映射

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(\tilde{U}) \to \psi(\tilde{V}) \subset \mathbf{R}^n$$

是光滑的；由于 $\mathrm{rk}_{x_0}(f) = n$，映射 $\tilde{f}$ 在点 $\varphi(x_0)$ 的 Jacobi 行列式不为 0. 根据第一章的定理 3.2，分别存在点 $\varphi(x_0)$ 的邻域 $U' \subset \varphi(\tilde{U})$ 和点 $\psi(f(x_0))$ 的邻域 $V' \subset \varphi(\tilde{V})$，使得映射 $\tilde{f}|_{U'}: U' \to V'$ 有光滑的逆映射 $(\tilde{f}|_{U'})^{-1}: V' \to U'$，即 $\tilde{f}|_{U'}$ 是光滑同胚.

令 $U = \varphi^{-1}(U')$，$V = \psi^{-1}(V')$，则 U,V 分别是 M,N 在点 x_0，$f(x_0)$ 的邻域，并且

$$f = \psi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi : U \to V$$

是光滑同胚.

定理 4.2 设 M 是 m 维光滑流形，N 是 n 维光滑流形，$m < n$. 设 $f: M \to N$ 是光滑映射. 如果切映射 f_* 在点 $p \in M$ 是非退化的，则存在点 p 的局部坐标系 $(U; x^i)$ 及点 $q = f(p)$ 的局部坐标系 $(V; y^\alpha)$，使得 $f(U) \subset V$，并且映射 $f|_U$ 的局部坐标表达式为：

$$y^i \circ f = x^i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,$$
$$y^\nu \circ f = 0, \qquad m+1 \leqslant \nu \leqslant n.$$

这意味着映射 f 把坐标域 U 单一地映入到 N 的一个局部坐标面内，而且在这样的局部坐标系下，映射 f 在局部上表现为坐标的恒同映射.

证明 取光滑流形 M 在点 p 的局部坐标系 $(U; x^i)$ 及光滑流形 N 在点 $q = f(p)$ 的局部坐标系 $(V; y^\alpha)$，且 $f(U) \subset V$，则映射 $f|_U$ 的局部坐标表达式为

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \cdots, x^m), \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant n.$$

假定 $x^i(p) = 0, y^\alpha(q) = 0$. 已假定切映射 f_* 在点 p 非退化，故不妨设 Jacobi 行列式

$$\left.\frac{\partial(f^1, \cdots, f^m)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)}\right|_{x^i=0} \neq 0.$$

考虑 $\mathbf{R}^{n-m}$ 中的方体

$$I_{n-m} = \{(x^{m+1}, \cdots, x^n) : |x^\nu| < \delta, m+1 \leqslant \nu \leqslant n\},$$

其中 δ 是一个充分小的正数. 在适当缩小点 p 的邻域 U 之后，可以定义光滑映射

$$\tilde{f} : U \times I_{n-m} \to V,$$

使得

$$\tilde{f}^i(x^1, \cdots, x^n) = f^i(x^1, \cdots, x^m),$$
$$\tilde{f}^\nu(x^1, \cdots, x^n) = x^\nu + f^\nu(x^1, \cdots, x^m),$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant m, m+1 \leqslant \nu \leqslant n$. 显然，映射 $\tilde{f}$ 的 Jacobi 行列式在点 $x^\alpha = 0$ 的某个邻域上是光滑同胚.

不妨设 U, V, δ 充分小，使得 $\tilde{f} : U \times I_{n-m} \to V$ 是光滑同胚，于是 $\{x^\alpha\}$ 可以看作光滑流形 N 在点 q 的邻域 V 上的局部坐标系，即 $y^\alpha = x^\alpha$. 这意味着，在这样的局部坐标系下，映射 $\tilde{f}$ 的局部坐标表达式是恒同映射.

由映射 $\tilde{f}$ 的定义可知，$\tilde{f}|_{U \times \{0\}} = f|_U$，于是

$$f(x^1, \cdots, x^m) = (x^1, \cdots, x^m, 0, \cdots, 0).$$

定理4.2的一个含义是：切映射 f_* 在点 p 的非退化性蕴含着映射 f 本身在点 p 的邻域内的单一性. 据此，我们有下面的定义：

定义 4.2 设 M,N 分别是 m 维，n 维光滑流形，$f: M \to N$ 是光滑映射. 若在每一点 $p \in M$，切映射 $f_{*p}: T_pM \to T_{f(p)}N$ 都是非退化的，则称 f 是光滑流形 M 在 N 中的**浸入**，并且称 (f,M) 为光滑流形 N 的一个 m 维**光滑浸入子流形**.

例 1 $\mathbf{R}^3$ 中的正则曲线 $\gamma: (a,b) \to \mathbf{R}^3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一维浸入子流形.

光滑曲线 $\gamma: (a,b) \to \mathbf{R}^3$ 的正则性是指切向量 $\gamma'(t)$ 处处不为 0. 若记

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

则正则性条件成为在每一点 t，在 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 中至少有一个不为零，即光滑映射 $\gamma: (a,b) \to \mathbf{R}^3$ 的秩处处为1. 正则曲线在局部上是一一地映入到 $\mathbf{R}^3$ 中的，但是作为整条曲线来讲，它在 $\mathbf{R}^3$ 中可能有自交点，即映射 $\gamma: (a,b) \to \mathbf{R}^3$ 本身未必是单一的.

同样，$\mathbf{R}^3$ 中的正则曲面是 $\mathbf{R}^3$ 的 2 维浸入子流形.

浸入子流形的性态是十分复杂的. 在本节的后半部分我们要叙述的 Whitney 定理表明，任意高维的欧氏空间中的浸入子流形囊括了所有可能的 n 维光滑流形. 由此可见，当初提出微分流形的概念时强调的是空间的多变性和多样性，因而微分流形的概念有相当大的广泛性，但是它们最终都可以看作欧氏空间的浸入子流形. 这反过来也说明了欧氏空间的子流形的复杂性和多样性. 下面我们通过几个例子说明这种复杂性.

例 2 考虑映射 $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$，其定义为

$$F(t) = \left(2\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \sin 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

它的切映射是

$$F_* \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \left(-2\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right), 2\cos 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

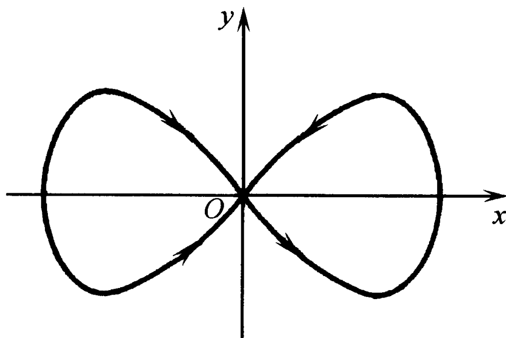


图 8

易见 $F_*\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ 处处不为零，所以 $(F,\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的浸入子流形(图 8).

F 是周期为 2π 的映射，自然它不是单一的映射. 如果把 F 看成定义在圆周 $S^1 = R \bmod 2\pi$ 上的映射，它仍然不是单一的. 实际上，当 $t=\pi$ 和 2π 时，$F(\pi)=F(2\pi)=(0,0)$，即该映射有自交点. F 的图形是一个倒卧的 8 字.

例 3　设映射 $G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ 的定义为

$$G(t)=\left(2\cos\left(2\arctan t-\frac{\pi}{2}\right),\sin 2\left(2\arctan t-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

它是例 2 中的曲线限于一个周期内部 $(-\pi,\pi)$ 的重新参数化. 容易验证：$(G,\mathbf{R})$ 是单一地浸入在 $\mathbf{R}^2$ 中的一维子流形(图 9).

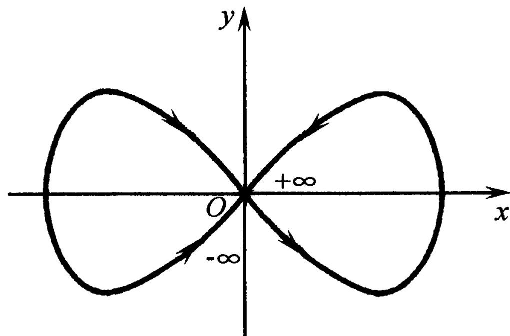


图　9

注意到在 $t=0$ 时，

$$G(0)=(0,0);$$

而当 $t\to\pm\infty$ 时，

$$G(t)\to(0,0).$$

如果把 $\mathbf{R}^2$ 的拓扑诱导到象集 $G(\mathbf{R})$ 上去，那么 $G(\mathbf{R})$ 在点 $(0,0)$ 的邻域是 $\mathbf{R}^2$ 在点 $(0,0)$ 的邻域与 $G(\mathbf{R})$ 的交，即它在 $t=0$ 处的邻域是包含 $(-a,b)\cup(A,+\infty)\cup(-\infty,-B)$ 的子集(这里，a,b,A,B 都是正数). 由此可见，该拓扑与 $\mathbf{R}$ 的标准拓扑是不相同的.

例 4　定义映射 $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ 为

$$F(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{3}{t^2},\sin\pi t\right), & 1\leqslant t<+\infty,\\ (0,t+2), & -\infty<t\leqslant -1,\end{cases}$$

且假定 $F(t)$ 在区间 $[-1,1]$ 内是连结 $(3,0)$ 和 $(0,1)$ 两点的光滑曲线，且与上式给出的两部分图形无交点，那么 $(F,\mathbf{R})$ 也是单一地浸入在 $\mathbf{R}^2$ 中的一维子流形(图 10). 然而当 $t\to+\infty$ 时，曲线围绕 x 轴上、下摆动，并且无限地靠近它自己在 $-3\leqslant t\leqslant -1$ 的部分，以 y 轴上的区间 $[-1,1]$ 为极限点集. 因此 $F(\mathbf{R})$ 作为 $\mathbf{R}^2$ 的拓扑子空间也不可能与 $\mathbf{R}$ 同胚.

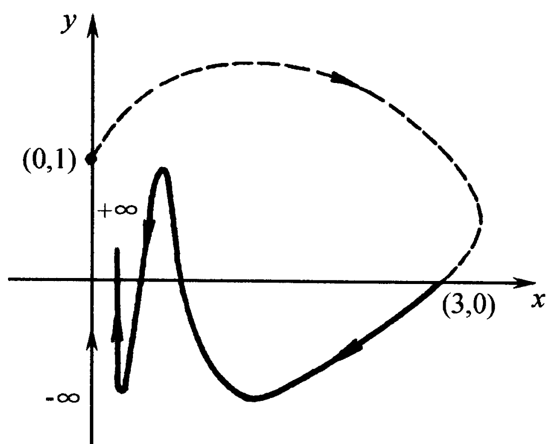


图 10

例 5 环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 可以看作平面 $\mathbf{R}^2$ 上的一个单位正方形将两组对边分别等同之后得到的 2 维流形. 它上面的点可以用一对有序实数(x,y)表示,$0 \leqslant x < 1, 0 \leqslant y < 1$.

取定两个实数 a,b,考虑映射 $\varphi: \mathbf{R} \to T^2$,使得

$$\varphi(t) = (at \bmod 1, bt \bmod 1).$$

当$a:b$为有理数时,易见φ是周期映射,它实际上是一个圆周在T^2中的浸入.当$a:b$为无理数时,$\varphi: \mathbf{R} \to T^2$ 是 $\mathbf{R}$ 在 T^2 中的单一的浸入映射,并且可以证明:象集 $\varphi(\mathbf{R})$ 在 T^2 中是处处稠密的(图 11).

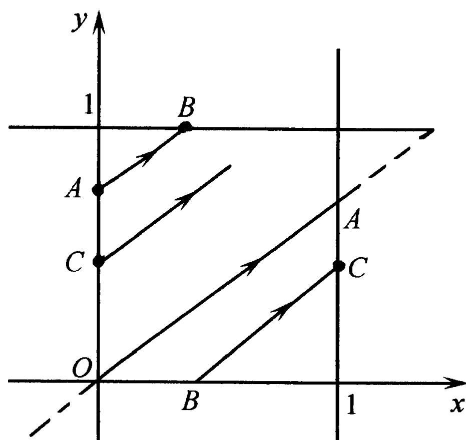


图 11

例 3,例 4,例 5 的共同特点是:它们都是单一的浸入子流形$f: M \to N$,但是M与作为N的拓扑子空间的象集$f(M)$不是同胚的. 事实上,当$f: M \to N$是单一的浸入映射时,可以把 M 和它的象集 $f(M)$ 等同起来,从而把 M 的拓扑结构和微分结构搬到象集 $f(M)$ 上来. 自然,当 $f(M)$ 具有这种拓扑结构和

微分结构时，映射 $f: M \to f(M)$ 是可微同胚. 然而在 $f(M)$ 上还可以赋予从 N 诱导的拓扑. 一般说来，在 $f(M)$ 上的这两种拓扑是不一致的，并且在 $f(M)$ 上从 M 搬过来的拓扑比从 N 诱导在 $f(M)$ 上的拓扑要细，即 $f(M)$ 作为从 N 诱导的拓扑空间的任意一个开集是 $f(M)$ 关于从 M 移植过来的拓扑下的若干开集之并. 这种现象导致下面的定义：

定义 4.3 设 $f: M \to N$ 是光滑地浸入在光滑流形 N 中的子流形，如果

(1) f 是单一的；

(2) 当象集 $f(M)$ 作为从 N 诱导的拓扑空间时，$f: M \to f(M)$ 是同胚，则称 (f, M) 是 N 的**嵌入子流形**.

判断一个单一的光滑浸入子流形何时是一个嵌入子流形是十分重要的. 下面两个定理给出了这种判断准则.

定理 4.3 设 $\varphi: M \to N$ 是单一的光滑浸入子流形，若 M 是紧致的，则 (φ, M) 是 N 的嵌入子流形.

证明 由拓扑学的命题，从紧致拓扑空间到 Hausdorff 拓扑空间的一一的连续映射必是同胚. 现在 $\varphi(M)$ 作为 N 的拓扑子空间仍是 Hausdorff 空间. 对于任意一点 $p \in M$，因 $\varphi: M \to N$ 的连续性，对于 N 在点 $\varphi(p)$ 的任意一个开邻域 U，必有 M 在点 p 的开邻域 V，使得 $\varphi(V) \subset U$，即 $\varphi(V) \subset \varphi(M) \cap U$，故 $\varphi: M \to \varphi(M)$ 是一一的连续映射. 因此在 M 是紧致空间的假定下，$\varphi: M \to \varphi(M) \subset N$ 是同胚，即 (φ, M) 是 N 的嵌入子流形.

定理 4.4 单一的浸入子流形 $\varphi: M \to N$ 是 N 的嵌入子流形，当且仅当对于每一点 $p \in M$，存在点 $q = \varphi(p)$ 在 N 中的局部坐标系 $(V; y^\alpha)$，使得 $y^\alpha(q) = 0$，且

$$\varphi(M) \cap V = \{s \in V : y^\nu(s) = 0, m+1 \leqslant \nu \leqslant n\}. \tag{4.1}$$

证明 假定 $\varphi: M \to N$ 是 N 的嵌入子流形. 根据定理 4.2，存在点 p 的局部坐标系 $(U; x^i)$ 和点 $q = \varphi(p)$ 的局部坐标系 $(V; y^\alpha)$，使得

$$\varphi(U) \subset V,$$

且
$$\varphi(U) = \{s \in V : y^\nu(s) = 0, m+1 \leqslant \nu \leqslant n\}.$$

因为 φ 是嵌入，所以 $\varphi: M \to \varphi(M)$ 是同胚，其中 $\varphi(M)$ 具有从 N 诱导的拓扑. 这样，由于 $\varphi(U)$ 是 $\varphi(M)$ 的开子集，故有 N 的开子集 W，使得

$$\varphi(U) = \varphi(M) \cap W.$$

不妨设 $W \subset V$，于是

$$\begin{aligned}\varphi(M) \cap W &= \varphi(U)\\ &= \{s \in V : y^\nu(s) = 0, m+1 \leqslant \nu \leqslant n\}\\ &= \{s \in W : y^\nu(s) = 0, m+1 \leqslant \nu \leqslant n\},\end{aligned}$$

(4.1) 式成立.

反过来,我们要证明:在假定(4.1)式成立时,逆映射

$$\varphi^{-1}: \varphi(M)(\subset N) \to M$$

是连续的,即对于任意一点 $p \in M$ 的邻域 U,能找到 N 在点 $q = \varphi(p)$ 的邻域 V,使得

$$\varphi^{-1}(\varphi(M) \cap V) \subset U.$$

在(4.1)式的条件下,取点 q 的邻域

$$\widetilde{V} = \{s \in V: |y^{\alpha}(s)| < \delta\}, \tag{4.2}$$

其中 δ 是充分小的正数. 由于 φ 的连续性,存在点 p 的局部坐标系$(\widetilde{U}; x^i)$,使得

$$\widetilde{U} \subset U, x^i(p) = 0,$$

并且

$$\varphi(\widetilde{U}) \subset \widetilde{V},$$

于是 $\varphi|_{\widetilde{U}}$ 可以用局部坐标表示为

$$\begin{cases} y^i = \varphi^i(x^1, \cdots, x^m), & 1 \leqslant i \leqslant m, \\ y^{\nu} = 0, & m+1 \leqslant \nu \leqslant n. \end{cases} \tag{4.3}$$

因为 φ 是浸入,故 Jacobi 行列式

$$\left.\frac{\partial(\varphi^1, \cdots, \varphi^m)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)}\right|_{x^i=0} \neq 0.$$

根据定理 4.1,存在正数 $\delta_1 < \delta$,使得函数组 $\varphi^1, \cdots, \varphi^m$ 有反函数

$$x^i = \psi^i(y^1, \cdots, y^m), \qquad |y^i| < \delta_1. \tag{4.4}$$

令

$$V_1 = \{s \in \widetilde{V}: |y^{\alpha}(s)| < \delta_1\}, \tag{4.5}$$

则 $q \in V_1 \subset \widetilde{V}$. 由(4.1)式,我们有

$$\begin{aligned} \varphi(M) \cap V_1 &= V_1 \cap \{s \in V: y^{\nu}(s) = 0, m+1 \leqslant \nu \leqslant n\} \\ &= \{s \in V_1: y^{\nu}(s) = 0, m+1 \leqslant \nu \leqslant n\}. \end{aligned}$$

我们要证

$$\varphi^{-1}(\varphi(M) \cap V_1) \subset \widetilde{U} \subset U.$$

事实上,设 $x \in M$,且 $\varphi(x) \in \varphi(M) \cap V_1$,故

$$|y^i(\varphi(x))| < \delta_1, \qquad y^{\nu}(\varphi(x)) = 0.$$

由(4.4)式,存在点 $\tilde{x} \in \widetilde{U}$,使得

$$\tilde{x}^i = \psi^i(y^1(\varphi(x)), \cdots, y^m(\varphi(x))),$$

因而

$$\varphi^i(\tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^m) = y^i(\varphi(x)) = \varphi^i(x^1, \cdots, x^m);$$

又因为 $\varphi(\widetilde{U}) \subset \widetilde{V}$,故有

$$y^{\nu}(\varphi(\tilde{x})) = 0,$$

所以

$$\varphi(\tilde{x}) = \varphi(x).$$

由于 φ 是单一的,故 $x=\widetilde{x}\in\widetilde{U}$. 证毕.

定理 4.2 和定理 4.4 十分清楚地反映出浸入子流形和嵌入子流形之间的差别. 在浸入子流形的情形,只能做到流形 M 在每一点有一个邻域,这个邻域的象落在流形 N 的一个局部坐标域的某个坐标面之内,而 M 在该邻域外的其余部分也可能映到这个局部坐标域内. 甚至于无论 N 的局部坐标域取得多么小,它总是会包含 M 在该点邻域外的部分. 嵌入子流形的要求则强得多,即要求 M 的每一点的象点都有在 N 中的邻域 V,使得象集 $\varphi(M)$ 与 V 之交完全落在 V 的某个坐标面内,即在 V 内除去该坐标面外再没有象集 $\varphi(M)$ 的点. 容易看出,例 3,例 4,例 5 都不适合定理 4.4 的条件.

H. Whitney 在本世纪 30 年代开始对于 n 维微分流形在欧氏空间中的嵌入问题进行过系统而深刻的研究. 他给出、并且证明了下列定理:

Whitney 定理 设 M 是 m 维 C^r 微分流形($1\leqslant r\leqslant\infty$),则存在 C^r 映射 $f: M\to E^{2m}$,使得 (f,M) 成为 E^{2m} 的浸入子流形,且 $f(M)$ 是 E^{2m} 中的闭子集;并且存在单一的 C^r 映射 $\widetilde{f}: M\to E^{2m+1}$,使得 $(\widetilde{f},M)$ 成为 E^{2m+1} 的嵌入子流形,且 $\widetilde{f}(M)$ 是 E^{2m+1} 中的闭子集.

Whitney 的一个更深刻的结果说,M 实际上是能够嵌入到欧氏空间 E^{2m} 中去的.

Whitney 的这些结果是艰深的;而且确实存在 n 维流形,它不能嵌入在 E^{2n-1} 中,故 Whitney 的结果已经是最好的了. 读者可以参考他自己的书[28],以及张筑生的讲义[15].

限于目前所具备的知识,我们能证明一个紧致的光滑流形总是可以嵌入到充分高维的欧氏空间内作为嵌入子流形.

定理 4.5 设 M 是 m 维紧致光滑流形,则存在正整数 n 以及光滑映射 $\varphi: M\to\mathbf{R}^n$,使得 (φ,M) 成为 $\mathbf{R}^n$ 的嵌入子流形.

证明 根据定理 4.3,我们只要构造出单一的浸入映射 $\varphi: M\to\mathbf{R}^n$ 就够了.

因为 M 是紧致的光滑流形,故存在有限多个局部坐标系 $(U_\lambda; x_\lambda^i)$,$1\leqslant\lambda\leqslant r$,以及开集 V_λ, W_λ,使得每一个 $\overline{V}_\lambda$ 是紧致的,$\overline{V}_\lambda\subset W_\lambda\subset\overline{W}_\lambda\subset U_\lambda$,并且 $\{V_\lambda: 1\leqslant\lambda\leqslant r\}$ 构成 M 的开覆盖. 由 §2 的引理 2.2,存在光滑函数 $f_\lambda\in C^\infty(M)$,使得

$$f_\lambda|_{V_\lambda}\equiv 1,\qquad f_\lambda|_{M\setminus W_\lambda}\equiv 0.$$

于是可以构造 $n=r(m+1)$ 个定义在 M 上的光滑函数:

$$y_\lambda^0=f_\lambda,\tag{4.6}$$

$$y_\lambda^i(p)=\begin{cases}x_\lambda^i(p)\cdot f_\lambda(p), & p\in U_\lambda\\ 0, & p\notin U_\lambda,\end{cases} \tag{4.7}$$

其中 $1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant\lambda\leqslant r$，它们给出了从 M 到 $\mathbf{R}^n$ 的光滑映射 φ. 我们要证明 φ 是单一的浸入.

关于 φ 的单一性. 设 $p,q\in M$，且 $\varphi(p)=\varphi(q)$，则有

$$y_\lambda^0(p)=y_\lambda^0(q),\qquad y_\lambda^i(p)=y_\lambda^i(q), \forall\, i,\lambda.$$

因为 $\{V_\lambda: 1\leqslant\lambda\leqslant r\}$ 是 M 的覆盖，不妨设 $p\in V_\alpha$，故

$$f_\alpha(p)=y_\alpha^0(p)=y_\alpha^0(q)=f_\alpha(q)=1,$$

于是 q 必属于 U_α（因为 $\mathrm{Supp}f_\alpha\subset U_\alpha$）. 又有

$$x_\alpha^i(q)=y_\alpha^i(q)=y_\alpha^i(p)=x_\alpha^i(p),$$

故 p,q 在 U_α 内有相同的坐标，因此 $p=q$.

关于 φ 是浸入. 实际上当 $p\in V_\alpha$ 时，我们有

$$y_\alpha^i(p)=x_\alpha^i(p),$$

于是在 V_α 内有

$$\frac{\partial(y_\alpha^1,\cdots,y_\alpha^m)}{\partial(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^m)}=1,$$

因此光滑映射 φ 的秩处处等于 $m=\dim M$，即 $\varphi: M\to\mathbf{R}^n$ 是浸入，证毕.

如果 n 恰好等于 $2m+1$，则上面的定理便是 Whitney 的结果（在 M 是紧致流形的情形）. 如果 $n>2m+1$，则我们在 $\mathbf{R}^n$ 中能找到一个方向，使得 $\mathbf{R}^n$ 中沿该方向的正交投影与 φ 的复合映射 $\tilde{\varphi}: M\to\mathbf{R}^{n-1}$ 仍然是单一的浸入，从而 $\tilde{\varphi}$ 是嵌入（参看附录 2）. 上述方向的存在性的证明要用到 Sard 定理及球丛等概念. 在证明了这个断言之后，Whitney 定理在 M 是紧致光滑流形的情形便得到了证明.

在本节的最后，我们要提一下淹没的概念.

定义 4.4 设 M,N 分别是 m 维和 n 维光滑流形，$f: M\to N$ 是光滑映射. 若在点 $p\in M$，f 的秩 $\mathrm{rk}_p(f)=n$，则称 f 在点 p 是**淹没**. 若映射 $f: M\to N$ 是满的，并且 f 在 M 的每一点都是淹没，则称 f 是**淹没映射**.

很明显，如果 f 是淹没，则必然有 $m\geqslant n$.

例 6 从 m 维欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 到它的低维线性子空间 $\mathbf{R}^n(m>n)$ 的正交投影是淹没映射的典型例子，其定义是

$$(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1},\cdots,x^m)\longmapsto (x^1,\cdots,x^n).$$

例 7 设 $f: M\to\mathbf{R}$ 是 m 维光滑流形 M 上的光滑函数. 若 $\mathrm{d}f$ 在点 $p\in M$ 不为零，则 f 在点 p 是淹没. 若 $\mathrm{d}f$ 在 M 上处处不为零，则 f 是从 M 到 $f(M)\subset\mathbf{R}$ 上的一个淹没映射. 实际上，容易证明 $f(M)$ 是 $\mathbf{R}$ 的开子集，因而是 $\mathbf{R}$ 的开子流形. 另外，$\mathrm{d}f$ 处处不为零意味着 f 的秩处处为 1，所以 $f: M\to f(M)\subset$

R 是淹没.

§5　进一步的例子

在前面各节我们已经介绍了微分流形的基本概念和例子，本节的目的是介绍更多的例子. 这些例子本身是经典的，并且在叙述这些例子的过程中，我们要给出几个一般性的结果，它们无论在理论上还是在实际应用中都是重要的. 通过本节的例子还可以了解到微分流形的概念和理论与许多数学分支学科的紧密联系.

1°　Grassmann 流形

n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中全体 m 维线性子空间的集合记作 $G(m,n)$，它是 $m(n-m)$ 维光滑流形，称为 Grassmann **流形**. 自然，射影空间 RP^{n-1} 就是 $G(1,n)$. 下面我们描述 $G(m,n)$ 的拓扑结构和微分结构.

设 $p \in G(m,n)$，则可取 $\mathbf{R}^n$ 中 m 个线性无关的向量 $v_1,\cdots,v_m \in p$ 构成子空间 p 的基底，记成

$$p = \mathrm{Span}\{v_1,\cdots,v_m\}.$$

子空间 p 的基底确定到差一个满秩线性变换，即：若有另外 m 个向量 $u_1,\cdots,u_m \in p$ 构成它的基底，则有 $m \times m$ 非退化矩阵 (a_α^β)，使得

$$u_\alpha = \sum_{\beta=1}^{m} a_\alpha^\beta v_\beta,$$

反之亦然.

根据约定，在 $\mathbf{R}^n$ 中已经取定了标准基底 $\{\delta_i\}$，因此每一个向量 v_α 表现为一个列向量 $(v_\alpha^1,\cdots,v_\alpha^n)^t$，所以 p 的基底 $\{v_1,\cdots,v_m\}$ 表现为秩是 m 的 $n \times m$ 矩阵

$$v = \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^n & \cdots & v_m^n \end{pmatrix}.$$

全体 $n \times m$ 矩阵的集合 $M(m,n)$ 是一个 $m \cdot n$ 维向量空间，其中秩为 m 的矩阵的集合记作 $F(m,n)$，它是 $M(m,n)$ 的开子集，所以 $F(m,n)$ 是 $m \cdot n$ 维光滑流形.

在 $F(m,n)$ 中定义如下的关系：设 $u,v \in F(m,n)$，若存在 $m \times m$ 非退化矩阵 A，使得

$$u = v \cdot A, \tag{5.1}$$

则称 u 和 v 是等价的，记为 $u \sim v$. 很明显，$\sim$ 是等价关系. 根据前面的讨论，$\mathbf{R}^n$ 中的 m 维子空间就是 $F(m,n)$ 中在关系 $\sim$ 下的一个等价类. 因此，Grassmann 流形 $G(m,n)$ 就是

$$F(m,n)/\sim.$$

下面，我们将通过 $F(m,n)$ 给出 $G(m,n)$ 的拓扑结构和光滑流形结构. 为此，先对于商拓扑作一些一般性的讨论.

假定 X 是一个拓扑空间，$\sim$ 是 X 中的一个等价关系. 对于 $x\in X$，记 x 的等价类为

$$[x]=\{y\in X: y\sim x\}. \tag{5.2}$$

X 在关系 $\sim$ 下的等价类的集合记为 $X/\sim$. 设 $\pi: X\to X/\sim$ 是自然投影，定义为

$$\pi(x)=[x], \qquad \forall\, x\in X. \tag{5.3}$$

在集合 $X/\sim$ 中可以定义所谓的**商拓扑**，它是使自然投影 π 成为连续映射的最弱拓扑，即：$U\subset X/\sim$ 是开集当且仅当 $\pi^{-1}(U)$ 是 X 中的开集. 赋以商拓扑的空间 $X/\sim$ 称为 X 关于等价关系 $\sim$ 的商空间.

连续映射未必把开集映为开集. 把开集映为开集的连续映射称为**开映射**.

引理 5.1 设 $\sim$ 是拓扑空间 X 中的一个等价关系. 假定自然投影 $\pi: X\to X/\sim$ 是开映射. 如果 X 满足第二可数公理，则商空间 $X/\sim$ 也满足第二可数公理. 如果 X 的对角线集

$$S=\{(x,y)\in X\times X: x\sim y\} \tag{5.4}$$

是 $X\times X$ 的闭子集，则商空间 $X/\sim$ 是 Hausdorff 空间.

证明 设 X 满足第二可数公理，则 X 有一个可数拓扑基 $\{U_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$，其中 $\mathbf{Z}$ 是自然数集. 因为 π 是开映射，$\pi(U_i)$ 是 $X/\sim$ 的开子集. 显然，$\{\pi(U_i)\}_{i\in\mathbf{Z}}$ 构成 $X/\sim$ 的拓扑基. 实际上，若 W 是 $X/\sim$ 的一个开子集，则 $\pi^{-1}(W)$ 是 X 的开子集，故 $\pi^{-1}(W)$ 能表成若干 U_i 的并集，即

$$\pi^{-1}(W)=\bigcup_\alpha U_{i_\alpha}.$$

于是

$$W=\bigcup_\alpha \pi(U_{i_\alpha}).$$

现在假定 X 的对角线集 S 是闭子集. 任取 $[x]\neq[y]\in X/\sim$，于是 $(x,y)\notin S$. 因为 S 是闭子集，故有 x 的开邻域 U 以及 y 的开邻域 V，使得

$$U\times V\subset X\times X-S.$$

这意味着当 $x'\in U, y'\in V$ 时，$(x',y')\notin S$，即 x' 与 y' 不等价. 所以

$$\pi(U)\cap\pi(V)=\varnothing.$$

因为 π 是开映射，故 $\pi(U)$，$\pi(V)$ 分别是 $[x]$，$[y]$ 的开邻域，且它们互不相交，因此 $X/\sim$ 是 Hausdorff 空间.

回到 Grassmann 流形. $F(m,n)$ 是 $M(m,n)=\mathbf{R}^{m\cdot n}$ 的开子流形，故它是满足第二可数公理的 Hausdorff 空间. 首先要指出自然投影 $\pi: F(m,n)\to F(m,n)/\sim$ 是开映射.

用 $G = \mathrm{GL}(m)$ 表示 $m \times m$ 非退化实矩阵所组成的集合($\mathrm{GL}(m)$ 关于矩阵的乘法成为一个群,称为一般线性群,参看本节的 2°). 显然,G 中的元素 A 在 $n \times m$ 矩阵上的右乘是从 $F(m,n)$ 到它自身的同胚,记为 $\varphi_A : F(m,n) \to F(m,n)$,因为它的逆映射是存在的,并且恰好是 $\varphi_{A^{-1}}$. 设 U 是 $F(m,n)$ 的开集,记

$$[U] = \{[u] : u \in U\}.$$

很明显

$$\pi^{-1}([u]) = \{u \cdot A : A \in G\} \subset F(m,n),$$

所以

$$\pi^{-1}([U]) = \bigcup_{A \in G} \varphi_A(U),$$

其中每一个 $\varphi_A(U)$ 是 $F(m,n)$ 的开子集,于是 $\pi^{-1}([U])$ 是 $F(m,n)$ 中的开子集,故 $[U]$ 是 $F(m,n)/\sim$ 中的开子集,这说明 π 是开映射.

设 $u, v \in F(m,n)$,记

$$u = (u_1, \cdots, u_m),$$

$$v = (v_1, \cdots, v_m),$$

这里 u_α, v_α 分别是 n 维列向量. 于是 $u \sim v$,即向量组 $u_1, \cdots, u_m$ 和 $v_1, \cdots, v_m$ 能互相线性表示,当且仅当对于每一个 $1 \leqslant \alpha \leqslant m, u_1, \cdots, u_m, v_\alpha$ 是线性相关的. 令

$$f(u,v) = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{m+1} \leqslant n} \begin{vmatrix} u_i^{i_1} & \cdots & u_m^{i_1} & v_\alpha^{i_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{i_{m+1}} & \cdots & u_m^{i_{m+1}} & v_\alpha^{i_{m+1}} \end{vmatrix}^2, \tag{5.6}$$

则 $f : F(m,n) \times F(m,n) \to \mathbf{R}$ 是连续映射,并且 $u \sim v$ 的充分必要条件是 $f(u,v) = 0$. 因此对角线集是

$$\begin{aligned} S &= \{(u,v) \in F(m,n) \times F(m,n) : u \sim v\} \\ &= f^{-1}(0), \end{aligned}$$

故 S 是 $F(m,n) \times F(m,n)$ 的闭子集. 根据引理 5.1,$G(m,n) = F(m,n)/\sim$ 是满足第二可数公理的 Hausdorff 空间.

为了在 $G(m,n)$ 上建立光滑结构,任取一组指标

$$1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n,$$

把它的相补指标组记为

$$1 \leqslant \bar{i}_1 < \cdots < \bar{i}_{n-m} \leqslant n.$$

用 $D_{i_1 \cdots i_m}(v)$ 记矩阵 $v = (v_1, \cdots, v_m)$ 中第 i_1 行,$\cdots$,第 i_m 行构成的 $m \times m$ 矩阵,剩下的 $(n-m) \times m$ 矩阵记作 $C_{\bar{i}_1 \cdots \bar{i}_{n-m}}(v)$. 令

$$U_{i_1 \cdots i_m} = \{v \in F(m,n) : \det D_{i_1 \cdots i_m}(v) \neq 0\},$$

显然$U_{i_1\cdots i_m}$是$F(m,n)$的开子集,故$\pi(U_{i_1\cdots i_m})$是$G(m,n)$的开子集,而且

$$\{\pi(U_{i_1\cdots i_m}):1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n\}$$

是$G(n,m)$的一个开覆盖.设$v\in U_{i_1\cdots i_m}$,则v等价于

$$v\cdot(D_{i_1\cdots i_m}(v))^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \xi_1^{\bar{i}_1}(v) & \cdots & \xi_m^{\bar{i}_1}(v) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{\bar{i}_{n-m}}(v) & \cdots & \xi_m^{\bar{i}_{n-m}}(v) \end{bmatrix}\begin{matrix}(i_1)\\ \vdots \\ (i_m) \\ (\bar{i}_1) \\ \vdots \\ (\bar{i}_{n-m})\end{matrix}, \tag{5.7}$$

在右端为表达方便起见已作了一个行变换,把第i_1行,…,第i_m行放在最上面,剩下的行放在下面.我们取$\xi_\alpha^{\bar{i}_\lambda}(1\leqslant\alpha\leqslant m,1\leqslant\lambda\leqslant n-m)$为开子集$\pi(U_{i_1\cdots i_m})$上的坐标函数.容易看出,坐标变换是有理分式,因此$G(n,m)$是$m(n-m)$的光滑流形.

坐标函数$\xi_\alpha^{\bar{i}_\lambda}$有明显的几何意义.由(5.7)式可知,$m$维子空间$\mathrm{Span}\{v_1,\cdots,v_m\}\in\pi(U_{i_1\cdots i_m})$的基底是

$$\begin{cases}\tilde{v}_1=\delta_{i_1}+\sum\limits_{\lambda=1}^{n-m}\xi_1^{\bar{i}_\lambda}\delta_{\bar{i}_\lambda},\\ \tilde{v}_m=\delta_{i_m}+\sum\limits_{\lambda=1}^{n-m}\xi_m^{\bar{i}_\lambda}\delta_{\bar{i}_\lambda}.\end{cases}\tag{5.8}$$

因此,$\pi(U_{i_1\cdots i_m})$是在$\mathbf{R}^n$中沿$\delta_{\bar{i}_1},\cdots,\delta_{\bar{i}_{n-m}}$的正交投影下同构于子空间$\mathrm{Span}\{\delta_{i_1},\cdots,\delta_{i_m}\}$的$m$维子空间所组成的集合.$\tilde{v}_1,\cdots,\tilde{v}_m$恰好是在子空间$\pi(v)=\mathrm{Span}\{v_1,\cdots,v_m\}$中分别在上述正交投影下映为$\delta_{i_1},\cdots,\delta_{i_m}$的向量;而$\xi_\alpha^{\bar{i}_\lambda}$恰好是向量$\tilde{v}_\alpha$在补子空间$\mathrm{Span}\{\delta_{\bar{i}_1},\cdots,\delta_{\bar{i}_{n-m}}\}$上的正交投影的分量.

2° 环面T^r和Klein瓶

在§1的例6,我们已经把环面T^r定义为r个圆周(1维单位球面)S^1的积流形.在这里,我们要介绍T^r的另一种构造方法,这种方法有一定的普遍性.

设$\mathbf{R}^r$是r维向量空间,$\mathbf{Z}^r$是r个有序整数的数组的集合.显然,$\mathbf{Z}^r$是$\mathbf{R}^r$的(加法)子群,通常把$\mathbf{Z}^r$称为整格.更一般地,若V是任意一个n维向量空间,$\{\delta_i\}$是V的一个基底,向量δ_i的任意的整系数线性组合便构成一个**整格**.

显然,整格$\mathbf{Z}^r$是一个可数集.此外,在$\mathbf{Z}^r$上赋以离散拓扑,即$\mathbf{Z}^r$中的每一个元素构成一个开子集.按照第六章的说法(参看习题六,第1题),$\mathbf{Z}^r$是一个离散拓扑群,也是一个零维李群.我们定义$\mathbf{Z}^r$在向量空间$\mathbf{R}^r$上的作用如下:对于任意的

$$z = (z^1, \cdots, z^r) \in \mathbf{Z}^r$$

和
$$v = (v^1, \cdots, v^r) \in \mathbf{R}^r,$$

令
$$\theta(z, v) = z + v = (z^1 + v^1, \cdots, z^r + v^r). \tag{5.9}$$

我们可以引进如下的概念，把上面的做法一般化：设 Γ 是一个离散群（群运算记成乘法），即它是一个群，并且是一个可数集，在它上面赋予离散拓扑。设 M 是一个光滑流形，且有映射 $\theta: \Gamma \times M \to M$，使得：

1）对于任意的 $h \in \Gamma$，$\theta(h, \cdot): M \to M$ 是光滑映射；

2）对于单位元素 $e \in \Gamma$，$\theta(e, \cdot) = \mathrm{id}: M \to M$；

3）对于任意的 $h_1, h_2 \in \Gamma$，$x \in M$，有

$$\theta(h_1, \theta(h_2, x)) = \theta(h_1 h_2, x).$$

此时，我们称 θ 是离散群 Γ 在光滑流形 M 上的作用。与第六章 §5 的定义 5.2 相对照，θ 就是左作用在 M 上的零维李氏变换群。

设 $\theta: \Gamma \times M \to M$ 是离散群 Γ 在 M 上的作用。如果当 $h \neq e$ 时，对任意 $x \in M$ 的都有

$$h \cdot x = \theta(h, x) \neq x,$$

则称 θ 的作用没有不动点，或称 Γ 在 M 上的作用是自由的（参看第六章，§5，定义 5.4）。

离散群 Γ 在光滑流形 M 上的作用 θ 称为**纯不连续的**，如果 θ 满足以下两个条件：

1）每一点 $x \in M$ 有一个邻域 U，使得

$$\{h \in \Gamma: h \cdot U \cap U \neq \varnothing\}$$

是有限集，其中 $h \cdot U = \{\theta(h, y): y \in U\}$；

2）若 $x, y \in M$，且 $x \notin \Gamma \cdot y$（即 x, y 不在 Γ 的同一条轨道上），则有 x, y 的邻域 U, V，使得

$$U \cap (\Gamma \cdot V) = \varnothing.$$

对于 Γ 在 M 上的作用，可在 M 上引进关系 $\sim$ 如下：设 $x, y \in M$，则 $x \sim y$ 当且仅当存在 $h \in \Gamma$，使得

$$x = \theta(h, y) = h \cdot y.$$

容易验证：$\sim$ 是 M 上的等价关系。我们把商空间 $M/\sim$ 记为 M/Γ，它具有 §5 的 1° 中所叙述的商拓扑。自然投影记为 $\pi: M \to M/\Gamma$。

我们有下面的定理：

定理 5.2 设 M 是一个光滑流形，Γ 是一个离散群，它有在 M 上的纯不连续的自由作用。则在商空间 $\widetilde{M} = M/\Gamma$ 上有唯一的光滑结构，使得每一点 $p \in \widetilde{M}$ 有一个连通开子集 $\widetilde{U}$，具有下述性质：它的完全逆象 $\pi^{-1}(\widetilde{U})$ 是 M 中一些连通开子集 U_α 的并集，$\pi^{-1}(\widetilde{U}) = \bigcup_\alpha U_\alpha$，并且对每一个 α，$\pi|_{U_\alpha}: U_\alpha \to \widetilde{U}$ 是光滑

同胚.

证明 对于离散群 Γ 在 M 上的作用，其自然投影 $\pi: M \to M/\Gamma$ 必定是开映射. 实际上，对于任意的 $h \in \Gamma, \theta(h, \cdot): M \to M$ 是光滑同胚. 设 U 是 M 中任意一个开子集，则 $h \cdot U$ 是 M 的开子集，并且

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{h \in \Gamma} h \cdot U,$$

即 $\pi^{-1}(\pi(U))$ 是 M 的开子集，故 $\pi(U)$ 是 $\widetilde{M}$ 中的开子集. 于是，当 M 具有第二可数公理时，商空间 $\widetilde{M}$ 也具有第二可数公理(引理 5.1). 另外，纯不连续作用的条件 2) 表明商空间 $\widetilde{M} = M/\Gamma$ 是 Hausdorff 空间.

首先我们断言：对于每一点 $x \in M$，存在点 x 的一个邻域 U，使得当 $e \neq h \in \Gamma$ 时，

$$h \cdot U \cap U = \varnothing.$$

事实上，纯不连续作用的条件 1) 表明，存在点 x 的邻域 V，使得

$$\{h \in \Gamma : h \cdot V \cap V \neq \varnothing\}$$

是有限集. 设该有限集记为

$$\{e, h_1, \cdots, h_s : h_i \neq e\}.$$

由于 θ 的作用是自由的，故 $h_i \cdot x \neq x$. 又因为 M 是 Hausdorff 空间，故有 $h_i \cdot x$ 和 x 的开邻域 V_i 和 U_i，使得 $V_i \cap U_i = \varnothing$. 令

$$U = V \cap \left(\bigcap_{i=1}^{s} U_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{s} h_i^{-1} \cdot V_i\right),$$

则 U 是包含点 x 的非空开子集，而且，$h_i \cdot U \subset V_i$，故

$$h_i \cdot U \cap U \subset V_i \cap U_i = \varnothing.$$

当 $h \in \Gamma \backslash \{e, h_1, \cdots, h_s\}$ 时，自然有

$$h \cdot U \cap U \subset h \cdot V \cap V = \varnothing.$$

由此可见，投影 $\pi|_U : U \to \pi(U)$ 是 1—1 的，因而是从开集 U 到开集 $\widetilde{U} = \pi(U)$ 的同胚.

不失一般性，可以假定 U 是点 x 的连通的容许坐标邻域，坐标映射记为 φ；令

$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ (\pi|_U)^{-1}, \tag{5.10}$$

则 $(\widetilde{U}, \tilde{\varphi})$ 是点 $p = \pi(x) \in \widetilde{M}$ 的一个坐标卡. 由于 $\widetilde{M}$ 上每一点 $p \in \widetilde{M}$ 都是某一点 $x \in \pi^{-1}(p) \subset M$ 在 π 下的象，故上面所给出的坐标卡构成 $\widetilde{M}$ 的坐标覆盖，从而使 $\widetilde{M}$ 成为与 M 同维数的拓扑流形.

进而我们断言：上述这种坐标卡 $(\widetilde{U}, \tilde{\varphi})$ 是彼此 C^∞- 相关的，从而在 $\widetilde{M}$ 上决定了一个光滑结构. 事实上，假定 $(\widetilde{U}, \tilde{\varphi}), (\widetilde{W}, \tilde{\psi})$ 是 $\widetilde{M}$ 上的这样两个坐标卡，$\widetilde{U} \cap \widetilde{W} \neq \varnothing$，且有 M 的容许坐标卡 $(U, \varphi), (W, \psi)$，使得

$$\widetilde{U} = \pi(U), \qquad \widetilde{W} = \pi(W),$$

而且对于任意的 $h \in \Gamma \setminus \{e\}$，有

$$h \cdot U \cap U = \varnothing, \qquad h \cdot W \cap W = \varnothing,$$
$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ (\pi|_U)^{-1}, \qquad \tilde{\psi} = \psi \circ (\pi|_W)^{-1}.$$

我们要证明 $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1}$ 是光滑映射. 为此，任取一点 $p \in \tilde{U} \cap \tilde{W}$，因而有 $x \in U$，$y \in W$，使得

$$p = \pi(x) = \pi(y).$$

如果 $x = y$，则 $U \cap W \neq \varnothing$，故

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap W) \to \varphi(U \cap W)$$

是光滑映射. 取 $x = y$ 的开邻域 $V \subset U \cap W$，则

$$(\pi|_U)|_V = (\pi|_W)|_V,$$

因此

$$\begin{aligned}
&\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1}|_{\tilde{\psi}(\pi(V))} \\
&= \varphi \circ (\pi|_U)^{-1} \circ \pi|_W \circ \psi^{-1}|_{\psi(V)} \\
&= \varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(V)}.
\end{aligned}$$

这意味着映射 $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1}$ 在点 $p \in \tilde{M}$ 是光滑的. 如果 $x \neq y$，则由于 $\pi(x) = \pi(y)$，必有 $h \in \Gamma$，使得 $x = h \cdot y$. 记

$$L_h = \theta(h, \cdot) : M \to M,$$

则 $(h \cdot W, \psi \circ L_{h^{-1}})$ 仍是 M 的容许坐标卡，且

$$x = h \cdot y \in V \cap (h \cdot W).$$

问题已经归结为上面已经讨论过的情形.

在 $\tilde{M}$ 的这种光滑结构下，点 $x \in U$ 和点 $p = \pi(x) \in \tilde{U}$ 的坐标是相同的，$\pi|_U : U \to \tilde{U}$ 是光滑同胚. 由连通开邻域 U 的性质可知

$$\pi^{-1}(\tilde{U}) = \bigcup_{h \in \Gamma} h \cdot U$$

是一些互不相交的连通开子集的并集，并且

$$\pi|_{h \cdot U} = \pi|_U \circ L_{h^{-1}} : h \cdot U \to \tilde{U}$$

是光滑同胚.

在定理 5.2 中所叙述的 $\tilde{M}$ 上的光滑结构的性质与覆盖流形的概念有关. 我们给出下面的定义.

定义 5.1　设 $M, \tilde{M}$ 是两个同维数的光滑流形，$\pi : M \to \tilde{M}$ 是光滑映射. 如果 M 是连通的，并且 π 是满映射，此外对于每一点 $p \in \tilde{M}$，存在连通的开邻域 $\tilde{U}$，使得 $\pi^{-1}(\tilde{U}) = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$ 是一些互不相交的连通开集 U_α 的并集，并且 π 在每一个 U_α 上的限制 $\pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ 是光滑同胚，则称 M 是 $\tilde{M}$ 的**覆盖流形**，π 是覆盖映射.

由此可见，若 Γ 是纯不连续地自由作用在 M 上的离散群，则 M 必是 $\tilde{M} =$

M/Γ 的覆盖流形，投影 $\pi: M \to \widetilde{M}$ 恰好是覆盖映射. 反过来，如果 $\pi: M \to \widetilde{M}$ 是一个覆盖映射，则 $\widetilde{M}$ 可以等同于 M 关于一个纯不连续自由作用的离散群的商空间(请读者考虑如何证明这个断言).

前面所说的整格 $\mathbf{Z}^r$ 显然是纯不连续地自由作用在 $\mathbf{R}^r$ 上的离散群. 由定理 5.2 可知，$\mathbf{R}^r/\mathbf{Z}^r$ 是 r 维光滑流形，即 r 维环面 T^r，并且自然投影 $\pi: \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^r/\mathbf{Z}^r = T^r$ 是覆盖映射. 下面以 T^2 为例说明它的光滑结构.

例 1 环面 T^2 的坐标覆盖.

在 $\mathbf{R}^2$ 中考虑如下的三个连通开邻域(见图 12)：

$$U_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

$$U_2 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : -\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} < y < \frac{2}{3}\right\}$$

$$U_3 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{3} < x < \frac{4}{3}, \frac{1}{3} < y < \frac{4}{3}\right\}$$

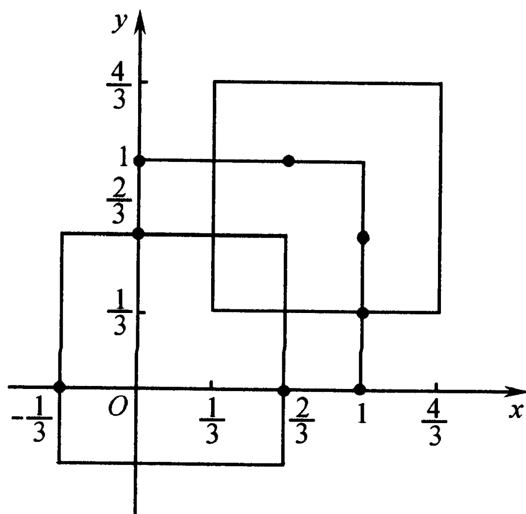


图 12

(U_j, id), $j = 1,2,3$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的三个容许坐标卡. 很明显，对于任意的 $0 \neq z \in \mathbf{Z}^2$，

$$\theta(z, U_j) \cap U_j = \varnothing,$$

所以 $\pi|_{U_j} : U_j \to \widetilde{U}_j = \pi(U_j)$ 是 1—1 的. 令

$$\tilde{\varphi}_j = \mathrm{id} \circ (\pi|_{U_j})^{-1},$$

则 $(\widetilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)$ 是 T^2 的容许坐标卡. 我们要证明 $\{\widetilde{U}_j : 1 \leqslant j \leqslant 3\}$ 是 T^2 的开覆盖. 注意到 $T^2 \backslash (\widetilde{U}_1 \cup \widetilde{U}_2)$ 只含有两个点：$\pi\left(\left(0, \frac{2}{3}\right)\right)$ 和 $\pi\left(\left(\frac{2}{3}, 0\right)\right)$，而它们恰好落在 $\widetilde{U}_3$ 的内部. 于是

$$\{(\widetilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j) : j = 1,2,3\}$$

给出了 T^2 的一个光滑的坐标覆盖. 我们以 $j=1,2$ 为例写出坐标变换 $\tilde{\varphi}_2\circ(\tilde{\varphi}_1)^{-1}$ 的公式,其余的留给读者自己完成.

注意到 $\widetilde{U}_1\cap\widetilde{U}_2$ 有 4 个连通分支,它们是 $\widetilde{V}_\alpha=\pi(V_\alpha)$,　$1\leqslant\alpha\leqslant 4$,其中

$$V_1=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:0<x<\frac{2}{3},0<y<\frac{2}{3}\right\},$$

$$V_2=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\frac{2}{3}<x<1,0<y<\frac{2}{3}\right\},$$

$$V_3=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:0<x<\frac{2}{3},\frac{2}{3}<y<1\right\},$$

$$V_4=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\frac{2}{3}<x<1,\frac{2}{3}<y<1\right\}.$$

所以

$$\tilde{\varphi}_2\circ(\tilde{\varphi}_1)^{-1}|_{\tilde{\varphi}_1(\widetilde{V}_1)}(x,y)=(x,y),$$
$$\tilde{\varphi}_2\circ(\tilde{\varphi}_1)^{-1}|_{\tilde{\varphi}_1(\widetilde{V}_2)}(x,y)=(x-1,y),$$
$$\tilde{\varphi}_2\circ(\tilde{\varphi}_1)^{-1}|_{\tilde{\varphi}_1(\widetilde{V}_3)}(x,y)=(x,y-1),$$
$$\tilde{\varphi}_2\circ(\tilde{\varphi}_1)^{-1}|_{\tilde{\varphi}_1(\widetilde{V}_4)}(x,y)=(x-1,y-1).$$

例 2　Klein 瓶 K.

取一个正方形 $ABCD$(图 13),将对边 AB,DC 等同起来,同时将对边 AD 和 CB 等同起来,则我们便得到 Klein 瓶 K. 它不能实现为 $\mathbf{R}^3$ 中的封闭曲面. 但是如果允许该曲面自相交,则它可以想象成图 13 所示的曲面.

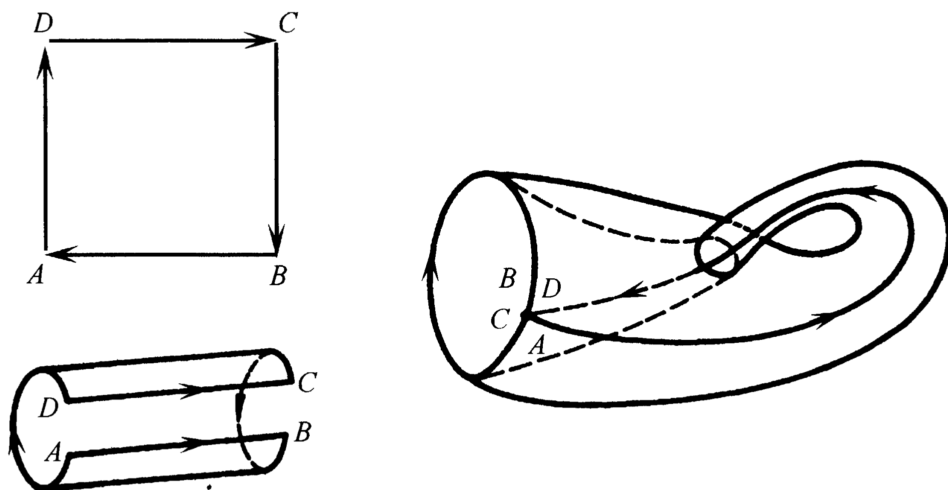


图　13

下面我们把 Klein 瓶描述成 $\mathbf{R}^2$ 在一个离散群的纯不连续群的自由作用下的商空间. 考虑 $\mathbf{R}^2$ 到它自身的两个运动:

$$a(x,y)=(x,y+1),$$
$$b(x,y)=(x+1,1-y).$$

很明显,a 是 $\mathbf{R}^2$ 沿 y 轴正向平移一个单位的运动,b 是 $\mathbf{R}^2$ 沿 x 轴正向平移一个单位.同时又作关于直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 的对称的合成运动.

用 G 表示由 a,b 生成的群.容易验证,a,b 满足关系式

$$ba=a^{-1}b,\qquad ba^{-1}=ab$$

所以 G 中的元素可以唯一地表示为 $a^m\cdot b^n$,其中 $m,n\in\mathbf{Z}$.直接计算得到

$$a^m(x,y)=(x,y+m),$$

$$b^n(x,y)=\left(x+n,\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}+(-1)^n y\right),$$

因此

$$a^m\cdot b^n(x,y)=\left(x+n,\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}+(-1)^n y+m\right).\qquad(5.11)$$

显然,G 是一个离散群,且它在 $\mathbf{R}^2$ 上的作用是自由的.

设 (x_0,y_0) 是 $\mathbf{R}^2$ 中任意一点,令

$$U_0=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: x_0-\frac{1}{2}<x<x_0+\frac{1}{2},y_0-\frac{1}{2}<y<y_0+\frac{1}{2}\right\},$$

则对于任意的 $h=a^m\cdot b^n$(m,n 不全为零),有

$$h\cdot U_0\cap U_0=\varnothing.$$

另取任意的 $(x_1,y_1)\in\mathbf{R}^2$,使得

$$(x_1,y_1)\notin G\cdot(x_0,y_0),$$

则

$$\varepsilon=\min\{d(h\cdot(x_1,y_1),(x_0,y_0)): h\in G\}$$

是正数.令

$$V_0=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: d((x,y),(x_0,y_0))<\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$V_1=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: d((x,y),(x_1,y_2))<\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

容易看出,对于任意的 $h\in G$,有

$$V_0\cap(h\cdot V_1)=\varnothing.$$

由此可见,G 是纯不连续自由作用在 $\mathbf{R}^2$ 上的离散群.由定理 5.2,商空间 $\mathbf{R}^2/G$ 是一个 2 维光滑流形.

取正方形 $ABCD$ 为区域(图 14)

$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

群 G 的作用恰好是将边界 AB 和 DC 等同起来,将 AD 和 CB 等同起来.因此,$\mathbf{R}^2/G$ 就是 Klein 瓶 K.

下面给出 K 的光滑流形结构.令

$$U_1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: 0<x<1,0<y<1\},$$

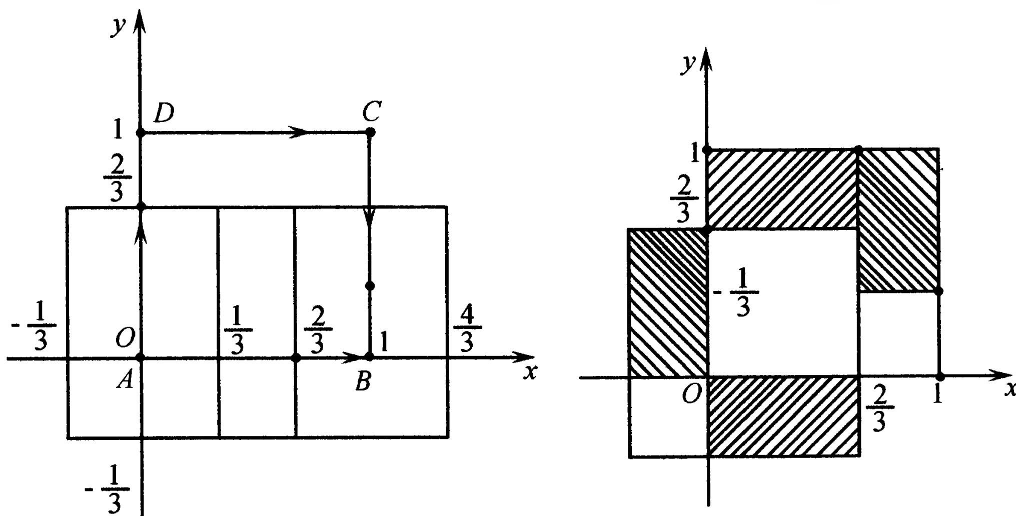


图　14

$$U_2=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ -\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3},-\frac{1}{3}<y<\frac{2}{3}\right\},$$

$$U_3=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ \frac{1}{3}<x<\frac{4}{3},-\frac{1}{3}<y<\frac{2}{3}\right\}.$$

它们具有性质:$\forall\ e\neq h\in G$,有

$$h\cdot U_j\cap U_j=\varnothing,\qquad j=1,2,3,$$

故 $\pi|_{U_j}: U_j\to\pi(U_j)=\widetilde{U}_j$ 是1—1的.令

$$\tilde{\varphi}_j=\mathrm{id}\circ(\pi|_{U_j})^{-1},$$

则定理5.2告诉我们

$$\{(\widetilde{U}_j,\tilde{\varphi}_j):j=1,2,3\}$$

是K的容许坐标卡集.我们断言$\{\widetilde{U}_j:j=1,2,3\}$是$K$的一个开覆盖.事实上,在$K\backslash(\widetilde{U}_1\cup\widetilde{U}_2)$中含有两点,它们是$\pi\left(\left(0,\frac{2}{3}\right)\right)$和$\pi\left(\left(\frac{2}{3},0\right)\right)$.很明显,这两点是$\widetilde{U}_3$的内点.(注意:在例1和例2中,$U_3$的取法是不同的.想一想,能否将例1中的$U_3$取为例2中的$U_3$?为什么?)

在这里我们以$j=1,2$为例,写出坐标变换$\tilde{\varphi}_2\circ(\tilde{\varphi}_1)^{-1}$的公式;其余的坐标变换公式请读者自己写出来.

容易看到$\widetilde{U}_1\cap\widetilde{U}_2$有4个连通分支$\widetilde{V}_\alpha=\pi(V_\alpha)$,　$\alpha=1,2,3,4$,其中

$$V_1=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:0<x<\frac{2}{3},0<y<\frac{2}{3}\right\},$$

$$V_2=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ \frac{2}{3}<x<1,\frac{1}{3}<y<1\right\},$$

$$V_3=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:0<x<\frac{2}{3},\frac{2}{3}<y<1\right\},$$

$$V_4 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{2}{3} < x < 1, 0 < y < \frac{1}{3}\right\}.$$

根据定理 5.2 的证明可知

$$\tilde{\varphi}_2 \circ (\tilde{\varphi}_1)^{-1}|_{\tilde{\varphi}_1(\tilde{V}_1)}(x,y) = (x,y),$$

$$\tilde{\varphi}_2 \circ (\tilde{\varphi}_1)^{-1}|_{\tilde{\varphi}_1(\tilde{V}_2)}(x,y) = (x-1, 1-y),$$

$$\tilde{\varphi}_2 \circ (\tilde{\varphi}_1)^{-1}|_{\tilde{\varphi}_1(\tilde{V}_3)}(x,y) = (x, y-1),$$

$$\tilde{\varphi}_2 \circ (\tilde{\varphi}_1)^{-1}|_{\tilde{\varphi}_1(\tilde{V}_4)}(x,y) = (x-1, -y).$$

3° 一般线性群及其子群

我们用 $\mathrm{GL}(n)$ 表示 $n \times n$ 非退化实矩阵的集合. 设 $A \in \mathrm{GL}(n)$, 则

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{bmatrix}, \tag{5.12}$$

且

$$\det A \neq 0. \tag{5.13}$$

由此可见, $\mathrm{GL}(n)$ 是 $\mathbf{R}^{n^2}$ 中的一个开子集, 因此 $\mathrm{GL}(n)$ 具有作为 $\mathbf{R}^{n^2}$ 的开子流形的光滑结构.

若 $A, B \in \mathrm{GL}(n)$, 则

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0,$$

所以 $A \cdot B \in \mathrm{GL}(n)$. $\mathrm{GL}(n)$ 是一个群, 称为(实) **一般线性群**(更确切的记号是 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, 在本书我们省去 $\mathbf{R}$ 不写). $\mathrm{GL}(n)$ 有一系列重要的子群:

$$\mathrm{SL}(n) = \{a \in \mathrm{GL}(n) : \det a = 1\}, \tag{5.14}$$

$$\mathrm{O}(n) = \{a \in \mathrm{GL}(n) : a \cdot a^t = I\}, \tag{5.15}$$

$$\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SL}(n) \cap O(n), \tag{5.16}$$

其中 I 是 $n \times n$ 单位矩阵, 它们分别称为**特殊线性群**, **正交群**和**特殊正交群**. 我们的断言是: 它们都是光滑流形, 并且是 $\mathrm{GL}(n)$ 的嵌入子流形.

我们先证明几个一般性的结果:

引理 5.3 设 M, N 分别是 m 维和 n 维光滑流形, $f: M \to N$ 是光滑映射. 如果 f 的秩处处是 r, 则在每一点 $p \in M$ 及点 $q = f(p) \in N$ 分别有局部坐标系 $(U; x^i)$ 和 $(V; y^\alpha)$, 使得

$$f(U) \subset V, \quad x^i(p) = 0, \quad y^\alpha(q) = 0,$$

并且映射 $f|_U$ 的局部坐标表达式是

$$\begin{cases} y^a \circ f|_U = x^a, & 1 \leqslant a \leqslant r, \\ y^\lambda \circ f|_U = 0, & r+1 \leqslant \lambda \leqslant n, \end{cases} \tag{5.17}$$

即

$$f(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^r,0,\cdots,0).$$

证明　此引理是第二章定理4.2的一般情形，其证明相仿，是定理4.1的推论.

取光滑流形 M 在点 p 的局部坐标系 $(U;x^i)$ 和光滑流形 N 在点 q 的局部坐标系 $(V;y^\alpha)$，且 $f(U)\subset V$，则可设映射 $f|_U$ 的局部坐标表达式是

$$y^\alpha=f^\alpha(x^1,\cdots,x^m).$$

假定 $x^i(p)=0, y^\alpha(q)=0$. 因为映射 f 的秩处处是 r，不妨设在 U 上有

$$\frac{\partial(f^1,\cdots,f^r)}{\partial(x^1,\cdots,x^r)}\neq 0.$$

令

$$\begin{cases} z^a=f^a(x^1,\cdots,x^m), & 1\leqslant a\leqslant r,\\ z^\mu=x^\mu, & r+1\leqslant\mu\leqslant m.\end{cases}$$

则

$$\frac{\partial(z^1,\cdots,z^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\neq 0.$$

于是存在点 p 的邻域 $U'\subset U$，使得 $z^1,\cdots,z^m$ 可以作为区域 U' 上的局部坐标，并且 $z^i(p)=0,\forall\ i$.

在局部坐标系 $(U';z^i)$ 下，映射 f 的表达式成为

$$\begin{cases} y^\alpha=z^\alpha, & 1\leqslant\alpha\leqslant r,\\ y^\lambda=\tilde{f}^\lambda(z^1,\cdots,z^m), & r+1\leqslant\lambda\leqslant n,\end{cases}$$

它的 Jacobi 矩阵为

$$\left(\begin{array}{c|ccc} I_r & 0 & \cdots & 0\\ \hline & \dfrac{\partial\tilde{f}^{r+1}}{\partial z^{r+1}} & \cdots & \dfrac{\partial\tilde{f}^{n}}{\partial z^{r+1}}\\ * & \vdots & \vdots & \vdots\\ & \dfrac{\partial\tilde{f}^{r+1}}{\partial z^{m}} & \cdots & \dfrac{\partial\tilde{f}^{n}}{\partial z^{m}} \end{array}\right),$$

其中 I_r 为 $r\times r$ 单位矩阵. 由于 f 的秩为 r，故必有

$$\frac{\partial\tilde{f}^\lambda}{\partial z^\mu}=0,\quad r+1\leqslant\lambda\leqslant n,\quad r+1\leqslant\mu\leqslant m, \tag{5.18}$$

即 $\tilde{f}^\lambda$ 只依赖于坐标 $z^1,\cdots,z^r$，而与 $z^{r+1},\cdots,z^m$ 无关.

取充分小的 δ，令

$$U_1=\{(z^1,\cdots,z^r):\ |z^a|<\delta\},$$
$$U_2=\{(z^{r+1},\cdots,z^m):\ |z^\mu|<\delta\},$$

使得$U_1\times U_2\subset U'$. 性质(5.18)表明,存在光滑映射$\varphi: U_1\to N$,使得

$$f|_{U_1\times U_2}=\varphi\circ\pi, \tag{5.19}$$

其中$\pi: U_1\times U_2\to U_1$是自然投影. 显然,$\varphi$的秩处处是$r$.

将定理4.2用于映射$\varphi: U_1\to N$,则存在q的局部坐标系$(V';w^\alpha)$,使得$\varphi(U_1)\subset V'$,且

$$\begin{cases} w^a\circ\varphi=z^a, & 1\leqslant a\leqslant r,\\ w^\lambda\circ\varphi=0, & r+1\leqslant\lambda\leqslant n.\end{cases}$$

于是在$U''=U_1\times U_2$中有坐标系z^i及在V'中的坐标系w^α,使得

$$\begin{cases} w^a\circ f=z^a, & 1\leqslant a\leqslant r,\\ w^\lambda\circ f=0, & r+1\leqslant\lambda\leqslant n.\end{cases}$$

定理 5.4 设M,N分别是m维和n维光滑流形,$f: M\to N$是光滑映射,它的秩处处是r. 则对于任意的$q\in f(M)$,$f^{-1}(q)$是M的$m-r$维闭的嵌入子流形.

证明 记$A=f^{-1}(q)\neq\varnothing$. 因为映射$f$的连续性,$A$是$M$的闭子集. 由引理5.3,对于任意的$p\in A$,存在点$p$的局部坐标系$(U;x^i)$及点$q=f(p)$的局部坐标系$(V;y^\alpha)$,使得

$$f(U)\subset V,\quad x^i(p)=0,\quad y^\alpha(q)=0,$$

并且

$$y^a\circ f=x^a,\qquad 1\leqslant a\leqslant r,$$
$$y^\lambda\circ f=0,\qquad r+1\leqslant\lambda\leqslant n.$$

这意味着在U中只有前r个坐标为零的点在f的作用下映为q,即

$$A\cap U=\{(x^1,\cdots,x^m)\in U: x^1=\cdots=x^r=0\}.$$

根据定理4.4,A是M的$m-r$维闭的嵌入子流形,并且$(A\cap U;x^\mu|_{A\cap U})$是$A$的局部坐标系.

推论 5.5 设M,N分别是m维和n维光滑流形,$m>n$,$f: M\to N$是光滑映射. 若f在点$p\in M$是淹没,则对于任意的$q=f(p)\in N$,$f^{-1}(q)$是M的$m-n$维闭的嵌入子流形.

现在可用定理5.4证明$\mathrm{SL}(n)$,$\mathrm{O}(n)$是$\mathrm{GL}(n)$的闭的嵌入子流形.

例 3 $\mathrm{SL}(n)$.

定义映射$f:\mathrm{GL}(n)\to\mathbf{R}$为

$$f(a)=\det a,\quad\forall\, a\in\mathrm{GL}(n). \tag{5.20}$$

显然f是光滑映射,并且f的秩处处为1.

实际上,设$a=(a_{ij})$,且记a_{ij}在a中的代数余子式为A^{ij},则

$$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}=A^{ij}. \tag{5.21}$$

对于任意的$a\in\mathrm{GL}(n)$,必有一对指标i,j,使得$A^{ij}\neq0$,故f的秩处处为1. 由

定义，$\mathrm{SL}(n) = f^{-1}(1)$，故 $\mathrm{SL}(n)$ 是 $\mathrm{GL}(n)$ 的 $n^2 - 1$ 维闭的嵌入子流形.

例 4　$\mathrm{O}(n)$.

用 $\mathrm{SM}(n)$ 记 $n \times n$ 对称矩阵的集合. 很明显，$\mathrm{SM}(n)$ 等同于 $\mathbf{R}^N$，其中 $N = \frac{1}{2}n(n+1)$. 定义映射

$$f : \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{SM}(n)$$

为

$$f(a) = a^t \cdot a, \quad \forall\, a \in \mathrm{GL}(n). \tag{5.22}$$

这是光滑映射，并且 $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(e)$，其中 e 是 $n \times n$ 单位矩阵. 我们要证明 f 的秩处处为

$$\frac{n}{2}(n+1).$$

对于 $b \in \mathrm{GL}(n)$，用 $L_b(a)$ 表示在 $\mathrm{GL}(n)$ 的元素 a 的左边乘上 b，用 $R_b(a)$ 表示在 $\mathrm{GL}(n)$ 的元素 a 的右边乘上 b，即

$$L_b(a) = b \cdot a,$$

$$R_b(a) = a \cdot b.$$

很明显，$L_b, R_b : \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{GL}(n)$ 是光滑映射，且

$$(L_b)^{-1} = L_{b^{-1}}, \qquad (R_b)^{-1} = R_{b^{-1}},$$

所以 L_b, R_b 都是 $\mathrm{GL}(n)$ 到自身的可微同胚.

注意到

$$\begin{aligned} f \circ R_b(a) &= (a \cdot b)^t \cdot (a \cdot b) \\ &= b^t \cdot (a^t \cdot a) \cdot b \\ &= L_{b^t} \circ R_b \circ f(a), \end{aligned} \tag{5.23}$$

所以

$$f_{*b} \circ (R_b)_{*e} = (L_{b^t})_{*b} \circ (R_b)_{*e} \circ f_{*e}. \tag{5.24}$$

切映射 $(R_b)_{*e}$ 和 $(L_{b^t})_{*b}$ 都是满秩的，故切映射 f_{*b} 和 f_{*e} 有相同的秩. 我们只需证明 f_{*e} 的秩是 $\frac{1}{2}n(n+1)$.

直接计算得到

$$\begin{aligned} f_{*e}\left(\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right) &= \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial (a^t \cdot a)_{kl}}{\partial a_{ij}}\bigg|_{a=e} \frac{\partial}{\partial a_{kl}} \\ &= \frac{\partial}{\partial a_{ij}} + \frac{\partial}{\partial a_{ji}}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

任取一个 $n \times n$ 矩阵 (c_{ij})，则

$$f_{*e}\left(\sum_{i,j} c_{ij} \frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right)$$

$$= \sum_{i,j} c_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial a_{ij}} + \frac{\partial}{\partial a_{ji}}\right)$$
$$= \sum_{i,j} (c_{ij} + c_{ji}) \frac{\partial}{\partial a_{ij}}.$$

因此

$$\ker f_{*e} = \left\{\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \frac{\partial}{\partial a_{ij}} : c_{ij} + c_{ji} = 0\right\}, \tag{5.26}$$

$$\dim(\ker f_{*e}) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

所以，由维数定理得到

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}_e f &= \dim \mathrm{GL}(n) - \dim(\ker f_{*e}) \\ &= n^2 - \frac{1}{2}n(n-1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1). \end{aligned}$$

根据定理 5.4，$\mathrm{O}(n)$ 是 $\mathrm{GL}(n)$ 的闭的 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 维嵌入子流形.

4° 黎曼曲面

考虑 $\mathbf{R}^3$ 中的单位球面 S^2. 在 §1 我们已经给出过 S^2 的坐标覆盖，现在我们采取另一种做法.

取 S^2 上的点 $P = (0,0,1)$ 为北极，点 $Q = (0,0,-1)$ 为南极. 令

$$U_+ = S^2 \backslash \{P\}, \qquad U_- = S^2 \backslash \{Q\},$$

则 $\{U_+, U_-\}$ 是 S^2 的一个开覆盖. 作球极投影 $\varphi_+ : U_+ \to \mathbf{R}^2$，$\varphi_- : U_- \to \mathbf{R}^2$ 为

$$\varphi_+ (x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) = (\xi, \eta), \tag{5.27}$$

$$\varphi_- (x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{-y}{1+z}\right) = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}). \tag{5.28}$$

将 $\mathbf{R}^2$ 等同于复平面 $\mathbf{C}$，令 $\zeta = \xi + i\eta$，$\tilde{\zeta} = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta}$，则通过映射

$$U_+ \xrightarrow{\varphi_+} \mathbf{R}^2 \xrightarrow{\zeta} \mathbf{C} \quad 和 \quad U_- \xrightarrow{\varphi_-} \mathbf{R}^2 \xrightarrow{\tilde{\zeta}} \mathbf{C}$$

分别建立了 U_+ 和 U_- 与复平面 $\mathbf{C}$ 之间的一一对应，因而复数 ζ 可以作为 U_+ 中的点的坐标，$\tilde{\zeta}$ 可以作为 U_- 中的点的坐标. 这样，在交集 $U_+ \cap U_-$ 中每一点有两个复坐标 ζ 和 $\tilde{\zeta}$，坐标变换是

$$\tilde{\zeta} = \frac{1}{\zeta}, \quad \zeta = \frac{1}{\tilde{\zeta}}. \tag{5.29}$$

由此可见，$\tilde{\zeta}$ 是 ζ 的复解析函数，ζ 是 $\tilde{\zeta}$ 的复解析函数. 在 U_+ 中南极对应于 $\zeta = 0$，在 U_- 中北极对应于 $\tilde{\zeta} = 0$. 上面的复坐标变换公式说明当 $\tilde{\zeta} \to 0$ 时有 $|\zeta| \to$

∞，因此通常在复平面 $\mathbf{C}$ 中加进一个无穷远点 ∞ 成为扩充复平面，记为 $\hat{C}$. 从而在 U_+ 中看，北极正好对应于这个无穷远点. 这就是说，$\hat{C}$ 与 S^2 能够建立一一对应，而无穷远点 ∞(即北极）的复坐标系是由 $\bar{\zeta}\circ\varphi_-: U_-\to\mathbf{C}$ 给出的. 装备了如上复坐标结构的 $\hat{C}$ 或 S^2 称为**黎曼球面**.

上面的例子的一般化就是黎曼曲面.

定义 5.2 设 M 是一个 Hausdorff 拓扑空间. 如果每一点 $p\in M$ 都有一个开邻域 U 以及从 U 到复平面 $\mathbf{C}$ 的一个开子集的同胚 $\varphi: U\to\varphi(U)\subset\mathbf{C}$，因而在每一点 p 的附近能建立复坐标系，并且任意两个这样的复坐标系 (U,φ) 和 (V,ψ) 在 $U\cap V\neq\varnothing$ 时，复坐标变换

$$\psi\circ\varphi^{-1}: \varphi(U\cup V)(\subset\mathbf{C})\to\psi(U\cap V)(\subset\mathbf{C}),$$

$$\varphi\circ\psi^{-1}: \psi(U\cap V)(\subset\mathbf{C})\to\varphi(U\cap V)(\subset\mathbf{C})$$

分别是区域 $\varphi(U\cap V)$ 和 $\psi(U\cap V)$ 上的复解析函数，则称 M 是一个**黎曼曲面**，或一维复流形.

如所周知，定义在区域 $D\subset\mathbf{C}$ 上的复变函数 $w=f(z)$ 是复解析函数的充分必要条件是它满足 Cauchy — Riemann 方程. 即：若设 $z=x+\mathrm{i}y, g=\mathrm{Re}f(z), h=\mathrm{Im}f(z)$，则

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial y},\quad \frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{5.30}$$

黎曼曲面的原始概念是 Riemann 提出来的，他的目的是为了给多值解析函数设想一个单值化的定义域. 最简单的例子是多值函数 $w=\sqrt{z}$.

当 $z\neq 0$ 时，$z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)}$，其中 $0\leqslant\arg z\leqslant 2\pi$. 这样，当 $k=$ 偶数时，给出 w 的一个单值分支

$$(\sqrt{z})_1=|z|^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\arg z};$$

当 $k=$ 奇数时，给出 w 的另一个单值分支

$$(\sqrt{z})_2=|z|^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{1}{2}\arg z+\pi)}$$
$$=-|z|^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\arg z}.$$

取两个 $\mathbf{C}\backslash\{0\}$，将它们沿正实轴割开，所得的区域分别记为 C_1, C_2. C_1 的边界是两条正实轴 L_+^1 和 L_-^1，分别镶在第一象限的下边和第四象限的上边. 同理，C_2 也有这样的边界 L_+^2, L_-^2. $(\sqrt{z})_1$ 在 C_1 的内部是解析的，并且一直连续到 C_1 的边界. 但是当 $z=x>0$ 时，$(\sqrt{z})_1$ 在 L_+^1 和 L_-^1 上的值是不相同的，它们分别是 $\sqrt{x}$ 和 $-\sqrt{x}$. 同理，当 $z=x>0$ 时，$(\sqrt{z})_2$ 在 L_+^2, L_-^2 上的值分别是 $-\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{x}$. 因此，有理由把 L_+^1 与 L_-^2 等同起来，把 L_-^1 与 L_+^2 等同起来，于是得到一张曲面，它是 $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 的二重覆盖. 点 0 可以添加到这张曲面

中去，仍旧得到一个光滑的 2 维流形. 在这张曲面上，$\sqrt{z}$ 成为单值的解析函数. 这个曲面就是在原始意义下函数 $\sqrt{z}$ 的黎曼曲面. 当然，这原始的黎曼曲面符合我们的定义 5.2.

更一般地，可以考虑函数 $f(z,w)=w^q-P_n(z)$，其中 $P_n(z)$ 是 z 的多项式，并且假定 $P_n(z)$ 没有重根. 则由方程 $f(z,w)=0$ 解出的函数 $w=\sqrt[q]{P_n(z)}$ 称为代数函数. 这个代数函数可能是多值函数. 可以证明，方程 $f(z,w)=0$ 在 $\mathbf{C}^2$ 中确定了一个(实)2 维光滑子流形，称为代数函数 $w=\sqrt[q]{P_n(z)}$ 的黎曼曲面. 容易看出，这是一个一维复流形.

代数函数 $w=\sqrt[q]{P_n(z)}$ 的多值性可以作如下理解：考虑投影 $\pi:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^1$，它把一对复数 (z,w) 映为 $(z,0)$，这里把 $\mathbf{C}^1$ 看作 $\mathbf{C}^2$ 中的 z 轴(图 15). 用 Γ 记黎曼曲面 $f(z,w)=0$，将 π 限制在 Γ 上得到映射 $\pi:\Gamma\to\mathbf{C}^1$. 若取 $z_0\in\mathbf{C}^1$，则原象 $\pi^{-1}(z_0)=\pi^{-1}(z_0,0)$ 恰好是 $\mathbf{C}^2$ 中与 w 轴平行的复直线 $H(z_0)$ 与 Γ 的交点，它们是函数 $w=\sqrt[q]{P_n(z)}$ 在点 z_0 的所有可能的函数值. 但是 Γ 是一维复流形，故在点 $P_0\in\Gamma$ 的邻域内，函数 $w=\sqrt[q]{P_n(z)}$ 可改写成 $w=P(\xi)$，其中 ξ 是 Γ 在点 P_0 的邻域内的复坐标，此时 w 是 ξ 的单值函数. 因此，代数函数 $w=\sqrt[q]{P_n(z)}$ 作为 $\xi\in\Gamma$ 的函数是单值的，但是函数自变量的变化区域复杂多了，它不再是 $\mathbf{C}^1$，而是一维复流形 Γ. 因此，代数函数 $w=\sqrt[q]{P_n(z)}$ 的黎曼曲面是这个函数的单值化区域.

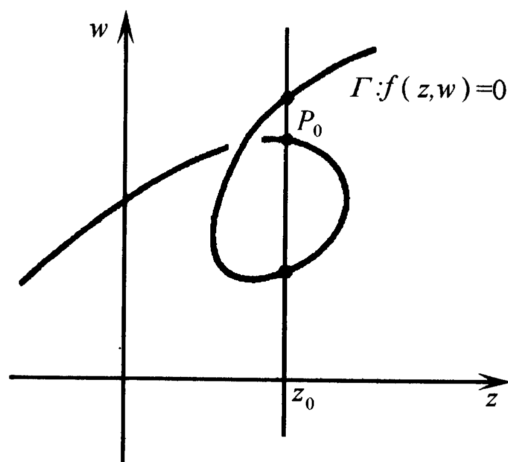


图 15

在复变函数论中我们知道函数 $w=\sqrt[q]{P_n(z)}$ 有 q 个连续分支，并且 $P_n(z)$

的零点是该函数的分歧点(当 z 围绕 $P_n(z)$ 的零点转一周时，函数 $w=\sqrt[q]{P_n(z)}$ 便从一个连续分支变到另一个连续分支). 但是它的黎曼曲面是 $\mathbf{C}^2$ 的光滑子流形，本身没有奇点.

黎曼曲面的近代定义，即我们在这里叙述的定义 5.2，是 H. Weyl 在 1913 年给出的. 流形这个基本概念的严格定义是 H. Weyl 同时给出的，可参看 [27].

黎曼曲面在高维的推广就是所谓的 n 维复流形，其定义和定义 5.2 类似. 读者不妨试着叙述它的定义(参看[2]).

5° 力学中的例子

在物体运动的客观空间中，引入笛卡儿坐标系 $OXYZ$. 为了描述 N 个质点构成的质点组的运动，在同一个笛卡儿坐标系 $OXYZ$ 内考虑，可以把它们表示为

$$\{m_\nu; x_\nu(t), y_\nu(t), z_\nu(t) : \nu = 1, \cdots, N\},$$

其中 t 是时间，m_ν 是第 ν 个质点的质量，$(x_\nu(t), y_\nu(t), z_\nu(t))$ 是第 ν 个质点在时刻 t 的位置，它们的全体表示质点组的位置形态，简称为**位形**. 于是我们可以引入由 $3N$ 个数的数组构成的抽象空间 $\mathbf{R}^{3N}$ 来表现位形，并假定它有标准的欧氏度量，称为质点组的位形空间 C. 质点的每一个位形 c 记作

$$c = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{3N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \end{pmatrix}. \tag{5.31}$$

将时间 t 及在该时刻达到的位形结合在一起构成一个事件. 一个**事件**是指 $3N+1$ 个实数的有序组，即

$$e = (u_1, \cdots, u_{3N}, t)^T. \tag{5.32}$$

它所在的空间就是事件空间 E，这里 T 表示转置.

把时刻 t 时质点组的位形 $(u_1, u_2, \cdots, u_{3N})^T$ 及在该时刻的速度 $(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \cdots, \dot{u}_{3N})^T$ 联合在一起，称为在该时刻质点组的“**状态**”. 状态空间记为 S. 将系统的位形和速度合在一起称为状态的原因是：力学系统一般由二阶常微分方程组所制约(牛顿第二定律)，而时刻 t 的位形和速度给出了该系统的初始条件，因而唯一地确定了系统的过去和未来. 在状态空间 S 中加进时间轴便得到状态时间空间 T.

这些就是描写质点组运动时所用到的几种空间的概念.

质点组的位形 c 被强制限定满足有限方程

$$f(u_1, u_2, \cdots, u_{3N}) = 0,$$

或质点组的事件 e 被强制限定满足有限方程

$$f(u_1, u_2, \cdots, u_{3N}, t) = 0,$$

这样的约束称为**几何约束**. 几何约束的有限方程在事件空间中决定了一张超曲面.

在事件空间中,设 P 是约束曲面上一点. 若从 P 出发能引出一条满足约束方程的轨线到达 Q,则 Q 点称为 P 在约束作用下的可达点.

力学系统由于约束而形成的位形可达子空间往往是一般的微分流形,和欧氏空间是不同胚的. 大范围的 Lagrange 力学就以微分流形为基础(参看[16]). 作为例子,我们叙述广义坐标的概念.

考虑 N 个质点构成的系统,受 d 个独立的几何约束的限制:

$$\begin{cases} f_1(u_1, \cdots, u_{3N}, t) = c_1, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f_d(u_1, \cdots, u_{3N}, t) = c_d. \end{cases} \tag{5.33}$$

所谓几何约束组(5.33)是独立的是指:在所讨论的区域上,Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_{3N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_d}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_d}{\partial u_{3N}} \end{pmatrix}$$

的秩是 d. 不妨设

$$\frac{\partial(f_1, \cdots, f_d)}{\partial(u_1, \cdots, u_d)} \neq 0, \tag{5.34}$$

则可作笛卡儿位形空间 C 到另一个新的空间 X 的变换

$$\begin{cases} x_\alpha = f_\alpha(u_1, \cdots, u_{3N}, t), & 1 \leqslant \alpha \leqslant d, \\ x_\lambda = u_\lambda, & d+1 \leqslant \lambda \leqslant 3N. \end{cases} \tag{5.35}$$

由于

$$\frac{\partial(x_1, \cdots, x_{3N})}{\partial(u_1, \cdots, u_{3N})} \neq 0, \tag{5.36}$$

故根据隐函数定理从(5.35)可解出

$$u_s = u_s(x_1, \cdots, x_d, x_{d+1}, \cdots, x_{3N}, t). \tag{5.37}$$

当然,x_λ 也可以取 $u_1, \cdots, u_{3N}$ 的别的函数,只要 Jacobi 行列式(5.36)不为零即可.

关系式(5.35)和(5.37)建立了 C 空间和 X 空间在所讨论区域上的一一对应. 此时,在 X 空间中看,约束条件(5.33)成为

$$x_1 = c_1, \cdots, x_d = c_d.$$

记

$$x_{d+1} = q_1, \cdots, x_{3N} = q_n, \quad (n = 3N - d), \tag{5.38}$$

则在约束条件(5.33)下系统的 $3N$ 个笛卡儿位形变元 $u_1, \cdots, u_{3N}$ 可以表示成 n 个变元 $q_1, \cdots, q_n$ 的函数

$$\begin{aligned} u_s &= u_s(c_1, \cdots, c_d, x_{d+1}, \cdots, x_{3N}, t) \\ &= u_s(q_1, \cdots, q_n, t), \end{aligned} \tag{5.39}$$

这 n 个变量 $q_1, \cdots, q_n$ 称为系统的 Lagrange **广义坐标**. 从几何上看，广义坐标 $q_1, \cdots, q_n$ 不再具有象笛卡儿坐标那样明确的几何含义，它们只是位形可达子空间(微分流形)中的局部坐标系.

例 5 考虑由两个质点 m_1, m_2 构成的系统，质点 m_1 与定点 O 的距离为 r_1，质点 m_2 与 m_1 的距离为 r_2. 这是由两条细杆连结一个定点与两个质点构成的自由摆，杆的质量不计(图 16).

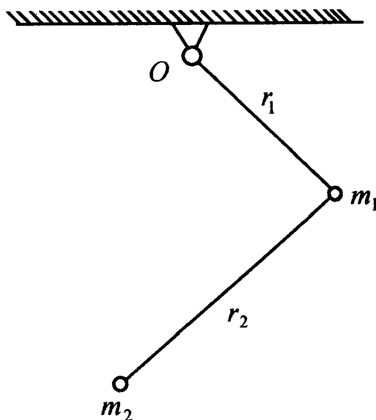


图 16

该系统的位形空间 C 中位形可达子空间是两个球面的拓扑积 $S^2(r_1) \times S^2(r_2)$. 约束条件为

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r_1^2 = 0, \\ f_2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - r_2^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.40}$$

在每一个球面上取经纬度 $\varphi_1, \theta_1, \varphi_2, \theta_2$ 作为广义坐标，则

$$\begin{cases} u_1 = x_1 = r_1 \cos\theta_1 \cos\varphi_1, \\ u_2 = y_1 = r_1 \cos\theta_1 \sin\varphi_1, \\ u_3 = z_1 = r_1 \sin\theta_1, \\ u_4 = x_2 = r_2 \cos\theta_2 \cos\varphi_2 + r_1 \cos\theta_1 \cos\varphi_1, \\ u_5 = y_2 = r_2 \cos\theta_2 \sin\varphi_2 + r_1 \cos\theta_1 \sin\varphi_1, \\ u_6 = z_2 = r_2 \sin\theta_2 + r_1 \sin\theta_1. \end{cases} \tag{5.41}$$

注意，$(q_1,q_2,q_3,q_4)=(\varphi_1,\theta_1,\varphi_2,\theta_2)$ 不是在 $S^2(r_1)\times S^2(r_2)$ 上大范围有效的坐标系，它的有效区域是 $\theta_1\neq\pm\frac{\pi}{2}$，$\theta_2\neq\pm\frac{\pi}{2}$. 若要研究 $\theta_1=\pm\frac{\pi}{2}$，或 $\theta_2=\pm\frac{\pi}{2}$ 的情形，则要取另外的广义坐标.

§6 可定向微分流形和带边流形

1° 流形的定向

向量空间有定向的概念. 例如，在3维欧氏空间中笛卡儿直角坐标系分为右手系和左手系两种. 3维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中的刚体运动把右手单位正交标架变为右手单位正交标架，而 $\mathbf{R}^3$ 关于平面的反射(镜面反射)把右手单位正交标架变为左手单位正交标架，把左手单位正交标架变为右手单位正交标架. 通常我们说，刚体运动保持 $\mathbf{R}^3$ 的定向不变，而镜面反射则翻转了空间 $\mathbf{R}^3$ 的定向.

一般地，设 V 是 n 维向量空间，$\{\delta_i\}$ 和 $\{e_i\}$ 是 V 的两个基底，它们可以互相线性表示. 设

$$e_i=\sum_{j=1}^{n}a_i^j\delta_j, \tag{6.1}$$

则 $\det(a_i^j)\neq 0$. 我们在 V 的基底之间引进如下的关系 $\sim$：如果在表达式(6.1)中，$\det(a_i^j)>0$，则称 $\{e_i\}\sim\{\delta_i\}$. 自然，$\sim$ 是 V 的全体基底之间的一种等价关系. V 的基底在等价关系 $\sim$ 下的等价类称为 V 的一个**定向**. 向量空间 V 有两个定向. 属于同一个等价类的两个基底称为定向相同的. 属于不同等价类的两个基底称为定向相反的. 很明显，如果 $\{\delta_i\}$ 是 V 的一个基底，则当其中一个基底向量的指向翻转之后，便得到与原基底定向相反的基底. 与定向 λ 相反的定向记作 $-\lambda$.

设 M 是 m 维光滑流形，则在每一点 $p\in M$ 有切空间 T_pM. 作为向量空间，T_pM 有两个定向. 我们首先给出切空间的定向沿一条路径连续延拓的概念.

定义 6.1 设 $\alpha:[0,1]\to M$ 是光滑流形 M 上的一条路径(即：α 是连续映射). 设在每一点 $t\in[0,1]$，指定了 $T_{\alpha(t)}M$ 的一个定向，记为 μ_t. 若在每一点 $t_0\in[0,1]$，有 M 在点 $\alpha(t_0)$ 的局部坐标系 $(U;x^i)$ 及 t_0 在 $[0,1]$ 中的邻域 $[t_0-\delta_1,t_0+\delta_2]$ (当 $t_0=0$ 时，$\delta_1=0$；当 $t_0=1$ 时，$\delta_2=0$；在其余情形 $\delta_1>0,\delta_2>0$)，使得

$$\alpha([t_0-\delta_1,t_0+\delta_2])\subset U,$$

并且

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}\right\}\bigg|_{\alpha(t)}\in\mu_t,\quad \forall\, t\in[t_0-\delta_1,t_0+\delta_2],$$

则称 μ 是沿 α **连续延拓的定向**.

设 $p,q \in M$，$\alpha:[0,1]\to M$ 是连结 p,q 的一条路径. 在 T_pM 中指定一个定向 λ. 若存在沿路径 α 连续延拓的定向 μ，使得 $\mu_0=\lambda$，则称 $T_qM=T_{\alpha(1)}M$ 中的定向 μ_1 为 T_pM 中的定向 λ 沿路径 α 的**传播**.

一个自然的问题是：设 M 是连通的光滑流形，$p\in M$. 在 T_pM 中任意指定一个定向 λ，则是否能够在每一点 $q\in M$ 的切空间 T_qM 中通过 λ 沿着从 p 点到 q 点的任意一条路径的传播获得一个确定的定向？

设 μ 是沿路径 $\alpha:[0,1]\to M$ 连续延拓的定向. 设 $(U;x^i)$ 和 $(V;y^i)$ 是 M 的两个局部坐标系，且 $\alpha(t_0)\in U\cap V$，而且

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}\right\}\bigg|_{\alpha(t_0)}$$

和

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^m}\right\}\bigg|_{\alpha(t_0)}$$

皆属于 μ_{t_0}，即这两个基底有相同的定向，所以坐标变换的 Jacobi 行列式在点 $\alpha(t_0)$ 有

$$J=\frac{\partial(x^1,\cdots,x^m)}{\partial(y^1,\cdots,y^m)}\bigg|_{\alpha(t_0)}>0. \tag{6.2}$$

特别是，当 $U\cap V$ 连通时，由 Jacobi 行列式 J 的连续性可知在 $U\cap V$ 上有 $J>0$. 这个事实导致下面的定义：

定义 6.2 设 M 是 m 维光滑流形. 如果存在 M 的一个容许的坐标卡集 $\mathscr{A}_0=\{(\mathrm{U}_\alpha,\varphi_\alpha)\}$，使得 $\{\mathrm{U}_\alpha\}$ 构成 M 的开覆盖，并且当 $\mathrm{U}_\alpha\cap\mathrm{U}_\beta\neq\varnothing$ 时，坐标变换

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

的 Jacobi 行列式

$$\det\left(\frac{\partial(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})^i}{\partial x_\alpha^j}\right)>0, \tag{6.3}$$

则称 M 是**可定向**的 m 维光滑流形.

满足条件(6.3) 的两个坐标卡 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (U_β,φ_β) 称为定向相符的. 所以，可定向光滑流形就是有一个由定向相符的容许坐标卡构成的坐标覆盖的光滑流形.

定义 6.3 对于可定向光滑流形 M，由定向相符的容许坐标卡组成的极大坐标卡集称为 M 的一个**定向**.

命题 6.1 设 M 是一个可定向连通光滑流形，在任意一点 $p\in M$ 的切空间 T_pM 上指定一个定向，则通过该定向沿着从点 p 出发的任意一条路径的传播在每一点 $q\in M$ 的切空间 T_qM 上唯一地确定了一个定向.

证明 已假定 M 是可定向光滑流形，故可在 M 上指定一个定向，设为 $\mathscr{A}_1$. 于是在每一点 $q \in M$ 的切空间 T_qM 上有一个确定的定向 μ_q，它是由点 q 处属于 $\mathscr{A}_1$ 的容许坐标卡的自然基底给出的.

现设在点 $p \in M$ 的切空间 T_pM 上指定一个定向. 不妨设 $\lambda = \mu_p$. 若不然，只要改变 M 的定向就行了(将属于定向 $\mathscr{A}_1$ 的每一个局部坐标系的第一个坐标 函数反号，所得的局部坐标系仍然是定向相符的，它们构成 M 的另一个定向，记为 $-\mathscr{A}_1$). 我们要证明：对于每一点 $q \in M$，T_qM 的定向 μ_q 是由 λ 沿着连结 p,q 的任意一条路径的传播得到的.

为此，设 $\gamma:[0,1] \to M$ 是连结 p、q 的任意一条路径，要证 $\mu_{\gamma(t)}, t \in [0,1]$ 是沿 γ 连续延拓的定向. 由于$[0,1]$的紧致性，不难证明存在$[0,1]$的一个分割

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1,$$

使得 $\gamma([t_{i-1}, t_{i+1}])$ 落在属于 $\mathscr{A}_1$ 的某个坐标域 U_α 内 $(i = 0,1,\cdots,N$；假定 $t_{-1} = 0, t_{N+1} = 1)$. 根据 μ 的定义，$\mu_{\gamma(t)}$ $(t \in [t_{i-1}, t_{i+1}])$ 是由 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 的自然基底给出的定向，因此 $\mu_{\gamma(t)}$ 是沿 γ 连续延拓的定向. 因为 $\mu_{\gamma(0)} = \mu_p = \lambda$，故 $\mu_q = \mu_{\gamma(1)}$ 是定向 λ 沿 γ 的传播. 由此可见，将定向 λ 沿着从 p 点出发的路径传播到点 q 与路径无关.

推论 6.2 设 M 是连通的光滑流形. 若在 M 中存在一条闭路径 $\gamma:[0,1] \to M$，即 $\gamma(0) = \gamma(1)$，使得在 $T_{\gamma(0)}M$ 中的一个定向 λ 沿 γ 的传播在 $T_{\gamma(1)}M = T_{\gamma(0)}M$ 上获得相反的定向 $-\lambda$，则 M 是不可定向的.

证明 实际上，若 M 是可定向的，则由命题 6.1，由 λ 通过沿着从 p 出发的路径传播在每一点的切空间上获得唯一确定的定向，特别是通过沿着以 p 为基点的任意一条闭路径传播得到的定向仍应该是 λ 本身. 故在推论 6.2 的假设下，M 必是不可定向的.

例 1 Möbius 带是不可定向的 2 维光滑流形.

所谓的Möbius 带是取一条长方形的带 $ABCD$，将它的一条边 DC 在 $\mathbf{R}^3$ 中扭转 180° 之后与它的对边 AB 粘合起来得到的图形(图 17).

当然，要符合 §1 所给出的流形的定义，应该把边 AD 和 BC 去掉(不去掉 AD, BC 边的 Möbius 带就是下面要讲的带边流形).

为了证明 Möbius 带的不可定向性，考虑长方形 $ABCD$ 中连结 AB, CD 的中点 E, F 的直线段，当长方形带粘合成 Möbius 带时该直线段成为一条封闭曲线. 沿直线段 EF 取标架场 $\{p; e_1, e_2\}$，使得 e_1 是 EF 的切向量，e_2 是 EF 的法向量，且 e_2 是从 e_1 按反时针方向转过 90° 得到的向量. 很明显，这个标架场给出了切空间的定向沿 EF 的连续延拓. 但是在Möbius 带上来看，当点 p 沿着该曲线从 E 变到 F 时，e_1 与原先的位置重合，而 e_2 恰好翻转了指向. 这就是说在 E 处

的一个定向 λ 沿 EF 传播到 F 时得到定向 $-\lambda$，故 Möbius 带是不可定向的.

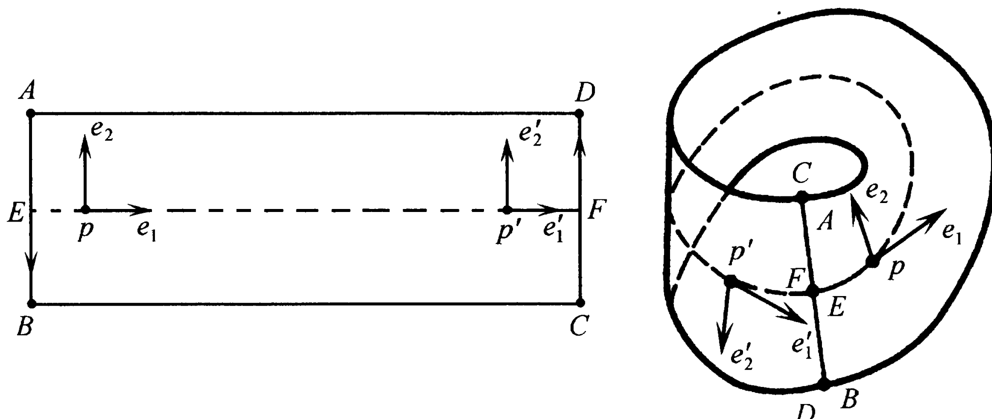


图　17

2°　带边流形

在 § 1 所定义的流形没有包括一些常见的区域或曲面，例如：前面例子中的 Möbius 带；$\mathbf{R}^n$ 中的闭实心球

$$D = \{(x^1,\cdots,x^n) \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 \leqslant 1\};$$

圆柱面

$$S^1 \times [0,1] = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$$

等等. 然而，这样的区域或曲面无论在理论上还是在实际应用中都是十分重要的. 因此，我们需要对流形的定义作一些修改，以弥补这种缺憾.

用 H^n 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的半空间

$$H^n = \{(x^1,\cdots,x^n) \in \mathbf{R}^n : x^n \geqslant 0\}, \tag{6.4}$$

在 H^n 上赋予从 $\mathbf{R}^n$ 诱导的拓扑；并且记

$$\partial H^n = \{(x^1,\cdots,x^n) \in \mathbf{R}^n : x^n = 0\}, \tag{6.5}$$

称为 H^n 的边界，其元素称为 H^n 的边界点. 令

$$\mathrm{Int}H^n = H^n \backslash \partial H^n, \tag{6.6}$$

称为 H^n 的内部，其元素称为 H^n 的内点.

先对 H^n 上的可微函数作一些说明. 设 U 是 H^n 的一个开子集，$f : U \to \mathbf{R}$ 是定义在 U 上的函数. 如果存在 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开子集 $\widetilde{U}$，以及 $\widetilde{U}$ 上的 C^k 函数 $\widetilde{f} : \widetilde{U} \to \mathbf{R}$，使得

$$U = \widetilde{U} \cap H^n,$$

并且

$$f = \widetilde{f}\,|_U,$$

则称 $f: U \to \mathbf{R}$ 是 C^k 的. 自然,如果 $U \subset H^n \backslash \partial H^n$,则 U 上的 C^k 函数就是在 $\mathbf{R}^n$ 的开子集 U 上通常的 C^k 函数. 如果 U 含有边界 ∂H^n 的点,则 U 上的 C^k 函数是定义在 $\mathbf{R}^n$ 中包含 U 在内的一个开子集上的 C^k 函数在 U 上的限制.

按照这样的说法,H^n 中两个开子集 U,V 之间的光滑同胚是指 1-1 映射 $f: U \to V$,使得 f 和 f^{-1} 都是光滑的,也就是存在 $\mathbf{R}^n$ 中的开集 $\widetilde{U},\widetilde{V}$,以及光滑同胚 $\widetilde{f}: \widetilde{U} \to \widetilde{V}$,使得

$$U = \widetilde{U} \cap H^n, \quad V = \widetilde{V} \cap H^n,$$

且

$$f = \widetilde{f}|_U.$$

如果 $U \cap \partial H^n \neq \varnothing$,则必有 $V \cap \partial H^n \neq \varnothing$,并且

$$f(U \cap \partial H^n) \subset V \cap \partial H^n,$$
$$f^{-1}(V \cap \partial H^n) \subset U \cap \partial H^n.$$

这就是说,在 H^n 的开集上的光滑同胚,把边界点映为边界点,把内点映为内点. 实际上,若 $U \subset H^n$ 是开集,则 $U \backslash \partial H^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集,f 必定把它可微同胚地映为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集. 但是 H^n 中包含边界点的开集不是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集,故

$$f(U \backslash \partial H^n) \subset V \backslash \partial H^n,$$
$$f^{-1}(V \backslash \partial H^n) \subset U \backslash \partial H^n.$$

又因 f 是 $1-1$ 的,故

$$f(U \cap \partial H^n) = V \cap \partial H^n.$$

有了这些准备之后,可以叙述下列定义:

定义 6.4 所谓 C^∞ **带边流形** M 是一个 Hausdorff 拓朴空间,并且在 M 上指定了一个微分结构 $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$,其中 U_α 是 M 的开子集,φ_α 是从 U_α 到 H^n 的开子集的同胚,并且满足下列条件:

(1) $\{U_\alpha\}$ 是 M 的覆盖;

(2) 若 $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathscr{A}$,则当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时,$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 和 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ 是 H^n 的开子集 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 和 $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 之间的光滑同胚;

(3) $\mathscr{A}$ 是极大的,即:若 (U,φ) 是 M 的一个坐标卡,且与属于 $\mathscr{A}$ 的任意一个坐标卡满足上面的条件(2),则必有 $(U,\varphi) \in \mathscr{A}$.

很明显,定义 6.4 涵盖了定义 1.4. 另外,从前面关于 H^n 中开子集的光滑同胚的讨论可知,若有 $(U,\varphi) \in \mathscr{A}$,使得点 $p \in U$,且象点 $\varphi(p) \in \partial H^n$,则对于 p 的另一个坐标卡 $(V,\psi) \in \mathscr{A}$,仍然有 $\psi(p) \in \partial H^n$. 这就是说,在坐标映射下,映入 H^n 的边界 ∂H^n 的点的性质与坐标卡的取法无关,这样的点称为 M 的**边界点**. M 的边界点的集合记为 ∂M,即

$$\partial M = \{p \in M: \text{存在坐标卡} (U,\varphi) \in \mathscr{A}, \text{使得 } p \in U, \text{且 } \varphi(p) \in \partial H^n\}, \tag{6.7}$$

称为 M 的**边界**. $\mathrm{Int}M = M\backslash\partial M$ 称为 M 的**内部**,它是通常意义下的 C^∞ 流形. 特别是当 $\partial M = \varnothing$ 时,$M = \mathrm{Int}M$. 有时为了强调起见,称这样的 M 为 C^∞ 无边流形.

定理 6.3　设 M 是 m 维 C^∞ 带边流形,且 $\partial M \neq \varnothing$,则由 M 的微分结构 $\mathscr{A}$ 诱导出 ∂M 上的微分结构 $\widetilde{\mathscr{A}}$,使得 ∂M 成为 $m-1$ 维 C^∞ 无边流形. 此时,包含映射 $i:\partial M \to M$ 是嵌入. 如果 M 是可定向流形,则 ∂M 也是可定向流形.

证明　设 $(U,\varphi) \in \mathscr{A}$,则由边界的定义可知

$$\varphi(U \cap \partial M) = \varphi(U) \cap \partial H^n, \tag{6.8}$$

它是 ∂H^n 中的开集. 于是在 ∂M 上可以考虑如下坐标卡集:

$$\widetilde{\mathscr{A}} = \{(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha) : (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathscr{A}, \text{且 } \widetilde{U}_\alpha = U_\alpha \cap \partial M, \widetilde{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha|_{\widetilde{U}_\alpha}\}.$$

很明显,$\widetilde{\mathscr{A}}$ 中的坐标卡彼此是 C^∞ 相关的. 因为 $\partial H^n = \mathbf{R}^{n-1}$,故 ∂M 是通常意义下的 $m-1$ 维光滑流形,即 ∂M 是 $m-1$ 维无边光滑流形.

对于 $p \in \partial M$,能找到坐标卡 $(U,\varphi) \in \mathscr{A}$,使得

$$U \cap \partial M = \{q \in U : (\varphi(q))^m = 0\}, \tag{6.9}$$

故由定理 4.4 得知 $(i, \partial M)$ 是 M 的嵌入子流形.

若 M 是可定向光滑流形,不妨设 $\mathscr{A}$ 中任意两个坐标卡是定向相符的,则 $\mathscr{A}$ 在 ∂M 上诱导的坐标卡集 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 中任意两个成员也是定向相符的. 实际上,设 $(U,\varphi), (V,\psi) \in \mathscr{A}$,且 $U \cap V \cap \partial M \neq \varnothing$. 令

$$x^i(p) = (\varphi(p))^i, \quad \forall\, p \in U; \quad y^i(p) = (\psi(p))^i, \quad \forall\, p \in V.$$

则当 $p \in U \cap V \cap \partial M$ 时,有

$$x^m(p) = y^m(p) = 0. \tag{6.10}$$

假定坐标变换 $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ 的表达式是

$$y^i = y^i(x^1, \cdots, x^m), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{6.11}$$

则(6.10)式的意思是

$$y^m(x^1, \cdots, x^{m-1}, 0) = 0. \tag{6.12}$$

在点 $q \in U \cap V \cap \partial M$ 处,坐标变换的 Jacobi 行列式为

$$\left.\frac{\partial(y^1, \cdots, y^m)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)}\right|_{\varphi(q)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial y^{m-1}}{\partial x^1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial y^{m-1}}{\partial x^m} \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial y^m}{\partial x^m} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^{m-1})}{\partial(x^1,\cdots,x^{m-1})}\bigg|_{\tilde{\varphi}(q)}\cdot\frac{\partial y^m}{\partial x^m}\bigg|_{x^m=0}.$$

注意到,当 $x^m>0$ 时,有

$$y^m=y^m(x^1,\cdots,x^{m-1},x^m)>0,\tag{6.13}$$

且(6.12)式成立,故有

$$\frac{\partial y^m}{\partial x^m}\bigg|_{x^m=0}\geqslant 0.\tag{6.14}$$

若不然,设$\frac{\partial y^m}{\partial x^m}\bigg|_{x^m=0}<0$,则由 Taylor 展开式得

$$y^m=x^m\cdot\frac{\partial y^m}{\partial x^m}\bigg|_{x^m=0}+o(x^m),$$

其中 $o(x^m)$ 是关于 x^m 的高阶无穷小,这与(6.13)式相矛盾.由于

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\bigg|_{\varphi(q)}>0,$$

故对于 $q\in U\cap V\cap\partial M$ 有

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^{m-1})}{\partial(x^1,\cdots,x^{m-1})}\bigg|_{\tilde{\varphi}(q)}>0,$$

即 $\tilde{\mathscr{A}}$ 中任意两个成员是定向相符的,∂M 是可定向的.

定义 6.5　设 M 是 m 维有向的带边光滑流形,$\partial M\neq\varnothing$,$\mathscr{A}$ 是 M 的定向.对于局部坐标系 $(U;x^i)\in\mathscr{A}$,当

$$\tilde{U}=U\cap\partial M=\{(x^1,\cdots,x^m)\in U:x^m=0\}\neq\varnothing$$

时,在 $\tilde{U}$ 上取局部坐标系 $((-1)^m\cdot x^1,x^2,\cdots,x^{m-1})$.由这样的局部坐标系在 ∂M 上确定的定向称为由 M 的定向在边界 ∂M 上**诱导的定向**.

例 2　定义 6.5 在边界上所规定的诱导定向与微积分学中关于平面区域、空间区域的边界上的诱导定向是一致的.

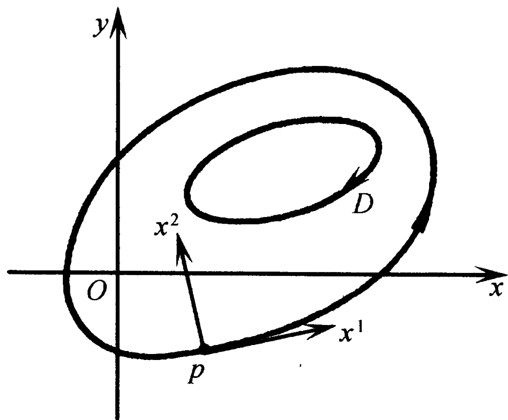


图　18

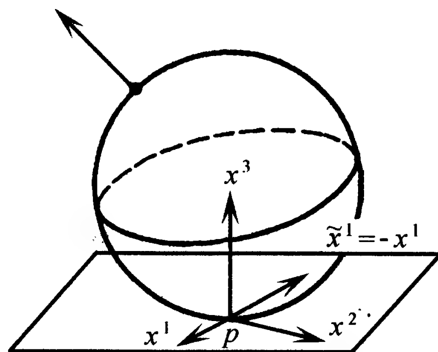


图　19

设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 上的有界区域. 在微积分学中规定 ∂D 的正向为:沿着 ∂D 的正向行进时,区域 D 在行进者的左侧(图 18)

若 D 是 $\mathbf{R}^3$ 中的有界区域,则微积分学规定,∂D 的外法向为 ∂D 的正向(图 19).

用本节的说法,首先在边界点上取与空间的定向相符的坐标系(即右手系),使最后一根坐标轴的正向指向 D 的内部(因而保证 $x^m > 0$). 当 $m = 2$ 时,x^1 给出了 ∂D 的诱导定向. 当 $m = 3$ 时,∂D 的诱导定向是由 $(-x^1, x^2)$ 给出的. 此时,由 $-x^3$ 轴的指向,即取 ∂D 的外法向为它的诱导定向.

在一般情况下,在 M 的边界点上取流形 M 的定向相符的局部坐标系时,$\dfrac{\partial}{\partial x^m}$ 总是指向内部的. 现在,我们所需要的在边界 ∂M 上的诱导定向是由它的内法向或外法向来决定的,视流形 M 的维数是偶数或奇数而定. 换言之,我们考虑如下与 M 的定向相符的局部坐标系 $((-1)^m x^1, x^2, \cdots, x^{m-1}, (-1)^m x^m)$,对应的自然标架为

$$\left\{(-1)^m \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{m-1}}, (-1)^m \frac{\partial}{\partial x^m}\right\}.$$

当 m 是偶数时,$(-1)^m \dfrac{\partial}{\partial x^m}$ 指向内;当 m 为奇数时,$(-1)^m \dfrac{\partial}{\partial x^m}$ 指向外. 此时,∂M 上的定向由

$$((-1)^m x^1, x^2, \cdots, x^{m-1}),$$

或由

$$\left\{(-1)^m \cdot \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{m-1}}\right\}$$

给出. 因此为简单起见,我们通常说:当 M 是偶数维带边流形时,在 ∂M 上的诱导定向是内法向;当 M 是奇数维带边流形时,在 ∂M 上的诱导定向是外法向. 对边界的诱导定向作出这种比较复杂的规定的原因是为了第四章 §5 的 Stokes 定理的叙述比较简洁.

习 题 二

1. 假定 $\mathscr{A}_0$ 是 n 维流形 M 的一个坐标卡集,并且

(1) $\mathscr{A}_0$ 构成 M 的一个开覆盖;

(2) 属于 $\mathscr{A}_0$ 的任意两个坐标卡是 C^r — 相关的.

证明:若 M 的两个坐标卡 (U, φ) 和 (V, ψ) 与 $\mathscr{A}_0$ 中每一个成员都是 C^r — 相关的,则 (U, φ) 和 (V, ψ) 是 C^r — 相关的.

2. 设 $S^n = \{(x^1,\cdots,x^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2 = 1\}$. 令

$$N = (0,\cdots,0,1), \qquad S = (0,\cdots,0,-1),$$

称为 S^n 的北极和南极. 设 $U_1 = S^n \backslash \{N\}$, 定义球极投影 $\varphi_1 : U_1 \to \mathbf{R}^n$ 如下:

$$\varphi_1(x^1,\cdots,x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}},\cdots,\frac{x^n}{1-x^{n+1}}\right);$$

同理可定义 $U_2 = S^n \backslash \{S\}$, $\varphi_2 : U_2 \to \mathbf{R}^n$ 为

$$\varphi_2(x^1,\cdots,x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1+x^{n+1}},\cdots,\frac{x^n}{1+x^{n+1}}\right).$$

证明: $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha) : \alpha = 1,2\}$ 给出了 S^n 的一个光滑结构, 并且它与 §1 例 3 所给出的光滑结构是同一个.

3. 证明: §1 例 4 中的映射 $\psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$ 及其逆映射是连续的.

4. 设 Σ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个非空子集. 若对 Σ 中任意一点 p, 都有 p 在 $\mathbf{R}^3$ 中的一个邻域 U, 使得 $U \cap \Sigma$ 是某个正则光滑参数曲面 $\varphi: D \to \mathbf{R}^3$ 的象集, 其中 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个连通开集, 则称 Σ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个光滑曲面. 证明: $\mathbf{R}^3$ 中的光滑曲面 Σ 是一个 2 维光滑流形.

5. 证明: $\mathbf{R}^3$ 中的圆环面 $(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2 + z^2 = r^2 (r < R)$ 是一个 2 维光滑流形.

6. 证明: 在光滑流形 M 上经过一点 x_0 的两条光滑曲线的相切关系 (参看 (3.12) 式) 与 M 在点 x_0 处所采用的局部坐标系无关.

7. 设 M, N 是光滑流形, 且 M 是连通的. $f : M \to N$ 是光滑映射. 证明: 若在每一点 $p \in M$ 有 $f_{*p} = 0$, 则 f 是常值映射.

8. 求下列映射的切映射 f_* 和余切映射 f^*:

(1) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $f(t) = (t, \alpha t)$, α 是固定实数;

(2) $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (x\cos y, x\sin y)$;

(3) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

9. 设映射 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 定义为

$$y_1 = x_1 e^{x_2} + x_2, \quad y_2 = x_1 e^{x_2} - x_2.$$

证明 f 是光滑同胚, 并且求切映射 f_* 和余切映射 f^* 在自然基底下的矩阵.

10. 设映射 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ 和 $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ 分别定义为:

$$f(x) = (e^{2x_1+x_2}, 3x_2 - \cos x_1, x_1^2 + x_2 + 2),$$
$$g(y) = (3y_1 + 2y_2 + y_3^2, y_1^2 - y_3 + 1).$$

(1) 设 $F = g \circ f$, 求 F_{*0};

(2) 设 $G = f \circ g$, 求 G_{*0}.

11. 设 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ 是光滑流形 X, Y, Z 之间的光滑映射. 证明:

(1) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : T_pX \to T_{g \circ f(p)}Z, \quad \forall\, p \in X$;

(2) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : T^*_{g \circ f(p)}Z \to T^*_pX, \quad \forall\, p \in X$.

12.　设 M 是 n 维紧致光滑流形，$f: M \to \mathbf{R}^n$ 是光滑映射. 证明：在 M 上至少存在一点 p，使得 f_{*p} 的秩小于 n.

13.　映射 $\sigma: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 定义如下：

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \sin x_3 + x_2 \cos x_3, x_1 \cos x_3 - x_2 \sin x_3, x_3)$$

证明：σ 限制在单位球面 S^2 上给出 S^2 到它自身的光滑同胚.

14.　在 $\mathbf{R}^2$ 中定义如下的等价关系：$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ 当且仅当

$$a_1 \equiv a_2 \bmod 1, b_1 \equiv b_2 \bmod 1.$$

这样，环面 $T^2 = \mathbf{R}^2/\sim$. 设有映射 $\varphi: \mathbf{R} \to T^2$，使得

$$\varphi(t) = (\sqrt{2}\,t \bmod 1, t \bmod 1),$$

证明：φ 是光滑映射，并且象集 $\varphi(\mathbf{R})$ 在 T^2 上是处处稠密的.

15.　设 $f: M \to N$ 是单一的浸入，将 M 和它在 f 下的象 $f(M)$ 等同起来. 证明：在 $f(M)$ 上由 M 移植的拓扑细于从 N 在象集 $f(M)$ 上诱导的拓扑.

16.　设 $i: M \to N$ 是 N 的浸入子流形，其中 i 是包含映射. $\gamma: (a, b) \to N$ 是 N 中一条光滑曲线，并且 $\gamma((a, b)) \subset M = i(M)$. 举例说明：未必在每一点 $t \in (a, b)$ 都有 $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

17.　设 $\varphi: M \to N$ 是嵌入子流形，并且 $\varphi(M)$ 是 N 中的闭子集. 证明：对于任意的 $g \in C^\infty(M)$，必存在 $f \in C^\infty(N)$，使得 $f \circ \varphi = g$.

18.　设 $f_\alpha: M_\alpha \to N_\alpha, \alpha = 1, 2$，是嵌入子流形. 证明：$f: M_1 \times M_2 \to N_1 \times N_2$ 是嵌入子流形，其中

$$f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)), \quad \forall\, (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2.$$

19.　设 $\pi: \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to RP^n$ 是典型投影(参看 §1 例 4). 证明 π 是淹没.

20.　设 $f: M \to N$ 是淹没，证明：f 是开映射.

21.　设 M 是连通的光滑流形，$\dim M \geqslant 2$. 证明：任何一个光滑映射 $f: M \to \mathbf{R}$ 都不可能是 $1-1$ 的.

22.　映射 $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 定义为

$$f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1.$$

问：在 $p = (0, 0)$，$p = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$，$p = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ 这三点中有哪几个点使得 $f^{-1}(f(p))$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的嵌入子流形？

23.　设 $g: U \to \mathbf{R}$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集 U 上的光滑函数，且它的梯度 ∇g 处处不为零. 证明：对于任意的 $c \in g(U)$，$g^{-1}(c)$ 是 U 中的一个 $(n-1)$ 维嵌入子流形.

24.　设 $f: M \to N$ 是光滑映射. 若有嵌入子流形 $i: W \to N$，使得 $f(M)$

$\subset W$，证明：映射 $f: M \to W$ 是光滑的.

25. 设 S^n 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的单位球面(参看第 2 题). 定义映射 $f: S^n \to RP^n$ 如下：

$$f(x^1,\cdots,x^{n+1}) = [(x^1,\cdots,x^{n+1})], \quad \forall\ (x^1,\cdots,x^{n+1}) \in S^n.$$

证明：f 是光滑映射，并且它的秩处处是 n.

26. 证明：对于任意两个给定点 $x, y \in \mathbf{R}$，存在开区间 (a,b) 包含 x, y，且有光滑同胚 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 满足 $f(x) = y$，并且保持 (a,b) 以外的点不动. 如果将 $\mathbf{R}$ 换成 $\mathbf{R}^n$，与上述类似的结论是否成立？

27. 设 M 是 n 维连通光滑流形. 证明：对于任意两个给定点 $x, y \in M$，必有光滑同胚 $f: M \to M$，使得 $f(x) = y$.

28. 下列子集中哪些能作为 $\mathbf{R}^2$ 的 C^r- 浸入子流形？$r = ?$

$$\{(t,t^2) : t \leqslant 0\} \cup \{(t, -t^2) : t \geqslant 0\};$$

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0 \text{ 或 } y = 0\};$$

$$\{(t^2,t^3) : t \in \mathbf{R}\}.$$

29. 设 $\varphi: X \to Y$ 是 Y 的单一浸入子流形，并且 $\dim X = \dim Y$. 证明：将 X 的微分结构经过 φ 移植到 $\varphi(X)$ 之后，$\varphi(X)$ 是 Y 的开子流形.

30. 设 $m < n$；$\pi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 是投影，即

$$\pi(y^1,\cdots,y^n) = (y^1,\cdots,y^m).$$

设 $\varphi: X \to \mathbf{R}^n$ 是光滑映射. 证明：如果 $(\pi\circ\varphi, X)$ 是 $\mathbf{R}^m$ 的浸入子流形，则 (φ, X) 是 $\mathbf{R}^n$ 的浸入子流形.

31. 试在 E^2 中所有有向直线的集合中给出一个光滑结构，使它成为一个 2 维光滑流形. 它是否是可定向流形？

32. 在 E^n 中考虑所有的有向 r- 维平面的集合. 该集合也能成为一个光滑流形. 证明这个事实，并计算它的维数.

33. 用 $p: S^n \to S^n$ 表示对径映射

$$p(x^1,\cdots,x^{n+1}) = (-x^1,\cdots,-x^{n+1}).$$

证明：(1) 单位球面 S^n 是可定向光滑流形；

(2) 若取定 S^n 的一个定向，则当 n 是奇数时，映射 p 是保持定向的；当 n 是偶数时，p 翻转了 S^n 的定向.

34. 设 M 是连通的 n 维光滑流形，$p \in M$，并且在 T_pM 中指定了一个定向. 证明：如果 T_pM 的定向沿着以 p 为基点的任意一条闭路径传播，在回到 p 点时仍然保持 T_pM 的定向，则 M 是可定向的.

35. 证明：射影空间 RP^n 在 n 是奇数时是可定向的；在 n 是偶数时是不可定向的.

36. 直接证明：射影平面 RP^2 是不可定向的.

37.　证明：Klein 瓶 K（参看 §5 例 2）是不可定向的.

38.　证明：黎曼曲面是可定向的 2 维光滑流形.

39.　设 $g: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是光滑函数，$c \in g(\mathbf{R}^n)$. 假定 g 的梯度 ∇g 在 $g^{-1}(c)$ 上处处不为零. 证明：

(1) $M = \{q \in \mathbf{R}^n : g(q) \geqslant c\}$ 是一个 n 维带边流形；

(2) $g^{-1}(c)$ 是 $n-1$ 维有向无边流形.

40.　设 M,N 是连通的光滑流形. 证明：

(1) 若 M,N 都是可定向的，则 $M \times N$ 也是可定向的；

(2) 若 M,N 之中有一个是不可定向的，则 $M \times N$ 是不可定向的.

(3) 若 $\partial M \neq \varnothing$，$\partial N = \varnothing$，则 $M \times N$ 是带边流形，且 $\partial(M \times N) = \partial M \times N$.

41.　设 M 是满足第二可数公理的 m 维光滑流形，A,B 是 M 中互不相交的闭子集. 证明：存在 $\psi \in C^\infty(M)$，使得 $0 \leqslant \psi \leqslant 1$，$\psi|_A \equiv 1$，$\psi|_B \equiv 0$.

第三章 切向量场

在上一章我们已经给出了光滑流形的定义，并且利用光滑结构定义了光滑流形上的光滑函数等概念.以此为基础，又定义了光滑流形在任意一点的切向量和切空间等概念，它们是在流形上由光滑结构决定的重要的线性结构.进一步可以探讨的便是流形上的光滑切向量场.顾名思义，所谓切向量场就是光滑流形上切向量的一"场"分布，即在光滑流形上每一点都指定了一个切向量.

在本章，我们首先考虑光滑流形上全体切向量的集合，赋予它拓扑结构和光滑结构，使它成为一个光滑流形，称为切向量丛.然后按照欧氏空间中的方式比较直观地给出光滑切向量场的定义，同时它能够看成从光滑流形到它的切向量丛的光滑映射.再研究光滑切向量场作为微分算子的特性.光滑切向量场与光滑流形上的单参数变换群是密切相关的，它提供了研究微分流形上的结构的一种工具.另外，定义在整个微分流形上的光滑切向量场的性状与流形的拓扑性质有关，在这方面我们要介绍切向量场的 Hopf 指标定理.

§1 切 丛

设 M 是 m 维光滑流形，令

$$TM=\bigcup_{x\in M}T_xM, \tag{1.1}$$

它是光滑流形 M 上全体切向量的集合.首先我们要赋予它一个拓扑结构和光滑流形结构，使它成为一个 $2m$ 维光滑流形.

设映射 $\pi:TM\to M$ 定义如下：对于任意的 $X\in T_xM, x\in M$ 令

$$\pi(X)=x. \tag{1.2}$$

这样，对于每一点 $x\in M, \pi^{-1}(x)=T_xM$.

假定 M 的光滑结构是 $\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha):\alpha\in I\}$，令

$$W_\alpha=\pi^{-1}(U_\alpha)=\bigcup_{x\in U_\alpha}T_xM,$$

于是 $\bigcup_{\alpha\in I}W_\alpha=TM$.对每一个指标 $\alpha\in I$，定义映射 $\psi_\alpha:U_\alpha\times\mathbf{R}^m\to\pi^{-1}(U_\alpha)$ 如下：设

$$x\in U_\alpha,\quad y=(y^1,\cdots,y^m)\in\mathbf{R}^m,$$

则

$$\psi_\alpha(x,y)=\sum_{i=1}^m y^i\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\bigg|_x, \tag{1.3}$$

其中 $x_\alpha^i = (\varphi_\alpha(x))^i, 1 \leqslant i \leqslant m$，是 U_α 上由坐标映射 φ_α 给出的局部坐标系. 显然，映射

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{R}^m \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

是 1 — 1 对应.

考虑 TM 中的子集族

$$\mathscr{B} = \bigcup_{\alpha \in I} \{\psi_\alpha(W) : W \text{ 是 } U_\alpha \times \mathbf{R}^m \text{ 中任意的开子集}\}. \tag{1.4}$$

容易证明，$\mathscr{B}$ 是 TM 的一个拓扑基. 因为 $\pi^{-1}(U_\alpha) = \psi_\alpha(U_\alpha \times \mathbf{R}^m) \in \mathscr{B}$，所以 $\mathscr{B}$ 构成 TM 的一个覆盖. 至于 $\mathscr{B}$ 作为拓扑基要满足的第二个条件，即：若对于任意的 $X \in TM$，有两个成员 $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$，使得 $X \in B_1 \cap B_2$，则必有 $\mathscr{B}$ 的一个成员 B，使得 $X \in B \subset B_1 \cap B_2$（见[5]，p. 27），我们将通过仔细的处理来进行验证.

假定 $X \in TM$，并且它属于 $\mathscr{B}$ 中两个成员的交集. 设这两个成员是 $\psi_\alpha(D_1 \times V_1)$ 和 $\psi_\beta(D_2 \times V_2)$，其中 D_1, D_2 分别是 U_α, U_β 中的开子集，V_1, V_2 是 $\mathbf{R}^m$ 中的开子集. 我们要证明的是存在 $\mathscr{B}$ 中的一个成员 $\psi_\gamma(D \times V)$，其中 D 是 U_γ 中的开子集，V 是 $\mathbf{R}^m$ 中的开子集，使得

$$X \in \psi_\gamma(D \times V) \subset \psi_\alpha(D_1 \times V_1) \cap \psi_\beta(D_2 \times V_2).$$

这样，$\mathscr{B}$ 确实是 TM 的一个拓扑基，且它在 TM 上给出的拓扑使 TM 成为满足第二可数公理的 Hausdorff 空间. 在此拓扑下，集合 $\pi^{-1}(U_\alpha) = \psi_\alpha(U_\alpha \times \mathbf{R}^m)$ 是 TM 中的开子集，ψ_α 建立了 $U_\alpha \times \mathbf{R}^m$ 到 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 的同胚，并且 $\pi : TM \to M$ 是连续映射.

在上述假定下，我们有

$$x \equiv \pi(X) \in D_1 \cap D_2 \subset U_\alpha \cap U_\beta,$$

并且

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^m y^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\bigg|_x = \sum_{i=1}^m \tilde{y}^i \frac{\partial}{\partial x_\beta^i}\bigg|_x \\ &= \sum_{i,j=1}^m \tilde{y}^i \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i}(\varphi_\alpha(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\bigg|_x, \end{aligned}$$

其中 $(y^1, \cdots, y^m) \in V_1, (\tilde{y}, \cdots, \tilde{y}^m) \in V_2$，因而它们之间有关系式

$$y^i = \sum_{j=1}^m \tilde{y}^j \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}, \tag{1.5}$$

其中 $\left(\dfrac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\right)$ 是在光滑流形 M 上从局部坐标系 $(U_\beta; x_\beta^i)$ 到局部坐标系 $(U_\alpha; x_\alpha^i)$ 的坐标变换的 Jacobi 矩阵.

考虑映射 $\Phi_{\alpha\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{R}^m \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{R}^m$，使得

$$\Phi_{\alpha\beta}(x, (\tilde{y}^1, \cdots, \tilde{y}^m)) = (x, (y^1, \cdots, y^m)),$$

其中$(y^1,\cdots,y^m)$是从$(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^m)$按照(1.5)式计算的结果，因此$y^i$是$x,\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^m$的光滑函数. 由于

$$\det\left(\frac{\partial x_\alpha{}^i}{\partial x_\beta{}^j}\right)\neq 0,$$

所以$\Phi_{\alpha\beta}$有逆映射$\Phi_{\beta\alpha}=\Phi_{\alpha\beta}{}^{-1}$，它也是光滑的. 这意味着映射

$$\Phi_{\alpha\beta}:(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbf{R}^m\to(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbf{R}^m$$

是光滑同胚. 由定义可知，映射$\Phi_{\alpha\beta}$与ψ_α,ψ_β的关系是

$$\psi_\alpha\circ\Phi_{\alpha\beta}\circ\psi_\beta{}^{-1}=\mathrm{id}:\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\to\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta),$$

即

$$\psi_\alpha\circ\Phi_{\alpha\beta}=\psi_\beta:(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbf{R}^m\to\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta).\qquad(1.6)$$

不妨取$D_1=D_2=D_1\cap D_2$，则$\Phi_{\alpha\beta}(D_2\times V_2)$是$U_\alpha\times\mathbf{R}^m$中的开子集，并且

$$\Phi_{\alpha\beta}\circ\psi_\beta{}^{-1}(X)=\psi_\alpha{}^{-1}(X)\in D_1\times V_1,$$

所以

$$\Phi_{\alpha\beta}(D_2\times V_2)\cap(D_1\times V_1)\neq\varnothing.$$

因此，存在$\psi_\alpha{}^{-1}(X)$在$U_\alpha\times\mathbf{R}^m$中的开邻域

$$D\times V\subset\Phi_{\alpha\beta}(D_2\times V_2)\cap(D_1\times V_1),$$

其中D是U_α的开子集，V是$\mathbf{R}^m$的开子集(图 20). 这样，$\psi_\alpha(D\times V)\in\mathscr{B}$，并且

$$X\in\psi_\alpha(D\times V)\subset\psi_\beta(D_2\times V_2)\cap\psi_\alpha(D_1\times V_1).$$

这就证明了$\mathscr{B}$是TM的拓扑基.

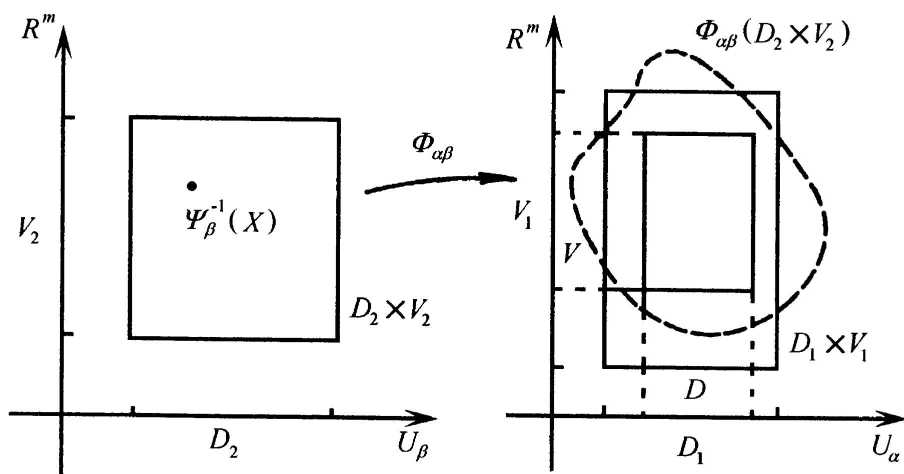


图　20

在TM上建立拓扑的过程看上去似乎很麻烦，事实上其直观意义是十分简单的. 实际上，设X_1,X_2是M的两个切向量. 我们称X_1,X_2是两个邻近的切向量，首先要求它们的起点$x_1=\pi(X_1),x_2=\pi(X_2)$是邻近的，因而可以落在

同一个坐标域内. 于是经过局部坐标变换，切向量 X_1 和 X_2 可以在同一个局部坐标系下用分量表示出来. 那末，切向量 X_1, X_2 相邻近的第二个要求是：当它们在同一个局部坐标系下表示时，分量的差别很小. 这就是前面在 TM 上所建立的拓扑的实质.

至此，很容易建立 TM 上的光滑结构. 如前所述，$\{\pi^{-1}(U_\alpha): \alpha \in \mathscr{A}\}$ 构成 TM 的一个开覆盖. 对每一个指标 $\alpha \in I$，定义映射 $\xi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbf{R}^{2m}$ 如下：

$$\xi_\alpha\left(\sum_{i=1}^m y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x\right) = ({x_\alpha}^1, \cdots, {x_\alpha}^m, y^1, \cdots, y^m); \tag{1.7}$$

这样，ξ_α 是从 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 到 $\mathbf{R}^{2m}$ 中的开集 $\varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbf{R}^m$ 的同胚，因此 $(\pi^{-1}(U_\alpha), \xi_\alpha)$ 是 TM 的一个坐标卡，使得 TM 成为一个 $2m$ 维拓扑流形. 如上的任意两个坐标卡还是 C^∞ 相关的. 事实上，$\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) \neq \varnothing$ 的充分必要条件是 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$. 于是当 $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) \neq \varnothing$ 时，坐标变换

$$\xi_\beta \circ {\xi_\alpha}^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{R}^m \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{R}^m$$

由下式给出：

$$\xi_\beta \circ {\xi_\alpha}^{-1}({x_\alpha}^1, \cdots, {x_\alpha}^m, y^1, \cdots, y^m) = ({x_\beta}^1, \cdots, {x_\beta}^m, \tilde{y}^1, \cdots, \tilde{y}^m), \tag{1.8}$$

其中

$$\begin{aligned} {x_\beta}^i &= (\varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1})^i({x_\alpha}^1, \cdots, {x_\alpha}^m), \\ \tilde{y}^i &= \sum_{j=1}^m y^j \frac{\partial {x_\beta}^i}{\partial {x_\alpha}^j} \end{aligned} \tag{1.9}$$

（对照(1.5)式）. 显然，${x_\beta}^i, \tilde{y}^i$ 是 ${x_\alpha}^i, y^i$ 的光滑函数. 这就证明了坐标卡 $(\pi^{-1}(U_\alpha), \xi_\alpha)$ 和 $(\pi^{-1}(U_\beta), \xi_\beta)$ 的 C^∞ 相关性. 根据第二章命题 1.1，TM 成为一个 $2m$ 维光滑流形.

在 TM 的这种光滑结构下，映射 $\pi: TM \to M$ 限制在局部坐标域 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上的表达式为

$$\varphi_\alpha \circ \pi \circ {\xi_\alpha}^{-1}({x_\alpha}^1, \cdots, {x_\alpha}^m, y^1, \cdots, y^m) = ({x_\alpha}^1, \cdots, {x_\alpha}^m), \tag{1.10}$$

所以 π 是光滑映射. 此外，

$$\begin{aligned} &\xi_\alpha \circ \psi_\alpha(x, (y^1, \cdots, y^m)) \\ &= \xi_\alpha\left(\sum_{i=1}^m y^i \frac{\partial}{\partial {x_\alpha}^i}\bigg|_x\right) \\ &= ({x_\alpha}^1, \cdots, {x_\alpha}^m, y^1, \cdots, y^m), \end{aligned}$$

所以 $\psi_\alpha: U_\alpha \times \mathbf{R}^m \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ 是光滑同胚.

现在让我们来分析一下 $2m$ 维光滑流形 TM 的一些特性：

(1) 存在一个光滑映射 $\pi: TM \to M$，而且在每一点 $x \in M$，$\pi^{-1}(x) = T_xM$ 是一个 m 维向量空间，同构于 $\mathbf{R}^m$；

(2)M 有一个开覆盖 $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$，且对每一个 α 有一个光滑同胚 $\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{R}^m \to \pi^{-1}(U_\alpha)$，使得

$$\pi \circ \psi_\alpha(x,y) = x, \quad \forall\ (x,y) \in U_\alpha \times \mathbf{R}^m.$$

这就是说，光滑流形 TM 在局部上可看成积流形 $U_\alpha \times \mathbf{R}^m$；

(3) 任意固定 $x \in U_\alpha$，定义映射

$$\psi_{\alpha,x} : \mathbf{R}^m \to \pi^{-1}(x) = T_xM,$$

使得

$$\psi_{\alpha,x}(y) = \psi_\alpha(x,y), \quad \forall\ y \in \mathbf{R}^m,$$

则 $\psi_{\alpha,x}$ 是线性同构.

这样，若 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$，则有两个线性同构 $\psi_{\alpha,x}, \psi_{\beta,x} : \mathbf{R}^m \to T_xM$. 由此得到线性同构

$$\psi_{\beta,x}{}^{-1} \circ \psi_{\alpha,x} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m,$$

即 $\psi_{\beta,x}^{-1} \circ \psi_{\alpha,x} \in \mathrm{GL}(m)$. 此同构恰好是由 M 的局部坐标变换 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha{}^{-1}$ 在点 $\varphi_\alpha(x)$ 处的 Jacobi 矩阵 $J_{\beta\alpha}(x) = \left(\dfrac{\partial x_\beta{}^i}{\partial x_\alpha{}^j}\right)$ 给出的线性变换，其中 $x_\beta{}^i = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha{}^{-1})^i(x_\alpha{}^1, \cdots, x_\alpha{}^m)$. 显然，映射 $x \to J_{\beta\alpha}(x)$ 是从 $U_\alpha \cap U_\beta$ 到 $\mathrm{GL}(m)$ 的光滑映射.

在第七章我们将以 TM 的上述特性为依据给出向量丛的定义. 因此，按定义，TM 是 M 上的一个向量丛，称为光滑流形 M 上的**切向量丛**，简称为**切丛**.

§2　光滑切向量场

定义 2.1　光滑流形 M 上的一个**切向量场** v 是指在流形 M 的每一点 x，都指定了一个切向量 $v(x) \in T_xM$. 换言之，切向量场 v 是一个映射 $v : M \to TM$，使得 $v(x) \in T_xM$.

简单地说，光滑流形 M 的一个切向量场是分布在 M 上的一"场"切向量.

定义 2.2　设 v 是光滑流形 M 上的一个切向量场. 若在点 $x_0 \in M$，有局部坐标系 $(U;x^i)$，使得当切向量场 v 在 U 上的限制用自然基底 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 线性表示成

$$v|_U = \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.1}$$

时，分量 v^i 是在点 x_0 的 C^r 函数($0 \leqslant r \leqslant \infty$)，则称切向量场 v 在点 x_0 是 C^r 的. 如果切向量场 v 在光滑流形 M 上处处是 C^r 的，则称 v 是 M 上的 C^r **切向量场**.

光滑流形 M 上全体光滑切向量场(即 C^∞ 切向量场)的集合记作 $\mathscr{X}(M)$.

很明显，在定义 1.2 中切向量场 v 在点 x_0 的 C^r 性质与局部坐标系 $(U;x^i)$ 的选取无关. 在直观上，C^r 切向量场 v 可以说成是以 C^r 的方式依赖于点的一场切向量，这里"以 C^r 的方式依赖于点"就是指切向量场用自然基底表示时其分

量是点的坐标的 C^r 函数.

命题 2.1 设 M 是一个光滑流形,TM 是 M 上的切向量丛,则 v 是 M 上的光滑切向量场当且仅当 v 是光滑映射 $v: M \to TM$,且满足条件 $\pi \circ v = \mathrm{id}: M \to M$.

证明 根据切向量场 v 的定义,映射 $v: M \to TM$ 满足条件 $\pi \circ v = \mathrm{id}: M \to M$. 任取一点 $p \in M$,则由切向量场 v 的光滑性的定义,必有点 p 的局部坐标系 $(U; x^i)$,使得

$$v|_U = \sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

并且分量 v^i 是 U 上的光滑函数. 根据切向量丛 TM 的光滑结构,映射 $v: M \to TM$ 的坐标表达式是

$$\zeta(v) = (x^1, \cdots, x^m, v^1(x), \cdots, v^m(x)),$$
$$\forall\, x \in U$$

所以 v 是光滑映射. 反过来也是明显的.

在 $\mathscr{X}(M)$ 中可以定义自然的加法和数乘法,使得 $\mathscr{X}(M)$ 成为向量空间. 实际上,若 $u, v \in \mathscr{X}(M)$,$\lambda \in \mathbf{R}$,则在任意一点 $x \in M$,令

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x), \tag{2.2}$$

$$(\lambda u)(x) = \lambda \cdot u(x). \tag{2.3}$$

显然,$u + v$,λu 仍然是光滑流形 M 上的光滑切向量场.

进一步还能定义光滑切向量场和光滑函数的乘积. 设 $u \in \mathscr{X}(M)$,$f \in C^\infty(M)$,则在任意一点 $x \in M$,令

$$(f \cdot u)(x) = f(x) \cdot u(x). \tag{2.4}$$

易见 $f \cdot u \in \mathscr{X}(M)$.

我们有以下的

命题 2.2 光滑流形 M 上全体光滑切向量场的集合 $\mathscr{X}(M)$ 是实数域上的向量空间,也是 $C^\infty(M)$- 模.

这里的 $C^\infty(M)$- 模指的是它是环 $C^\infty(M)$ 上的向量空间.

既然光滑切向量场是以光滑的方式依赖于点的一场切向量,而每一个切向量是作用在该点的光滑函数集上的线性算子,故光滑切向量场 v 可以看作作用在 $C^\infty(M)$ 上的一个算子. 设 $v \in \mathscr{X}(M)$,$f \in C^\infty(M)$,可以定义 $v(f)$ 为 M 上的一个函数,它在 $x \in M$ 处的值是

$$(v(f))(x) = (v(x))f. \tag{2.5}$$

我们断言:$v(f) \in C^\infty(M)$. 实际上,设 $x_0 \in M$,取点 x_0 的局部坐标系 $(U; x^i)$,则 $v|_U$ 有表达式

$$v|_U = \sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 $v^i \in C^\infty(U)$. 所以，当 $x \in U$ 时有

$$(v(f))(x) = \sum_{i=1}^{m} v^i(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i}(x),$$

其中 $v^i(x)$ 是 x 的光滑函数. 而根据记号的规定，

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(x)}$$

是 x 的光滑函数，这里 φ 是局部坐标系 $(U;x^i)$ 所对应的坐标映射. 因此 $v(f)|_U \in C^\infty(U)$. 由 x_0 的任意性得知 $v(f) \in C^\infty(M)$. 这样，每一个光滑切向量场 v 给出了从 $C^\infty(M)$ 到 $C^\infty(M)$ 的映射 $f \to v(f)$，这个映射是线性的，而且满足 Leibniz 法则. 重要的是其逆命题亦真，从而给出了在光滑流形 M 上定义光滑切向量场的另外一种方式.

定理 2.3 设 M 是一个 m 维光滑流形，$v \in \mathscr{X}(M)$，则如(2.5)式给出的映射 $v: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 满足以下三个条件：

(1) $\forall f, g \in C^\infty(M), v(f+g) = v(f) + v(g)$；

(2) $\forall f \in C^\infty(M), \alpha \in \mathbf{R}, v(\alpha f) = \alpha \cdot v(f)$；

(3) $\forall f, g \in C^\infty(M), v(f \cdot g) = f \cdot v(g) + g \cdot v(f)$.

反之，若设 $\alpha: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 是满足上述三个条件的映射，则在光滑流形 M 上有唯一的一个光滑切向量场 $v \in \mathscr{X}(M)$，使得对于任意的 $f \in C^\infty(M)$ 有

$$v(f) = \alpha(f).$$

证明 定理的前一半是切向量 $v(x): C_x^\infty \to \mathbf{R}$ 所满足的条件(1)，(2)，(3)(参看第二章定义 3.1) 的翻版，只要逐点验证即可.

为了证明定理的后一半，我们首先断言：满足条件(1)，(2)，(3) 的映射 $\alpha: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 具有局部性，即：若 $f, g \in C^\infty(M)$，且在开集 $U \subset M$ 上有

$$f|_U = g|_U,$$

则

$$\alpha(f)|_U = \alpha(g)|_U.$$

映射 α 的局部性为 α 的局部化创造了条件，从而依据 α 可以在每一点 $x \in M$ 定义一个从 C_x^∞ 到 $\mathbf{R}$ 的线性映射，且它满足 Leibniz 法则. 这就是说借助于 α 可以在光滑流形 M 上确定一场切向量.

任取 $x_0 \in U$. 利用流形 M 的局部紧致性，可以取 x_0 的开邻域 V，使得 $\overline{V}$ 是紧致的，并且

$$x_0 \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

由第二章的引理 2.2，存在光滑函数 $h \in C^\infty(M)$，使得

$$h|_V \equiv 1, \quad h|_{M \setminus U} \equiv 0, \tag{2.6}$$

于是 $(f-g) \cdot h \in C^\infty(M)$，并且

$$(f-g)\cdot h\equiv 0. \tag{2.7}$$

由于映射 $\alpha: C^{\infty}(M)\to C^{\infty}(M)$ 满足条件(1),故 α 把零函数映为零函数.实际上,

$$\alpha(0)=\alpha(0)+\alpha(0)=2\alpha(0),$$

故 $\alpha(0)=0$.

将映射 α 作用于(2.7)式两边,并且利用条件(1),(3)得到

$$\begin{aligned}0&=\alpha((f-g)\cdot h)\\&=(\alpha(f)-\alpha(g))\cdot h+(f-g)\cdot\alpha(h).\end{aligned}$$

特别是在点 $x_0\in V$,我们有

$$(\alpha(f))(x_0)=(\alpha(g))(x_0).$$

由于 x_0 在 U 内的任意性,我们有

$$\alpha(f)|_U=\alpha(g)|_U.$$

依据 α 的局部性,映射 $\alpha: C^{\infty}(M)\to C^{\infty}(M)$ 能够在 M 的任意一个开集 U 上诱导出一个映射 $\alpha: C^{\infty}(U)\to C^{\infty}(U)$. 事实上,若取 $f\in C^{\infty}(U)$,则第二章的定理 2.3 说:在任意一点 $x_0\in U$,必有点 x_0 的一个邻域 $V\subset U$,以及光滑函数 $\tilde{f}\in C^{\infty}(M)$,使得

$$\tilde{f}|_V=f|_V.$$

于是我们把函数 $\alpha(f)$ 在点 x_0 的值定义为

$$(\alpha(f))(x_0)=(\alpha(\tilde{f}))(x_0).$$

α 的局部性表明:$(\alpha(\tilde{f}))(x_0)$ 的值与邻域 V 及函数 $\tilde{f}$ 的取法无关,即若有

$$\tilde{g}\in C^{\infty}(M),\qquad \tilde{g}|_V=\tilde{f}|_V,$$

则

$$\alpha(\tilde{f})|_V=\alpha(\tilde{g})|_V,$$

故有

$$(\alpha(\tilde{f}))(x_0)=(\alpha(\tilde{g}))(x_0).$$

因此,上面的定义是有意义的. 此外,函数 $\alpha(\tilde{f})$ 在点 x_0 的光滑性意味着函数 $\alpha(f)$ 在 x_0 的光滑性,所以上面所定义的函数 $\alpha(f)\in C^{\infty}(U)$. 容易验证:映射 $\alpha: C^{\infty}(U)\to C^{\infty}(U)$ 满足相应的条件(1),(2),(3).

至此,依据映射 $\alpha: C^{\infty}(M)\to C^{\infty}(M)$,可以在每一点 $x_0\in M$ 处定义一个切向量 $v(x_0): C^{\infty}_{x_0}\to\mathbf{R}$ 如下:设 $f\in C^{\infty}_{x_0}$,它在点 x_0 的某个开邻域 U 内是光滑的,则令

$$(v(x_0))(f)=(\alpha(f))(x_0), \tag{2.8}$$

其中 α 是诱导的局部化映射 $\alpha: C^{\infty}(U)\to C^{\infty}(U)$. 由于映射 α 满足条件(1),(2),(3),故对任意的 $f,g\in C^{\infty}_{x_0}$ 及 $\lambda\in\mathbf{R}$,有

$$
\begin{aligned}
&(v(x_0))(f+\lambda g)\\
=&(\alpha(f+\lambda g))(x_0)\\
=&(\alpha(f))(x_0)+\lambda\cdot(\alpha(g))(x_0)\\
=&(v(x_0))(f)+\lambda\cdot(v(x_0))(g),\\
&(v(x_0))(f\cdot g)\\
=&(\alpha(f\cdot g))(x_0)\\
=&(f\cdot\alpha(g)+g\cdot\alpha(f))(x_0)\\
=&f(x_0)\cdot(v(x_0))(g)+g(x_0)\cdot(v(x_0))(f).
\end{aligned}
$$

根据第二章的定义 3.1,$v(x_0)$ 是光滑流形 M 在点 x_0 的一个切向量. 于是 v 是定义在光滑流形 M 上的切向量场,并且对于 $f\in C^\infty(M)$ 及任意一点 $x_0\in M$ 有

$$(v(f))(x_0)=(v(x_0))(f)=(\alpha(f))(x_0),$$

即

$$v(f)=\alpha(f).$$

为了证明切向量场 v 的光滑性,取点 x_0 的任意一个局部坐标系$(U;x^i)$,于是

$$v(x_0)=\sum_{i=1}^m v^i(x_0)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0},$$

其中

$$v^i(x_0)=(v(x_0))(x^i)=(\alpha(x^i))(x_0),$$

即

$$v^i=\alpha(x^i).$$

已知坐标函数 x^i 是U上的光滑函数,故 $\alpha(x^i)\in C^\infty(U)$,即 $v^i\in C^\infty(U)$. 这意味着 v 是光滑流形 M 上的光滑切向量场. 证毕.

定理 2.3 的证明是十分典型的. 首先根据全局的算子(即作用于大范围定义在光滑流形上的对象的算子)所满足的某些条件证明它具有局部性,于是这种全局算子可以局部化,从而诱导出定义在邻域上满足同样条件的算子;由于在光滑流形上一般不存在大范围适用的坐标系,但是局部坐标系是存在的,因而利用局部化的算子在局部坐标系下能够逐点构造出我们所要得到的对象;这种对象是定义在光滑流形的每一点上的,因此它成为一个全局的对象. 这种处理全局和局部的关系的方法,是我们在本课程中要学习的一个内容.

例 1 设 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$,定义映射

$$[X,Y]=X\circ Y-Y\circ X:C^\infty(M)\to C^\infty(M),\tag{2.9}$$

则$[X,Y]$在 M 上给出一个光滑切向量场.

复合映射 $X\circ Y:C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ 满足定理 2.3 的条件(1),(2),但不满

足条件(3). 事实上，对于任意的 $f,g\in C^\infty(M)$ 有

$$(X\circ Y)(f\cdot g)=X(f\cdot Y(g)+g\cdot Y(f))$$
$$=f\cdot(X\circ Y)(g)+g\cdot(X\circ Y)(f)+X(f)\cdot Y(g)+X(g)\cdot Y(f).$$

多余的部分是 $X(f)\cdot Y(g)+X(g)\cdot Y(f)$，它关于 X,Y 是对称的，因此

$$[X,Y](f\cdot g)=X\circ Y(f\cdot g)-Y\circ X(f\cdot g)$$
$$=f\cdot(X\circ Y)(g)+g\cdot(X\circ Y)(f)-f\cdot(Y\circ X)(g)-g\cdot(Y\circ X)(f)$$
$$=f\cdot[X,Y](g)+g\cdot[X,Y](f),$$

即映射 $[X,Y]:C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ 满足定理 2.3 的条件(1)，(2)，(3)，所以 $[X,Y]$ 在 M 上确定了一个光滑切向量场.

定义 2.3 设 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$，由映射 $[X,Y]\equiv X\circ Y-Y\circ X:C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ 所确定的光滑切向量场(仍记作 $[X,Y]$) 称为 X 和 Y 的 **Poisson 括号积**.

定理 2.4 在光滑切向量场的集合 $\mathscr{X}(M)$ 中的 Poisson 括号积 $[\ ,\ ]$ 运算服从以下的运算律：

(1) 分配律：

$$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z],$$
$$[Z,aX+bY]=a[Z,X]+b[Z,Y];$$

(2) 反交换律：

$$[X,Y]=-[Y,X];$$

(3) Jacobi 恒等式：

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0,$$

其中 $X,Y,Z\in\mathscr{X}(M)$，$a,b\in\mathbf{R}$.

定理的证明留给读者自己完成.

一般地，如果在域 F 上的向量空间 V 中定义了一种乘法，满足定理 2.4 中的运算律(1)，(2)，(3)，则 V 关于该乘法成为一种非结合代数，称为域 F 上的**李代数**. 定理 2.4 说明，光滑切向量场的集合 $\mathscr{X}(M)$ 作为实数域 $\mathbf{R}$ 上的向量空间关于 Poisson 括号积 $[\ ,\ ]$ 成为一个李代数.

Poisson 括号积 $[\ ,\ ]$ 关于实数 $\lambda\in\mathbf{R}$ 有线性性质，对于光滑函数却不然. 事实上，若 $X\in\mathscr{X}(M)$，$f,g\in C^\infty(M)$，则我们有

$$[fX,gY]=fg[X,Y]+f\cdot X(g)\cdot Y-g\cdot Y(f)\cdot X. \tag{2.10}$$

根据定义，若 $h\in C^\infty(M)$，则

$$[fX,gY]h$$
$$=fX((gY)h)-gY((fX)h)$$
$$=f\cdot X(g\cdot(Yh))-g\cdot Y(f\cdot(Xh))$$
$$=f\cdot(Xg)\cdot(Yh)+f\cdot g\cdot X(Yh)-g\cdot(Yf)\cdot(Xh)-g\cdot f\cdot Y(Xh)$$

$$=(f\cdot g\cdot[X,Y]+f\cdot(Xg)\cdot Y-g\cdot(Yf)\cdot X)h,$$

故(2.10)式成立.

注意到光滑切向量场 $X\in\mathscr{X}(M)$ 作为算子的局部性,对于任意的开子集 $U\subset M$,我们有

$$[X,Y]|_U=X|_U\circ Y|_U-Y|_U\circ X|_U=[X|_U,Y|_U],$$

其中 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$. 由此不难得到 Poisson 括号积 $[X,Y]$ 在局部坐标系 $(U;u^i)$ 下的表达式:设 $X|_U=X^i\frac{\partial}{\partial u^i}, Y|_U=Y^j\frac{\partial}{\partial u^j}$,则

$$\begin{aligned}[X,Y]\Big|_U&=[X|_U,Y|_U]\\&=\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial u^i}-Y^i\frac{\partial X^j}{\partial u^i}\right)\frac{\partial}{\partial u^j}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

如同局部定义的光滑函数在任意一点的某个邻域上的限制可以扩充成整个流形上的光滑函数(第二章定理 2.3),局部定义的光滑切向量场也能够作这样的扩充,只要在任意一点的某个邻域外取零向量作为该切向量场的值.

定理 2.5　设 U 是 m 维光滑流形 M 的一个开子集,$v\in\mathscr{X}(U)$. 则对任意一点 $x_0\in U$,存在 x_0 的某个邻域 $V\subset U$,以及光滑切向量场 $\tilde{v}\in\mathscr{X}(M)$,使得

$$\tilde{v}|_V=v|_V.$$

此定理的证明与第二章的定理 2.3 类似,留给读者完成.

设 M,N 分别是 m 维和 n 维光滑流形,$f:M\to N$ 是光滑映射. 如果 $X\in\mathscr{X}(M)$,则对于每一点 $p\in M$,$f_*(X_p)\in T_{f(p)}N$;但是,一般说来,f_*X 不构成 N 上的切向量场. 原因是 f 可能不是单一的,f 也可能不是满的. 当 f 非单一的情形,可能有 $p_1,p_2\in M$,使得 $f(p_1)=f(p_2)=q\in N$,但是一般说来 $f_*(X_{p_1})\neq f_*(X_{p_2})$. 这样,$N$ 在点 q 便会有两个不同的切向量 $f_*(X_{p_1})$, $f_*(X_{p_2})$. 当 f 非满的情形,f_*X 不是定义在 N 的每一个点上的. 针对上述情况,我们引进下面的定义:

定义 2.4　设 $f:M\to N$ 是从光滑流形 M 到 N 的光滑映射. 若有 $X\in\mathscr{X}(M)$ 和 $\tilde{X}\in\mathscr{X}(N)$,使得在每一点 $p\in M$ 有

$$f_*(X_p)=\tilde{X}_{f(p)},$$

则称切向量场 $\tilde{X}$ 和 X 是 **f-相关的**.

定理 2.6　设 $f:M\to N$ 是光滑映射,且 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$,$\tilde{X},\tilde{Y}\in\mathscr{X}(N)$. 如果 $\tilde{X}$ 和 X,$\tilde{Y}$ 和 Y 分别是 f-相关的,则 $[\tilde{X},\tilde{Y}]$ 和 $[X,Y]$ 是 f-相关的.

证明　任取 $p\in M$,$g\in C^\infty_{f(p)}$,设 g 在 $f(p)\in N$ 的一个开邻域 V 内是光滑的,并且有 p 在 M 中的开邻域 U,使得 $f(U)\subset V$,则

$$\begin{aligned}&([\tilde{X},\tilde{Y}]_{f(p)})g\\&=\tilde{X}_{f(p)}(\tilde{Y}g)-\tilde{Y}_{f(p)}(\tilde{X}g)\\&=(f_*X_p)(\tilde{Y}g)-(f_*Y_p)(\tilde{X}g)\\&=X_p((\tilde{Y}g)\circ f)-Y_p((\tilde{X}g)\circ f).\end{aligned}$$

这里$\tilde{X},\tilde{Y}$都看成是作用在$C^\infty(V)$上的算子,$(\tilde{Y}g)\circ f$,$(\tilde{X}g)\circ f$都是在点p的邻域U内的函数.对于p的邻近点$q\in U$有

$$(\tilde{Y}g)\circ f(q)=\tilde{Y}_{f(q)}(g)=(f_*Y_q)(g)=Y_q(g\circ f),$$

同理

$$(\tilde{X}g)\circ f(q)=X_q(g\circ f).$$

所以

$$\begin{aligned}&([\tilde{X},\tilde{Y}]_{f(p)})g\\&=X_p(Y(g\circ f))-Y_p(X(g\circ f))\\&=[X,Y]_p(g\circ f)\\&=(f_*([X,Y]_p))g,\end{aligned}$$

即

$$f_*[X,Y](p)=[\tilde{X},\tilde{Y}](f(p)),\quad \forall\, p\in M,$$

故$[\tilde{X},\tilde{Y}]$和$[X,Y]$是f-相关的.

定理 2.6 的一个直接推论是:

定理 2.7　设$f:M\to N$是光滑流形M和N之间的光滑同胚,则f_*建立了光滑切向量场的李代数$\mathscr{X}(M)$和$\mathscr{X}(N)$之间的同构.

证明　容易证明,光滑同胚$f:M\to N$的切映射f_*建立了$\mathscr{X}(M)$和$\mathscr{X}(N)$之间的一一对应,并且映射$f_*:\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(N)$是线性的.定理 2.6 说明,$f_*$保持 Poisson 括号积,即:对于任意的$X,Y\in\mathscr{X}(M)$有

$$f_*[X,Y]=[f_*X,f_*Y],$$

所以f_*是李代数$\mathscr{X}(M)$,$\mathscr{X}(N)$之间的同构.

流形M在任意一点的某个邻域内总是存在处处不为零的切向量场的,这样的局部定义的切向量场能否扩充成为定义在整个光滑流形上处处不为零的切向量场是微分拓扑学中的一个基本问题.事实上,在微分流形上处处不为零的光滑切向量场(或者是处处不为零的连续切向量场)的存在性与流形本身的拓扑有密切关系.我们先举几个例子.

例 2　在奇数维单位球面$S^{2n-1}\subset\mathbf{R}^{2n}$上存在处处非零的光滑切向量场.

用$\{x^i:1\leqslant i\leqslant 2n\}$记$\mathbf{R}^{2n}$中的笛卡儿坐标系,则单位球面$S^{2n-1}$是

$$S^{2n-1}=\left\{(x^1,\cdots,x^{2n}):\sum_{i=1}^{2n}(x^i)^2=1\right\}.$$

在点$p=(x^1,\cdots,x^{2n})\in S^{2n-1}$考虑向量

$$X(p)=(-x^2,x^1,-x^4,x^3,\cdots,-x^{2n},x^{2n-1}).\tag{2.12}$$

由于 $X(p)\perp\overrightarrow{Op}$，故 $X(p)$ 是球面 S^{2n-1} 在点 p 的切向量. 此外

$$|X(p)|^2=\sum_{i=1}^{2n}(x^i)^2=1,$$

所以 X 是定义在 S^{2n-1} 上的处处不为零的切向量场.

为了证明切向量场 X 的光滑性，我们将 X 用 S^{2n-1} 上的局部坐标系表示出来(参看第二章 §1，例 3). 我们只考虑坐标卡 $(U_{2n}^+,\varphi_{2n}^+)$，其余情形是类同的. 设

$$U_{2n}^+=\{(x^1,\cdots,x^{2n})\in S^{2n-1}:x^{2n}>0\},$$

坐标映射为 $\varphi_{2n}^+:U_{2n}^+\to\mathbf{R}^{2n-1}$，其定义是

$$\varphi_{2n}^+(x^1,\cdots,x^{2n})=(x^1,\cdots,x^{2n-1}).$$

若用 $(u^1,\cdots,u^{2n-1})$ 记 $\mathbf{R}^{2n-1}$ 中点的笛卡儿坐标，则区域 U_{2n}^+ 的参数方程为

$$x^\alpha=u^\alpha,\quad 1\leqslant\alpha\leqslant 2n-1,$$

$$x^{2n}=\sqrt{1-\sum_{\alpha=1}^{2n-1}(u^\alpha)^2},$$

其中 $\sum_{\alpha=1}^{2n-1}(u^\alpha)^2<1$. 区域 U_{2n}^+ 上的自然基底向量 $\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ 作为 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的向量有表达式

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}&=\sum_{\beta=1}^{2n-1}\frac{\partial x^\beta}{\partial u^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}+\frac{\partial x^{2n}}{\partial u^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{2n}}\\&=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}-\frac{u^\alpha}{\sqrt{1-\sum_{\beta=1}^{2n-1}(u^\beta)^2}}\frac{\partial}{\partial x^{2n}},\end{aligned}\tag{2.13}$$

这里 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}:1\leqslant i\leqslant 2n\right\}$ 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 关于笛卡儿坐标系 $\{x^i\}$ 的自然基底.

这样，S^{2n-1} 上的切向量场 X 有表达式

$$\begin{aligned}X&=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(-x^{2\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{2\alpha-1}}+x^{2\alpha-1}\frac{\partial}{\partial x^{2\alpha}}\right)\\&=\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left(-u^{2\alpha}\frac{\partial}{\partial u^{2\alpha-1}}+u^{2\alpha-1}\frac{\partial}{\partial u^{2\alpha}}\right)-\sqrt{1-\sum_{\alpha=1}^{2n-1}(u^\alpha)^2}\frac{\partial}{\partial u^{2n-1}}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

显然，切向量场 X 的分量是局部坐标 $u^1,\cdots,u^{2n-1}$ 的光滑函数. 由此可见，X 是单位球面 S^{2n-1} 上的光滑切向量场.

例 3　在 n 维环面 T^n 上存在处处非零的光滑切向量场.

以 $n=2$ 为例，环面 $T^2=S^1\times S^1$ 可以看作平面上一个单位正方形在对边等同之后所得到的流形. 在单位正方形上取平行向量场 X，则在正方形的对边等同时，X 成为环面 T^2 上的切向量场. 显然，该切向量场是光滑的，且处处不

为零.

更直观一点,设 T^2 是 $\mathbf{R}^3$ 中的圆环面,其参数方程是

$$\begin{cases} x = (r + a\cos\theta)\cos\varphi, \\ y = (r + a\cos\theta)\sin\varphi, \\ z = a\sin\theta, \end{cases}$$

其中 r,a 是正常数,$a < r$. 这里 θ,φ 是环面上的参数,其变化范围是 $0 \leqslant \theta < 2\pi, 0 \leqslant \varphi < 2\pi$. 显然,$\theta$- 曲线和 φ- 曲线都是圆环面 T^2 上的圆周. 这些圆周的切向量给出 T^2 上两个彼此正交的处处不为零的切向量场.

流形 M 的 Euler **示性数** $\chi(M)$ 定义为它的各维 Betti 数 β_i 的交错和,即

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \beta_i, \quad m = \dim(M). \tag{2.15}$$

这里 β_i 就是 M 的第 i 个实系数同调群 $H_i(M;\mathbf{R})$ 的维数. 如果将 M 作一个三角剖分,用 g_i 表示该剖分中 i 维面的个数,则 $\chi(M)$ 也恰好是 g_i 的交错和:

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i g_i. \tag{2.16}$$

Euler 示性数 $\chi(M)$ 是流形 M 的最重要的拓扑不变量. 例 2 与例 3 的共同点是,单位球面 S^{2n-1} 和环面 T^n 的 Euler 示性数都是零(参看[5],p. 120). 这个现象不是偶然的,它是紧致微分流形上关于切向量场指标的 Hopf 定理的推论.

Hopf 定理是微分拓扑学中一个十分重要的、深刻的结果. 要把 Hopf 定理解释清楚需要引进微分拓扑的一系列概念和术语,这些已经超出了本书的范围. 读者可以参看[23],第五章. 该书是 Springer 出版社出版的研究生教材丛书(GTM) 的第 33 卷(1976 年版). 也可以参考[15]. 在这里,我们只限于对有关的概念作直观的粗略介绍,以便使读者能够了解 Hopf 定理的意义.

定义 2.5 设 M 是 m 维光滑流形,v 是 M 上的一个连续切向量场. 若在点 $p \in M, v(p) = 0$,则称 p 是连续切向量场 v 的**奇点**.

如果 p 是连续切向量场 v 的一个孤立奇点,则切向量场 v 围绕点 p 的分布可以用一个数来描述,这就是切向量场 v 在点 p 的指标 $\mathrm{ind}_p v$.

以平面为例. 设 D 是平面上的一个区域,v 是 D 上的一个向量场,且点 $p \in D$ 是它的唯一的零点. 利用平面上的欧氏度量,向量场 v 在 $D\backslash\{p\}$ 上确定了一个单位向量场 $\tilde{v} = \dfrac{v}{|v|}$. 任意取一个以点 p 为中心、以 ε 为半径的圆周 C_ε,使它整个地落在 D 内. 向量场 $\tilde{v}$ 在 C_ε 上的限制仍是一个连续的单位向量场. 沿着圆周 C_ε 正向绕行一周时(C_ε 的正向是指 C_ε 所围的内部(含点 p 在内的区域)落在行进者的左侧),向量场 $\tilde{v}$ 的方向改变量必定是 2π 的整数倍,该整数 k 与半径 ε 的变动无关,称为向量场 v 在点 p 的指标,记为 $\mathrm{ind}_p v$. 另一方面,将圆周 C_ε 上各点的向量 $\tilde{v}$ 平移到点 p,$\tilde{v}$ 的终点落在单位圆周 S^1 上,则得到从 C_ε 到 S^1 的

映射,仍记为 $\tilde{v}$. 指标 $\mathrm{ind}_p v$ 也恰好是映射 $\tilde{v}: C_\varepsilon \to S^1$ 覆盖单位圆周 S^1 的次数,后者称为映射 $\tilde{v}: C_\varepsilon \to S^1$ 的映射度(参看[23],p. 136).

例 4　图 21 给出了在奇点具有各种指标的向量场.

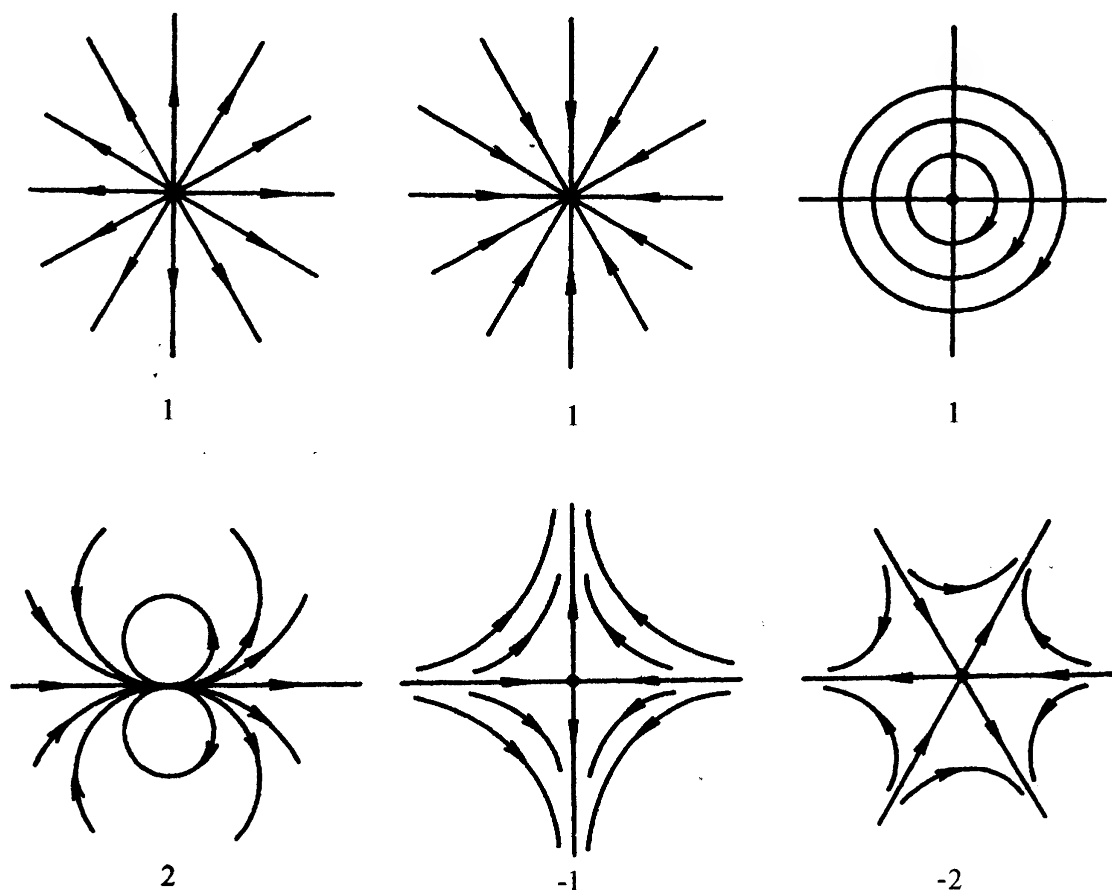


图　21

上面的讨论可以直接推广到 n 维欧氏空间的情形. 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域,v 是定义在 D 上的连续向量场,且以点 $p \in D$ 为仅有的零点,则在 $D \backslash \{p\}$ 上有连续的单位向量场 $\tilde{v} = \frac{v}{|v|}$. 取以 p 为中心、以 ε 为半径的球面 S_ε,使它整个地落在区域 D 内,则单位向量场 $\tilde{v}$ 限制在 S_ε 上给出从 S_ε 到 S^{n-1} 的映射,该映射覆盖 S^{n-1} 的次数与 ε 无关,它就是向量场 v 围绕孤立奇点 p 的指标 $\mathrm{ind}_p v$.

光滑流形的情形可以化为欧氏空间情形来考虑. 设 M 是 m 维光滑流形,v 是 M 上的连续切向量场,$p \in M$ 是切向量场 v 的一个孤立奇点. 取点 p 的一个容许坐标卡 (U, φ),那么 $\varphi_* v$ 成为定义在开集 $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$ 上的向量场. 由于 (U, φ) 是容许坐标卡,且 $\varphi: U \to \varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$ 是同胚,故 φ 可以看作微分流形 U 与 $\varphi(U)$ 之间的光滑同胚,可见 φ_* 是处处非退化的,因此 $\varphi_* v$ 是 $\varphi(U)$ 上以 $\varphi(p)$ 为仅有奇点的连续向量场. 可以证明,向量场 $\varphi_* v$ 在孤立零点 $\varphi(p)$ 的指标

$\mathrm{ind}_{\varphi(p)}\varphi_* v$ 与容许坐标卡(U,φ)的取法无关. 我们把 $\mathrm{ind}_{\varphi(p)}\varphi_* v$ 定义为切向量场 v 在孤立奇点 p 的指标：

$$\mathrm{ind}_p v = \mathrm{ind}_{\varphi(p)}\varphi_* v. \tag{2.17}$$

如果 p 不是 v 的奇点，则可令 $\mathrm{ind}_p v = 0$.

现在我们可以叙述关于切向量场的 Hopf 定理.

Hopf **定理**　设 M 是 m 维紧致光滑流形，v 是定义在 M 上仅有孤立奇点的连续切向量场，那么切向量场 v 在各点的指标之和为 M 的 Euler 示性数，即

$$\sum_{p\in M}\mathrm{ind}_p v = \chi(M). \tag{2.18}$$

上式左边只是有限项的和. 因为假定 v 只有孤立奇点，并且 M 是紧致的，所以 v 只有有限多个奇点. (2.18) 式左边只是 v 在有限多个奇点的指标之和. Hopf 定理的结论是十分深刻的，不管 v 是光滑流形 M 上什么样的连续切向量场，只要它的奇点个数是有限的，则它在各奇点的指标之和是不变的，它正好等于流形的 Euler 示性数. 这样，如果在紧致光滑流形上存在处处不为零的切向量场，则它在各点的指标之和为零，因而该流形的 Euler 示性数必为零. 反过来，如果紧致的光滑流形 M 的 Euler 示性数不为零，则在 M 上必定不存在处处不为零的连续切向量场. 特别是，偶数维单位球面的 Euler 示性数为 2(参看[5],p. 120)，所以在偶数维单位球面上不存在处处不为零的连续切向量场. 顺便提一下，作为 Hopf 定理的直观的应用，我们断言：在任何时刻地球表面上总有一处的水平风速为零.

切向量场问题的进一步推广是：在光滑流形 M 上是否存在 r 个连续的切向量场，使得它们是处处线性无关的？例 2 告诉我们，在 T^2 上存在两个连续的切向量场，它们是处处线性无关的. 这个问题也是微分拓扑学的一个重要课题.

§ 3　单参数变换群

在本节，我们把流形上的光滑切向量场看成单参数变换群的无穷小生成元，从而使光滑切向量场成为研究微分流形上的结构的重要工具. 微分流形上的张量场关于光滑切向量场的李导数就是这方面的一个例子(参看 § 5).

定义 3.1　设 M 是 m 维光滑流形. 若 $\varphi: M\to M$ 是光滑流形 M 到它自身的光滑同胚，则称 φ 是 M 上的一个**变换**.

定义 3.2　设 M 是 m 维光滑流形，$\varphi: \mathbf{R}\times M\to M$ 是光滑映射，并对任意的$(t,p)\in\mathbf{R}\times M$，记

$$\varphi_t(p) = \varphi(t,p).$$

如果映射 φ 满足下列条件：

(1)$\varphi_0 = \mathrm{id}: M \to M$;

(2) 对任意的实数 s,t,有 $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$,

则称 φ 是作用在光滑流形 M 上的**单参数可微变换群**,或称 φ 为 $\mathbf{R}$ 在流形 M 上的光滑(左)作用.

由于对任意固定的 t,$\varphi_t: M \to M$ 是光滑映射,而且 $\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \mathrm{id}$,故 $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$. 这意味着 φ_t 有光滑的逆映射,所以每一个 φ_t 是流形 M 到自身的一个变换. 条件(1),(2) 说明这些变换构成一个群. 这就是"单参数可微变换群"的名称的由来.

固定一点 $p \in M$,令

$$\gamma_p(t) = \varphi(t,p),$$

则 $\gamma_p: \mathbf{R} \to M$ 是光滑流形 M 中经过点 p 的一条光滑曲线,称为单参数可微变换群 φ 的经过点 p 的**轨线**.

用 X_p 表示轨线 γ_p 在点 p 的切向量,记成 $X_p = \gamma'_p(0)$. 按照第二章 § 3 的例 1,对于任意的 $f \in C_p^\infty$ 有

$$X_p(f) = \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma_p(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\varphi(t,p)) - f(p)}{t}. \tag{3.1}$$

这样,我们得到定义在光滑流形 M 上的切向量场 X,称为单参数可微变换群 φ 在 M 上**诱导的切向量场**.

我们断言:诱导切向量场 X 是光滑的. 实际上,若取点 p 的局部坐标系 $(U;x^i)$,则 φ 可以表示为

$$x^i = \varphi^i(t,x_0^1,\cdots,x_0^m),$$

其中$(x_0^1,\cdots,x_0^m)$是点 p 的坐标,φ^i 是 t ,$x_0^1,\cdots,x_0^m$ 的光滑函数. 这样,诱导切向量场 X 的表达式是

$$X_p = \sum_{i=1}^m \left.\frac{\partial\varphi^i(t,x_0^1,\cdots,x_0^m)}{\partial t}\right|_{t=0} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \tag{3.2}$$

其分量$\left.\frac{\partial\varphi^i}{\partial t}\right|_{t=0}$是$(x_0^1,\cdots,x_0^m)$的光滑函数,故切向量场 X 在任意一点 p 是光滑的,即 X 是光滑的切向量场.

进而,我们断言:单参数可微变换群 φ 的任意一条轨线是它的诱导切向量场 X 的积分曲线,即在轨线 γ_p 上的任意一点 $q = \gamma_p(s)$,X_q 恰好是 γ_p 在 s 处的切向量. 这是因为

$$\gamma_q(t) = \varphi(t,\varphi(s,p)) = \varphi(t+s,p) = \gamma_p(t+s),$$

所以对于任意的 $f \in C_q^\infty$ 有

$$\begin{aligned} X_q(f) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\gamma_q(t)) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\gamma_p(t+s)) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=s} f(\gamma_p(t)), \\ &= (\gamma'_p(s))f, \end{aligned} \tag{3.3}$$

即

$$\gamma'_p(s) = X(\gamma_p(s)). \tag{3.4}$$

(3.3) 式还能改写成

$$\begin{aligned} X_q(f) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma_p(t+s)) - f(\gamma_p(s))}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f\circ\varphi_s(\gamma_p(t)) - f\circ\varphi_s(p)}{t} \\ &= X_p(f\circ\varphi_s) \\ &= ((\varphi_s)_* X_p)f, \end{aligned}$$

即

$$(\varphi_s)_* X_p = X_{\varphi_s(p)}. \tag{3.5}$$

反过来的问题是：在 M 上给定一个光滑切向量场 X，则是否存在 M 的单参数可微变换群 φ_t 以 X 为它的诱导切向量场？换言之，切向量场 X 是否生成一个单参数可微变换群？为了回答这个问题，需要引进局部单参数变换群的概念.

定义 3.3　设 U 是光滑流形 M 的一个开子集，$\varepsilon > 0$. 如果光滑映射 $\varphi:(-\varepsilon,\varepsilon)\times U\to M$ 满足以下条件：对任意的 $p\in U$，$|t|<\varepsilon$，记 $\varphi_t(p)=\varphi(t,p)$，

(1) $\varphi_0 = \mathrm{id}: U\to U$；

(2) 若 $|s|<\varepsilon$，$|t|<\varepsilon$，$|t+s|<\varepsilon$，且 $p\in U$，$\varphi_t(p)\in U$，则有

$$\varphi_{s+t}(p) = \varphi_s\circ\varphi_t(p),$$

那么我们称 φ_t 为作用在 U 上的**局部单参数变换群**.

局部单参数变换群 φ_t 同样在 U 上诱导出一个光滑切向量场. 设 $p\in U$，取点 p 的局部坐标系 $(V;x^i)$，使得 $V\subset U$. 由于映射 φ 是连续的，只要取充分小的 $\varepsilon_0<\varepsilon$，则当 $|t|<\varepsilon_0$ 时，总是有 $\varphi_t(p)\in V$，于是 φ_t 的诱导切向量场是

$$X_p = \sum_{i=1}^m X^i_p \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \tag{3.6}$$

其中

$$X_p^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}(x^i \circ \gamma_p(t)). \tag{3.7}$$

同样，轨线 γ_p 是切向量场 $X \in \mathscr{X}(U)$ 的积分曲线，即

$$\gamma'_p(s) = X(\gamma_p(s)), \tag{3.8}$$

用局部坐标表示的表达式是

$$\frac{\mathrm{d}x^i(\gamma_p(t))}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=s} = X^i(\gamma_p(s)). \tag{3.9}$$

定理 3.1 设 X 是定义在光滑流形 M 上的光滑切向量场，则在任意一点 $p \in M$，存在一个邻域 U 及作用在 U 上的局部单参数变换群 φ_t，$|t| < \varepsilon$，使得 $X|_U$ 是 φ_t 在 U 上诱导的切向量场.

此时，称 φ_t 是由切向量场 X 所生成的局部单参数变换群.

证明 取点 p 的一个局部坐标系 $(V;x^i)$，设切向量场 X 的局部坐标表达式是

$$X|_V = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 $X^i \in C^\infty(V)$. 考虑常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = X^i(x^1, \cdots, x^m), \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{3.10}$$

根据常微分方程组的理论，存在 $\varepsilon_1 > 0$ 及点 p 的邻域 $U_1 \subset V$，使得对任意一点 $q \in U_1$，方程组(3.10)有唯一解 $x_q(t)$ $(|t| < \varepsilon_1)$ 经过点 q，即它满足下列方程组和初始条件：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_q^i(t)}{\mathrm{d}t} = X^i(x_q(t)), & |t| < \varepsilon_1, 1 \leqslant i \leqslant m, \\ x_q(0) = q, \end{cases} \tag{3.11}$$

并且解 $x_q(t)$ 对于 (t,q) 是光滑依赖的. 令

$$\varphi(t,q) = \varphi_t(q) = x_q(t), \quad \forall\, q \in U_1, |t| < \varepsilon_1,$$

则 $\varphi: (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times U_1 \to M$ 是光滑映射.

现在要证明 φ 是局部单参数变换群. 设 $|t| < \varepsilon_1$，$|s| < \varepsilon_1$，$|t+s| < \varepsilon_1$，并且 $q, \varphi_s(q) \in U_1$. 因为

$$\frac{\mathrm{d}x_q^i(t+s)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x_q^i(u)}{\mathrm{d}u}\bigg|_{u=t+s} = X^i(x_q(t+s)),$$

并且

$$x_q^i(t+s)|_{t=0} = x_q^i(s) = \varphi_s{}^i(q),$$

故 $x_q(t+s)$ 是(3.10)的经过点 $\varphi_s(q)$ 的解. 另外，方程组(3.10)的经过点 $\varphi_s(q)$ 的解已假定是 $x_{\varphi_s(q)}(t)$，由唯一性得到

$$x_q(t+s) = x_{\varphi_s(q)}(t),$$

即

$$\varphi_t(\varphi_s(q)) = \varphi_{t+s}(q).$$

所以 φ_t 是诱导出 $X|_{U_1}$ 的局部单参数变换群. 证毕.

设光滑切向量场 X 生成的两个局部单参数变换群 φ_t, ψ_t 分别作用在开子集 U 和 V 上,且 $U \cap V \neq \varnothing$,则当 $q \in U \cap V$ 时,

$$\gamma_q(t) = \varphi_t(q)$$

和

$$\widetilde{\gamma}_q(t) = \psi_t(q)$$

满足同一个微分方程组:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_q(t)}{\mathrm{d}t} = X(\gamma_q(t)), \quad \frac{\mathrm{d}\widetilde{\gamma}_q(t)}{\mathrm{d}t} = X(\widetilde{\gamma}_q(t)),$$

以及同一组初始条件:

$$\gamma_q(0) = \widetilde{\gamma}_q(0) = q.$$

所以由解的唯一性可知

$$\varphi_t(q) = \psi_t(q), \quad \forall\, q \in U \cap V, |t| < \varepsilon,$$

即局部单参数变换群 φ_t, ψ_t 在 $U \cap V$ 上的作用是相同的. 这个事实使我们在某些场合下能够构造出作用在整个 M 上的单参数可微变换群. 其中最重要的是 M 为紧致光滑流形的情形.

定理 3.2 设 M 是紧致的 m 维光滑流形,则 M 上任意一个光滑切向量场 X 生成了作用在 M 上的单参数可微变换群 $\varphi: \mathbf{R} \times M \to M$,即存在单参数可微变换群 φ,使得 X 是 φ 的诱导切向量场.

证明 根据定理 3.1,在每一点 $p \in M$ 都有一个邻域 U_p,以及 $X|_{U_p}$ 所生成的局部单参数变换群,记为

$$\varphi^{(p)}: (-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times U_p \to M,$$

其中 ε_p 是某个正数. 由于 $\varphi^{(p)}(0,p) = p \in U_p$,故利用映射 $\varphi^{(p)}$ 的连续性,必存在正数 $\widetilde{\varepsilon}_p \leqslant \varepsilon_p$ 以及 p 的开邻域 $V_p \subset U_p$,使得

$$\varphi^{(p)}((-\widetilde{\varepsilon}_p, \widetilde{\varepsilon}_p) \times V_p) \subset U_p. \tag{3.12}$$

因为 M 是紧致的光滑流形,在开覆盖 $\{V_p : p \in M\}$ 中必有一个有限的子覆盖,不妨设该有限子覆盖为 $\{V_\alpha : 1 \leqslant \alpha \leqslant r\}$,相应的局部单参数变换群记为

$$\varphi^{(\alpha)}: (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha \to M,$$

其中 U_α 是对应的开邻域, $V_\alpha \subset U_\alpha$. 令 $\varepsilon = \inf\limits_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \{\widetilde{\varepsilon}_\alpha\}$,则 $\varepsilon > 0$.

这样,我们可以定义映射 $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to M$ 如下:若 $p \in U_\alpha$,则令

$$\varphi(t,p) = \varphi^{(\alpha)}(t,p), \quad |t| < \varepsilon. \tag{3.13}$$

根据本定理前面的注记,上述定义是有意义的. 实际上,若有邻域 U_β 包含点 p,则 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$,并且由定理 3.2 前的讨论可知

$$\varphi^{(\alpha)}(t,p) = \varphi^{(\beta)}(t,p), \quad \forall\ |t| < \varepsilon.$$

映射 φ 显然是光滑的，并且 $\varphi(0,p)=p, \forall\, p\in M$，即 $\varphi_0=\mathrm{id}: M\to M$. 我们断言：定义 3.3 中的条件(2) 对于 φ 也成立，即若

$$|t|<\varepsilon,\quad |s|<\varepsilon,\quad |t+s|<\varepsilon,$$

则
$$\varphi_{t+s}(p)=\varphi_s\circ\varphi_t(p),\quad \forall\, p\in M.$$

由于 $\{V_\alpha: 1\leqslant\alpha\leqslant r\}$ 是 M 的开覆盖，不妨设 $p\in V_\alpha$，于是当 $|t|<\varepsilon$ 时，有 $\varphi_t^{(\alpha)}(p)\in U_\alpha$(见(3.12)式). 由于 $\varphi_t^{(\alpha)}$ 是局部单参数变换群，故由定义 3.3 的条件(2) 得到

$$\varphi^{(\alpha)}(s,\varphi^{(\alpha)}(t,p))=\varphi^{(\alpha)}(s+t,p),$$

也就是

$$\varphi(s,\varphi(t,p))=\varphi(s+t,p).$$

现在不难将 φ 的定义域从 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times M$ 扩展到 $\mathbf{R}\times M$. 事实上，设 t 是任意一个实数，则可取正整数 N，使得 $\dfrac{t}{N}\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，于是映射 $\varphi_{t/N}: M\to M$ 是有定义的. 令

$$\varphi(t,p)=(\varphi_{t/N})^N(p), \tag{3.14}$$

其中 $(\varphi_{t/N})^N$ 是指 N 个变换 $\varphi_{t/N}: M\to M$ 的复合映射. 上述定义与正整数 N 的取法无关. 若有另一个正整数 $\tilde{N}$，使得 $\dfrac{t}{\tilde{N}}\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，则取 $N,\tilde{N}$ 的公倍数

$$P=n\cdot N=\tilde{n}\cdot\tilde{N}.$$

显然，对于任意的正整数 $1\leqslant k\leqslant n$，有

$$|k\cdot t/P|\leqslant|t/N|<\varepsilon.$$

因为当 $|s|,|t|,|s+t|<\varepsilon$ 时，有 $\varphi_s\circ\varphi_t=\varphi_{s+t}$，故得

$$\varphi_{t/N}(p)=(\varphi_{t/P})^n(p),$$

因此

$$(\varphi_{t/N})^N=(\varphi_{t/P})^{n\cdot N}=(\varphi_{t/P})^P.$$

同理

$$(\varphi_{t/\tilde{N}})^{\tilde{N}}=(\varphi_{t/P})^P,$$

因此

$$(\varphi_{t/N})^N=(\varphi_{t/\tilde{N}})^{\tilde{N}}.$$

容易验证，如上所构造的映射 $\varphi: \mathbf{R}\times M\to M$ 满足单参数可微变换群的条件(1),(2). 证毕.

从定理的证明过程可以看出，流形 M 的紧致性假定并不是必要的，关键之处在于 $\inf\limits_\alpha\{\tilde{\varepsilon}_\alpha\}$ 必须是正数. 这样，若 M 有开覆盖 $\{V_\alpha\}$ 和 $\{U_\alpha\}$，$V_\alpha\subset U_\alpha$ 且对应于每个 α 有切向量场 X 所生成的局部单参数变换群

$$\varphi^{(\alpha)}: (-\varepsilon,\varepsilon)\times U_\alpha\to M,$$

使得

$$\varphi^{(\alpha)}((-\varepsilon,\varepsilon)\times V_\alpha)\subset U_\alpha,$$

其中$\varepsilon>0$与α无关，则定理3.2的证明的后半部分便可用于这种情形，得到在M上由切向量场X生成的单参数变换群. 在第六章 §3 要用到这个事实，得到：李群G上每一个左不变向量场X在G上生成一个单参数可微变换群.

定理 3.3 设φ_t是作用在光滑流形M上的单参数可微变换群，X是φ_t所诱导的光滑切向量场. 若$\psi: M\to M$是一个光滑同胚，则$\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}$也是作用在$M$上的单参数变换群，并且它所诱导的切向量场是$\psi_* X$.

证明 容易验证，光滑映射

$$\tilde{\varphi}_t=\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}: M\to M$$

满足单参数可微变换群的条件(定义 3.2,(1),(2)). 任取$f\in C^\infty(M)$，则

$$\begin{aligned}(\psi_* X_p)f &= X_p(f\circ\psi)\\ &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f\circ\psi(\varphi_t(p))\\ &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(\tilde{\varphi}_t(\psi(p)))\\ &=\tilde{X}_{\psi(p)}f,\end{aligned}$$

其中$\tilde{X}$是$\tilde{\varphi}_t$所诱导的切向量场. 因此

$$\psi_* X_p=\tilde{X}_{\psi(p)}.$$

定义 3.4 设X是光滑流形M上的光滑切向量场，$\psi: M\to M$是可微同胚. 如果

$$\psi_* X=X,$$

则称切向量场X在可微同胚ψ下是不变的.

显然，单参数可微变换群φ_t所诱导的切向量场X在属于该群的变换$\varphi_s(s\in\mathbf{R})$下是不变的(参看(3.5)式).

推论 3.4 单参数可微变换群φ_t诱导的切向量场X在可微同胚$\psi: M\to M$下不变的充分必要条件是φ_t与ψ是可交换的，即

$$\varphi_t\circ\psi=\psi\circ\varphi_t,\quad \forall\, t. \tag{3.15}$$

证明 由定理 3.3，单参数可微变换群$\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}$诱导的切向量场是$\psi_* X$，由于$\varphi_t=\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}$，故$\psi_* X=X$. 反过来，如果$\psi_* X=X$，则对于每一点$q\in M$，曲线$\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}(q)$和$\varphi_t(q)$满足同一组常微分方程组和同一组初始条件(见方程组(3.11)). 由唯一性可知

$$\varphi_t(q)=\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}(q),\quad \forall\, q\in M,$$

即(3.15)式为真.

定理 3.5 设X,Y是光滑流形M上两个任意的光滑切向量场，设X在点

$p \in M$ 附近生成的局部单参数变换群是 φ_t，则

$$[X,Y](p) = \lim_{t\to 0} \frac{Y_p - (\varphi_t)_* Y_{\varphi_{-t}(p)}}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_{-t})_* Y_{\varphi_t(p)} - Y_p}{t}. \tag{3.16}$$

如果 X 是由单参数可微变换群 φ_t 诱导的切向量场，则上式可以写成

$$[X,Y] = \lim_{t\to 0} \frac{Y - (\varphi_t)_* Y}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_{-t})_* Y - Y}{t}. \tag{3.17}$$

证明　由于 $\varphi_t : M \to M$ 是局部光滑同胚，故 $(\varphi_t)_* : T_{\varphi_{-t}(p)}M \to T_pM$ 是同构. 这样，$(\varphi_t)_* Y_{\varphi_{-t}(p)}$ 和 $(\varphi_{-t})_* Y_{\varphi_t(p)}$ 是 T_pM 中经过 Y_p 的两条光滑曲线（它们关于自变量 t 的光滑依赖性，可以通过它们的局部坐标表达式来证明，请读者自己验证）. 这两条曲线在参数变换 $t \to -t$ 下是重合的，因此它们在 $t = 0$ 处的切向量恰好互为反向量. (3.16) 式的意义是：切向量 $[X,Y]_p$ 正好是曲线 $(\varphi_{-t})_* Y_{\varphi_t(p)}$ 在 $t = 0$ 处的切向量；所以只要证明 $[X,Y]_p$ 与(3.16)式右边的其中一式相等即可.

设 $p \in M$，$f \in C_p^\infty$. 令

$$F(t) = f(\varphi_{-t}(p)),$$

其中 $|t| < \varepsilon$，ε 是充分小的正数. 因为

$$F(t) - F(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}F(st)}{\mathrm{d}s} \mathrm{d}s$$
$$= \int_0^1 t \cdot F'(u)\big|_{u=st} \mathrm{d}s,$$

所以

$$f \circ \varphi_{-t} = f + t \cdot g_t, \tag{3.18}$$

其中

$$g_t(p) = \int_0^1 F'(u)\big|_{u=st} \mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}f(\varphi_{-u}(p))}{\mathrm{d}u}\bigg|_{u=st} \mathrm{d}s. \tag{3.19}$$

显然，$g_t(p)$ 是 (t,p) 的光滑函数，并且

$$g_0(p) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}f(\varphi_{-u}(p))}{\mathrm{d}u}\bigg|_{u=0} \mathrm{d}s$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\bigg|_{u=0} f(\varphi_{-u}(p))$$
$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\bigg|_{u=0} f(\varphi_u(p))$$
$$= -X_p(f),$$

即

$$g_0 = -X(f) \in C_p^\infty. \tag{3.20}$$

因此,从(3.18)式得到

$$\begin{aligned}((\varphi_{-t})_*Y_{\varphi_t(p)})f &= Y_{\varphi_t(p)}(f\circ\varphi_{-t})\\ &=Y_{\varphi_t(p)}(f+t\cdot g_t)\\ &=Y_{\varphi_t(p)}(f)+tY_{\varphi_t(p)}(g_t),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\frac{((\varphi_{-t})_*Y_{\varphi_t(p)})f-Y_p(f)}{t}\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{Y_{\varphi_t(p)}(f)-Y_p(f)}{t}+\lim_{t\to 0}Y_{\varphi_t(p)}(g_t)\\ &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(Y(f))(\varphi_t(p))+Y_p(g_0)\\ &=X_p(Y(f))-Y_p(X(f))\\ &=[X,Y]_p(f),\end{aligned}$$

上式的第二个等号用到了 $Y_{\varphi_t(p)}(g_t)$ 关于自变量 t 的连续性(请读者自己验证).证毕.

设 γ_p 是局部单参数变换群 φ_t 的、经过点 p 的轨线,那么 φ_{-t} 是从点 $\varphi_t(p)$ 的邻域到点 p 的邻域的可微同胚,并且保持轨线 γ_p 不变.这样,$(\varphi_{-t})_*$ 把沿轨线 γ_p 分布的切向量场 $Y(\varphi_t(p))$ 都映到 T_pM 中来,成为 T_pM 中的一个依赖变量 t 的向量函数 $(\varphi_{-t})_*Y_{\varphi_t(p)}$.因此,极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_{-t})_*Y_{\varphi_t(p)}-Y_p}{t}$$

是这个向量函数在 $t=0$ 处的导数,它反映了沿切向量场 X 的轨线 γ_p 分布的切向量场 $Y(\varphi_t(p))$ 的变化率.

定义 3.5　设 X,Y 是光滑流形 M 上的两个光滑切向量场,φ_t 是由 X 生成的局部单参数变换群,则称

$$\mathscr{L}_XY=\lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_{-t})_*Y-Y}{t}\tag{3.21}$$

为切向量场 Y 关于 X 的**李导数**.

定理 3.5 说明:切向量场 Y 关于 X 的李导数 $\mathscr{L}_XY$ 是 X 和 Y 的 Poisson 括号积,即

$$\mathscr{L}_XY=[X,Y].\tag{3.22}$$

对于光滑函数 $f\in C^\infty(M)$,我们有

$$\begin{aligned}(X(f))(p)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}f(\varphi_t(p))\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*f(p)-f(p)}{t},\end{aligned}$$

即

$$X(f) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^* f - f}{t}.$$

我们把上式右端称为光滑函数 f 关于 X 的李导数，记作 $\mathscr{L}_X f$. 于是上式说明光滑函数 f 关于 X 的李导数就是 f 沿 X 的方向导数，或者是切向量场 X 在 f 上的作用，即

$$\mathscr{L}_X f = X(f). \tag{3.23}$$

定理 3.6 作用在光滑切向量场的集合 $\mathscr{X}(M)$ 上的李导数 $\mathscr{L}_X$ 服从下列运算律：

(1) $\mathscr{L}_X$ 是线性的，即对于 $Y, Z \in \mathscr{X}(M), \lambda \in \mathbf{R}$ 有

$$\mathscr{L}_X(Y + \lambda Z) = \mathscr{L}_X Y + \lambda \mathscr{L}_X Z;$$

(2) 对于 $Y \in \mathscr{X}(M), f \in C^\infty(M)$ 有

$$\mathscr{L}_X(f \cdot Y) = X(f) \cdot Y + f \mathscr{L}_X Y;$$

(3) 对于 $Y, Z \in \mathscr{X}(M)$，有

$$\mathscr{L}_X([Y,Z]) = [\mathscr{L}_X Y, Z] + [Y, \mathscr{L}_X Z].$$

证明 这些规律实质上是 Poisson 括号积的运算律(参看本章 §2，定理 2.4)，在此略去证明细节，留给读者自己完成.

在 §5 我们将讨论光滑流形 M 上任意阶的光滑张量场，并且定义光滑张量场关于已知切向量场的李导数. 在光滑流形上的一些结构(比如黎曼度量，参看 §5) 往往是用张量场的形式给出的，而保持该结构不变的单参数可微变换群所对应的切向量场恰好是该结构(某张量场) 关于它的李导数为零的切向量场. 因此，李导数是研究光滑流形上的结构的重要工具.

§4 Frobenius 定理

在 §2 的后半部分我们曾经比较直观地介绍过切向量场在孤立奇点的指标的概念，并且在例 4 中用图示的方式给出了平面上有各种指标的向量场的例子. 由此可见，光滑切向量场 v 在孤立奇点附近有变化多端的形态. 但是在非奇点的邻域内切向量场的分布是相当规则的，它的轨线可以取为适当的局部坐标系的坐标曲线. 我们有下面的定理：

定理 4.1 设 X 是 m 维光滑流形 M 上的光滑切向量场. 若在点 $p \in M$，$X_p \neq 0$，则存在点 p 的一个局部坐标系 $(V; y^i)$，使得

$$X|_V = \frac{\partial}{\partial y^1}.$$

证明 设 $(U; x^i)$ 是点 p 的一个局部坐标系，$x^i(p) = 0$，并且 $X|_U$ 有表达式

$$X|_U = \sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{4.1}$$

其中 $\xi^i \in C^\infty(U)$. 因为 $X_p \neq 0$,不妨设 $\xi^1(p) \neq 0$;利用 ξ^1 的连续性,可以假定 ξ^1 在 U 上处处不等于零. 考虑切向量场 X 的、经过坐标面 $x^1 = 0$ 上点$(0, y^2, \cdots, y^m)$ 的轨线 $x^i(t; y^2, \cdots, y^m)$,它们满足下列方程组和初条件:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \xi^i(x^1, \cdots, x^m), \\ x^1(0; y^2, \cdots, y^m) = 0, \\ x^\alpha(0; y^2, \cdots, y^m) = y^\alpha, 2 \leqslant \alpha \leqslant m, \end{cases} \tag{4.2}$$

(对照(3.11)式). 根据常微分方程组理论,解函数 $x^i(t; y^2, \cdots, y^m)$ 关于自变量 t 及初始值$y^2, \cdots, y^m$ 是光滑依赖的. 令 $y^1 = t$. 由于

$$\left.\frac{\partial(x^1, \cdots, x^m)}{\partial(y^1, \cdots, y^m)}\right|_{y=0} = \begin{vmatrix} \xi^1(p) & \xi^2(p) & \cdots & \xi^m(p) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \xi^1(p) \neq 0,$$

故

$$x^i = x^i(y^1; y^2, \cdots, y^m), \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

可以看作局部坐标变换(第一章,定理 3.2),即 $y^1, \cdots, y^m$ 可以作为点 p 的某个邻域 $V \subset U$ 内的局部坐标系. 此时,

$$\frac{\partial}{\partial y^1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x^i}{\partial y^1} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X,$$

故$(V; y^i)$ 即为所求. 证毕.

在定理 4.1 所说的局部坐标系$(V; y^i)$ 下,X 的轨线方程成为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t} = \delta^i_1, \\ y^i(0) = y^i_0, \end{cases} \tag{4.3}$$

其解为

$$y^i = y^i_0 + t\delta^i_1.$$

这就是说,局部单参数变换群 φ_t 的作用是

$$\varphi_t(y^1, \cdots, y^m) = (y^1 + t, y^2, \cdots, y^m), \tag{4.4}$$

即 φ_t 表现为点的坐标沿 y^1- 曲线的平移.

处处非零的光滑切向量场在它的定义域内决定了光滑的一维切子空间场,在每一点处的一维切子空间恰好是由在该点的切向量所张成的. 这个概念可以作如下的推广.

定义 4.2　设U 是光滑流形 M 的一个开子集. 若在每一点 $p \in U$ 都指定

了切空间 T_pM 的一个 h 维子空间 $L^h(p)$，则称 L^h 为 U 上的一个 h 维**分布**. 若在每一点 $p \in U$ 都有一个邻域 $V \subset U$ 以及定义在 V 上的 h 个处处线性无关的光滑切向量场 $X_1, \cdots, X_h$，使得对于每一点 $q \in V$，$L^h(q)$ 是由 $X_1(q), \cdots, X_h(q)$ 张成的，则称分布 L^h 是光滑的.

定义 4.3　设 L^h 是定义在开子集 $U \subset M$ 上的 h 维光滑分布，$X \in \mathscr{X}(U)$. 若对于任意一点 $p \in U$，都有 $X(p) \in L^h(p)$，则称 X 是属于光滑分布 L^h 的光滑切向量场.

根据定义 4.3 的说法，对于 h 维光滑分布 L^h，在每一点 $p \in U$，都有 p 的一个邻域 V，以及属于分布 $L^h|_V$ 的 h 个处处线性无关的切向量场 $X_\alpha \in \mathscr{X}(V)$，$1 \leqslant \alpha \leqslant h$. 此时，我们记

$$L^h|_V = \text{Span}\{X_1, \cdots, X_h\}. \tag{4.5}$$

张成分布 $L^h|_V$ 的切向量场 $X_1, \cdots, X_h$ 容许作以光滑函数为系数的非退化线性变换. 这就是说，若令

$$Y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{h} a_\alpha^\beta X_\beta, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant h, \tag{4.6}$$

其中 $a_\alpha^\beta \in C^\infty(V)$，且 $\det(a_\alpha^\beta)$ 处处不为零，则仍旧有

$$L^h|_V = \text{Span}\{Y_1, \cdots, Y_h\}. \tag{4.7}$$

如果在光滑流形 M 上存在 h 个处处线性无关的光滑切向量场，则在 M 上就有一个 h 维光滑分布. 反过来，如果在 M 上存在一个 h 维光滑分布，则在 M 上未必存在 h 个处处线性无关的光滑切向量场. 例如，在 2 维球面 S^2 上光滑的切向量场必有奇点，因此在 S^2 上更不可能存在两个处处线性无关的光滑切向量场，然而 S^2 上的切空间场显然是光滑的 2 维分布. 由此可见，在局部上给出一个 h 维光滑分布等价于存在 h 个处处线性无关的光滑切向量场，而在大范围情形前者的要求比后者弱.

定义 4.4　设 L^h 是定义在开子集 $U \subset M$ 上的 h 维光滑分布. 若 $\varphi: N \to U$ 是单一的浸入子流形，并且对于每一点 $p \in N$ 有

$$\varphi_*(T_pN) \subset L^h(\varphi(p)),$$

则称(φ, N) 是光滑分布 L^h 的一个**积分流形**.

可以证明，分布 L^h 的一维积分流形总是存在的. 当然，h 维光滑分布 L^h 的最高维积分流形的维数不会超过 h；并且，如果 L^h 有经过点 p 的 h 维积分流形，则该积分流形必定是唯一的(即积分流形的象集在点 p 附近是唯一的). 但是当 $h \geqslant 2$ 时，对于任意一点 $p \in U$，未必有 L^h 的 h 维积分流形经过它. 事实上，我们有：

定理 4.2　设 L^h 是定义在开子集 $U \subset M^m$ 上的 h 维光滑分布. 若经过 U 内任意一点 p 都有 L^h 的一个 h 维积分流形，则属于 L^h 的任意两个光滑切向量

场 X,Y 的 Poisson 括号积$[X,Y]$仍然属于 L^h.

证明 假定 X,Y 是属于 L^h 的任意两个光滑切向量场. 任取 $p\in U$. 由假定,存在 h 维单一的浸入子流形 $\varphi: N\to U$, 使得

$$\varphi_*(T_qN)=L^h(\varphi(q)),\quad \forall\, q\in N.$$

由于 φ_* 处处是非退化的,故对于任意一点 $q\in N$,存在确定的切向量 $\widetilde{X}(q)$, $\widetilde{Y}(q)\in T_qN$, 使得

$$\varphi_*(\widetilde{X}(q))=X(\varphi(q)),$$
$$\varphi_*(\widetilde{Y}(q))=Y(\varphi(q)),$$

并且切向量场 $\widetilde{X},\widetilde{Y}$ 是光滑的(参看习题 9). 由此可见,N 上的光滑切向量场 $\widetilde{X},\widetilde{Y}$ 与 U 上的光滑切向量场 X,Y 是 φ- 相关的. 根据定理 2.5,有

$$\varphi_*([\widetilde{X},\widetilde{Y}](p))=[X,Y](\varphi(p)),$$

因此$[X,Y](\varphi(p))\in L^h(\varphi(p))$. 由于点 p 的任意性,我们有$[X,Y]\in L^h$.

下面引进两个概念.

定义 4.5 设L^h是定义在开子集$U\subset M$上的h维光滑分布. 若对于任意一点$q\in U$,都有分布L^h的一个h维积分流形经过它,则称该分布L^h是**完全可积的**.

定义 4.6 设L^h是定义在开子集$U\subset M$上的h维光滑分布. 如果属于分布 L^h 的任意两个光滑切向量场X,Y的 Poisson 括号积$[X,Y]$仍属于分布L^h,则称分布 L^h 满足 Frobenius **条件**.

若用$\mathscr{V}(L^h)$表示属于分布 L^h 的光滑切向量场的集合,则 Frobenius 条件的意思是:$\mathscr{V}(L^h)$关于Poisson 括号积成为一个李代数,即它是$\mathscr{X}(U)$的子代数. 由于L^h在局部上是由h个光滑切向量场张成的,所以定义 4.6 可以改述成等价的

定义 4.6′ 设L^h是定义在开子集$U\subset M$上的h维光滑分布. 若在每一点 $p\in U$,存在点 p 的一个邻域 $V\subset U$,以及 h 个光滑切向量场 $X_1,\cdots,X_h\in\mathscr{X}(V)$,使得

$$L^h|_V=\mathrm{Span}\{X_1,\cdots,X_h\},$$

并且满足

$$[X_\alpha,X_\beta]=\sum_{\gamma=1}^{h}C_{\alpha\beta}^{\gamma}X_\gamma,\quad 1\leqslant\alpha,\beta\leqslant h, \tag{4.8}$$

其中 $C_{\alpha\beta}^{\gamma}\in C^\infty(V)$,则称 L^h 满足 Frobenius 条件.

有了这些术语之后,定理 4.2 可以改述成

定理 4.2′ 若 L^h 是定义在开子集 $U\subset M^n$ 上的完全可积的 h 维光滑分布,则 L^h 必定满足 Frobenius 条件.

要紧的是定理 4.2 的逆命题亦真,这就是所谓的 Frobenius 定理. 实际上

我们能够证明的结果比这个逆命题还要多一点.

定理 4.3(Frobenius 定理) 设 L^h 是定义在开子集 $U \subset M$ 上的 h 维光滑分布. 如果 L^h 满足 Frobenius 条件,则在每一点 $p \in U$,存在局部坐标系 $(V; y^i)$,使得 $p \in V \subset U$,并且

$$L^h|_V = \mathrm{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^h}\right\}.$$

定理 4.3 告诉我们,V 内的坐标面

$$\{(y^1, \cdots, y^m) : y^{h+1} = \mathrm{const}, \cdots, y^m = \mathrm{const}\}$$

是分布 L^h 的 h 维积分流形. 因此,当 L^h 满足 Frobenius 条件时,L^h 是完全可积的.

陈省身和 J. Wolfson 给出过 Frobenius 定理的一个简捷的归纳证明,读者可参看[2],p. 36.

在这里,我们将把 Frobenius 定理归结为一阶偏微方程组的可积性定理,后者实际上是 Frobenius 定理的经典形式. 所以这种做法有助于读者了解该定理的历史以及它的应用. 一阶偏微分方程组的可积性条件在本质上是光滑多元函数的 2 阶偏导数与求导次序无关的推论,在几何学中,许多存在性问题的证明常常需要用这个可积性定理.

定理 4.4 设 $U \times V \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ 是开子集,并且 $f_i^\alpha : U \times V \to \mathbf{R}$ 是定义在 $U \times V$ 上的光滑函数,$1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant \alpha \leqslant n$. 则对于任意一点 $(x_0, y_0) \in U \times V$,方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} = f_i^\alpha(x, y), \\ y^\alpha(x_0) = y_0^\alpha \end{cases} \tag{4.9}$$

在点 x_0 的某个邻域 $W \subset U$ 内有唯一解 $y^\alpha = y^\alpha(x), x \in W$ 的充分必要条件是在 $U \times V$ 上成立恒等式

$$\frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x^j} - \frac{\partial f_j^\alpha}{\partial x^i} + \sum_{\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i^\alpha}{\partial y^\beta} f_j^\beta - \frac{\partial f_j^\alpha}{\partial y^\beta} f_i^\beta\right) = 0. \tag{4.10}$$

证明 必要性. 如果函数 $y^\alpha = y^\alpha(x)$ 满足方程组(4.9),则由

$$\frac{\partial^2 y^\alpha(x)}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 y^\alpha(x)}{\partial x^j \partial x^i}$$

得到

$$\frac{\partial f_i^\alpha(x, y(x))}{\partial x^j} = \frac{\partial f_j^\alpha(x, y(x))}{\partial x^i},$$

将上式展开便是条件(4.10).

充分性. 为简便起见,不妨设 $x_0 = 0 \in U$. 首先确定函数 $y_1^\alpha(x^1, 0, \cdots, 0)$,使得它们满足方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1^\alpha(x^1,0,\cdots,0)}{\partial x^1} = f_1^\alpha(x^1,0,\cdots,0,y_1(x^1,0,\cdots,0)), \\ y_1^\alpha(0,\cdots,0) = y_0^\alpha. \end{cases} \tag{4.11}$$

为此，考虑常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}t} = f_1^\alpha(t,0,\cdots,0,\xi), \\ \xi^\alpha|_{t=0} = y_0^\alpha, \end{cases} \tag{4.12}$$

它在某个区间 $|t| < \varepsilon_1$ 内有唯一的一组解，记为 $\xi_1^\alpha(t)$. 取

$$y_1^\alpha(x^1,0,\cdots,0) = \xi_1^\alpha(x^1), \quad |x^1| < \varepsilon_1 \tag{4.13}$$

则 $y_1^\alpha(x^1,0,\cdots,0)$ 满足(4.11).

接着固定 x^1 的值，$|x^1| < \varepsilon_1$，考虑常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}t} = f_2^\alpha(x^1,t,0,\cdots,0,\xi), \\ \xi^\alpha|_{t=0} = y_1^\alpha(x^1,0,\cdots,0). \end{cases} \tag{4.14}$$

当 ε_1 充分小时，对于任意的 $|x^1| < \varepsilon_1$，上述方程组在 $|t| < \varepsilon_2$ 内有唯一解 $\xi_2^\alpha(t;x^1)$，$1 \leqslant \alpha \leqslant n$，它们关于 x^1, t 是光滑的. 令

$$y_2^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0) = \xi_2^\alpha(x^2;x^1), \quad |x^1| < \varepsilon_1, \quad |x^2| < \varepsilon_2. \tag{4.15}$$

于是 $y_2^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_2^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0)}{\partial x^2} = f_2^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0,y_2^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0)) \\ y_2^\alpha(x^1,0,\cdots,0) = y_1^\alpha(x^1,0,\cdots,0). \end{cases} \tag{4.16}$$

上式表明函数 $y_2^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0)$ 关于 x^2 的偏导数满足方程组(4.9)，但是它关于 x^1 的偏导数只在 $x^2 = 0$ 时满足方程组(4.9)(见(4.11)式). 利用可积条件(4.10)可以证明，函数 $y_2^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0)$ 关于 x^1 的偏导数对于 x^2 的任意值，$|x^2| < \varepsilon_2$，也是满足方程组(4.9)的. 为此，令

$$g^\alpha(x^1,x^2) = \frac{\partial y_2^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0)}{\partial x^1} - f_1^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0,y_2(x^1,x^2,0,\cdots,0)).$$

我们要证明 $g^\alpha(x^1,x^2) \equiv 0$. 由(4.16)及(4.11)两式得到

$$g^\alpha(x^1,0) = \frac{\partial y_1^\alpha(x^1,0,\cdots,0)}{\partial x^1} - f_1^\alpha(x^1,0,\cdots,0,y_1(x^1,0,\cdots,0)) = 0. \tag{4.17}$$

另外，将 $g^\alpha(x^1,x^2)$ 对 x^2 求导得到

$$\frac{\partial g^\alpha(x^1,x^2)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial y_2^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0)}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x^2}(f_1^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0,y_2(x^1,x^2,0,\cdots,0)))$$

$$=\frac{\partial f_2^\alpha}{\partial x^1}+\frac{\partial f_2^\alpha}{\partial y^\beta}\frac{\partial y_2^\beta(x^1,x^2,0,\cdots,0)}{\partial x^1}-\frac{\partial f_1^\alpha}{\partial x^2}-\frac{\partial f_1^\alpha}{\partial y^\beta}\frac{\partial y_2^\beta(x^1,x^2,0,\cdots,0)}{\partial x^2}$$

$$=\frac{\partial f_2^\alpha}{\partial y^\beta}\cdot g^\beta(x^1,x^2)+\frac{\partial f_2^\alpha}{\partial x^1}+\frac{\partial f_2^\alpha}{\partial y^\beta}\cdot f_1^\beta-\frac{\partial f_1^\alpha}{\partial x^2}-\frac{\partial f_1^\alpha}{\partial y^\beta}\cdot f_2^\beta.$$

上式末端各个函数 f_i^α 及其导数$\frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x^j}, \frac{\partial f_i^\alpha}{\partial y^\beta}$都在$(x^1,x^2,0,\cdots,0,y_2(x^1,x^2,0,\cdots,0))$处求值. 利用条件(4.10)得到

$$\frac{\partial g^\alpha(x^1,x^2)}{\partial x^2}=\sum_\beta\frac{\partial f_2^\alpha}{\partial y^\beta}g^\beta(x^1,x^2). \tag{4.18}$$

因此 $g^\alpha(x^1,x^2)$ 看作 x^2 的函数满足一阶线性齐次方程组(4.18)及初条件(4.17). 由解的唯一性得到 $g^\alpha(x^1,x^2)\equiv 0$.

下一步,固定 x^1,x^2 的值,使得 $|x^1|<\varepsilon_1,|x^2|<\varepsilon_2$,考虑方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}t}=f_3^\alpha(x^1,x^2,t,\cdots,0,\xi),\\ \xi^\alpha|_{t=0}=y_2^\alpha(x^1,x^2,0,\cdots,0).\end{cases}$$

设它的解是 $\xi_3^\alpha(t;x^1,x^2)$, $|t|<\varepsilon_3$,且令

$$y_3^\alpha(x^1,x^2,x^3,0,\cdots,0)=\xi_3^\alpha(x^3;x^1,x^2).$$

然后利用 ξ_3^α 所满足的方程及可积条件(4.10)可以证明 $y_3^\alpha(x^1,x^2,x^3,0,\cdots,0)$ 满足方程组

$$\frac{\partial y_3^\alpha(x^1,x^2,x^3,0,\cdots,0)}{\partial x^\lambda}=f_\lambda^\alpha(x^1,x^2,x^3,0,\cdots,0,y_3(x^1,x^2,x^3,0,\cdots,0)),$$

$$1\leqslant\alpha\leqslant n,\quad 1\leqslant\lambda\leqslant 3.$$

继续这个过程,最后得到定义在$(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)\times\cdots\times(-\varepsilon_m,\varepsilon_m)\subset U$上的函数 $y^\alpha(x^1,\cdots,x^m)$,它满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^i}=f_i^\alpha(x,y(x)),\\ y^\alpha(0)=y_0^\alpha.\end{cases}$$

证毕.

回顾一下定理 4.4 的证明过程:我们首先在 $U\times V$ 的坐标面 $x^2=\cdots=x^m=0$ 上考虑,得到一条经过点 y_0 的关于自变量 x^1 的积分曲线 $y(x^1,0,\cdots,0)$. 然后经过这条积分曲线上每一点 $y(x^1,0,\cdots,0)$ 作关于自变量 x^2 的积分曲线 $y(x^1,x^2,0,\cdots,0)$. 这些积分曲线构成一个 2 维子流形,可积条件就是要保证这个 2 维子流形是原方程组的 2 维积分流形. 接着,经过这 2 维积分流形上每一点作关于自变量 x^3 的积分曲线,构成一个 3 维子流形,再用可积条件证明它是原方程组的一个 3 维积分流形. 于是我们所得到的是一阶偏微分方程组的、其维数逐渐升高的一系列积分流形;在已得到的 r 维($r<m$)积分流形的

基础上，利用常微分方程理论构造出高一维的子流形，而可积条件(4.10)保证这个高一维的子流形是方程组(4.9)的 $r+1$ 维积分流形等等. 这种做法在偏微分方程组一般理论的研究中是典型的.

现在我们运用定理 4.4 来证明定理 4.3.

定理 4.3 的证明 任取一点 $p\in U$，则有局部坐标系 $(V;x^i)$，$p\in V\subset U$，以及 h 个光滑切向量场 $X_\alpha\in\mathscr{X}(V)$，$1\leqslant\alpha\leqslant h$，使得

$$L^h|_V=\mathrm{Span}\{X_1,\cdots,X_h\}.$$

假设

$$X_\alpha=\sum_{i=1}^m a_\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i},\tag{4.19}$$

其中 $a_\alpha^i\in C^\infty(V)$. 由于 $X_1,\cdots,X_h$ 处处线性无关，不妨设 $\det(a_\alpha^\beta)$ 在 V 内处处不为零，并且用 (b_α^β) 表示 (a_α^β) 的逆矩阵. 令

$$\widetilde{X}_\alpha=\sum_{\beta=1}^h b_\alpha^\beta X_\beta=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}+\sum_{r=h+1}^m C_\alpha^r\frac{\partial}{\partial x^r},\tag{4.20}$$

其中 $C_\alpha^r=\sum\limits_{\beta=1}^h b_\alpha^\beta a_\beta^r\in C^\infty(V)$，则我们有

$$L^h|_V=\mathrm{Span}\{\widetilde{X}_1,\cdots,\widetilde{X}_h\},$$

并且 $\widetilde{X}_1,\cdots,\widetilde{X}_h,\dfrac{\partial}{\partial x^{h+1}},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^m}$ 是线性无关的.

直接计算得到

$$\begin{aligned}[\widetilde{X}_\alpha,\widetilde{X}_\beta]&=\left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}+\sum_r C_\alpha^r\frac{\partial}{\partial x^r},\quad \frac{\partial}{\partial x^\beta}+\sum_s C_\beta^s\frac{\partial}{\partial x^s}\right]\\&=\sum_{s=h+1}^m\left\{\frac{\partial C_\beta^s}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial C_\alpha^s}{\partial x^\beta}+\sum_{r=h+1}^m\left(C_\alpha^r\frac{\partial C_\beta^s}{\partial x^r}-C_\beta^r\frac{\partial C_\alpha^s}{\partial x^r}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial x^s}.\end{aligned}$$

由于 L^h 满足 Frobenius 条件，故 $[\widetilde{X}_\alpha,\widetilde{X}_\beta]$ 能够表示成 $\widetilde{X}_\gamma$ 的线性组合，所以由上面的表达式可知在 V 上必须有恒等式

$$\frac{\partial C_\beta^s}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial C_\alpha^s}{\partial x^\beta}+\sum_{r=h+1}^m\left(C_\alpha^r\frac{\partial C_\beta^s}{\partial x^r}-C_\beta^r\frac{\partial C_\alpha^s}{\partial x^r}\right)=0,\tag{4.21}$$

即函数组 C_α^r 在 V 上满足定理 4.4 的条件.

假定 $x^i(p)=x_0^i,\forall\, i$，并且将邻域 V 与 $\mathbf{R}^m$ 中的一个开子集等同起来. 这样，在 $\mathbf{R}^h$ 和 $\mathbf{R}^{m-n}$ 中分别有 $(x_0^1,\cdots,x_0^h)$ 和 $(x_0^{h+1},\cdots,x_0^m)$ 的邻域 W_1,W_2，使得 $W_1\times W_2\subset V$. 由定理 4.4 可知，对于任意的 $(y^{h+1},\cdots,y^m)\in W_2$，方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x^r}{\partial x^\alpha}=C_\alpha^r(x^1,\cdots,x^m),\\ x^r(x_0^1,\cdots,x_0^h)=y^r,1\leqslant\alpha\leqslant h,h+1\leqslant r\leqslant m\end{cases}\tag{4.22}$$

有唯一解 $x^r=f^r(x^1,\cdots,x^h;y^{h+1},\cdots,y^m)$，其中 $(x^1,\cdots,x^h)\in W_1$，且 f^r 光滑地

依赖于自变量 $x^1,\cdots,x^h$ 和初始值 $y^{h+1},\cdots,y^m$. 特别地,(4.22) 的第二式是

$$f^r(x_0^1,\cdots,x_0^h;y^{h+1},\cdots,y^m) = y^r. \tag{4.23}$$

引进新的参数 $(y^1,\cdots,y^m)$,令

$$\begin{cases} x^\alpha = y^\alpha, \\ x^r = f^r(y^1,\cdots,y^h;y^{h+1},\cdots,y^m), \end{cases} \tag{4.24}$$

方程组(4.22) 的积分流形对应于

$$y^{h+1} = \text{const}, \quad \cdots, \quad y^m = \text{const}.$$

由于

$$\left.\frac{\partial(x^1,\cdots,x^m)}{\partial(y^1,\cdots,y^m)}\right|_{(y^1,\cdots,y^m)=(x_0^1,\cdots,x_0^m)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots & \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ C_1^{h+1} & \cdots & C_h^{h+1} & 1 & & \\ & \vdots & & & \ddots & \\ C_1^m & \cdots & C_h^m & & & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

所以 $(y^1,\cdots,y^m)$ 可以作为点 p 附近的新的局部坐标系. 此时,

$$\frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \sum_\beta \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta} + \sum_r \frac{\partial x^r}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^r}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \sum_{r=h+1}^m C_\alpha^r \frac{\partial}{\partial x^r} = \widetilde{X}_\alpha,$$

因此

$$L^h|_{W_1\times W_2} = \text{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^h}\right\},$$

证毕.

定理 4.3 和定理 4.4 是局部的存在性定理. 下面我们简要地给出 Frobenius 定理的大范围的叙述.

定义 4.7 设 L^h 是定义在 m 维光滑流形 M 上的 h 维光滑分布. 设 (φ,N) 是分布 L^h 的一个连通的积分流形,并且它的象 $\varphi(N)$ 不是 L^h 的另一个连通积分流形的真子集,则称 (φ,N) 是 L^h 的**极大积分流形**.

定理 4.5 设 M 是具有第二可数公理的 m 维光滑流形,L^h 是 M 上的 h 维光滑分布,如果 L^h 满足 Frobenius 条件,则对于任意一点 $p\in M$,必存在 L^h 的唯一的一个极大积分流形经过点 p,并且 L^h 的经过点 p 的每一个连通积分流形必包含在这个极大积分流形内.

关于此定理的完整证明可以查考[26],p. 48. 在这里,我们只叙述一下大

意.

根据定理 4.3,在 M 上存在一族局部坐标系 $\{(U_\alpha;x_\alpha^i)\}$,其中 $\{U_\alpha\}$ 构成 M 的可数开覆盖,且在 U_α 中的坐标面

$$x_\alpha^{h+1}=\text{const},\quad \cdots,\quad x_\alpha^m=\text{const} \tag{4.25}$$

是 L^h 的 h 维积分流形.

设 N 是连通的 h 维光滑流形,且 $\varphi: N\to M$ 是 L^h 的积分流形,即

$$\forall\ p\in N,\quad \varphi_*(T_pN)=L^h(\varphi(p)).$$

根据 φ 的连续性,若 $\varphi(p)\in U_\alpha$,则有点 p 在 N 中的连通邻域 V,使得 $\varphi(V)\subset U_\alpha$,故 $\varphi(V)$ 包含在 U_α 的某个坐标面(4.25)内. 设 q 是 N 上另外一点,C 是联结 p,q 的分段光滑曲线,则 C 可以用有限多个如上所述的邻域 V 覆盖住. 换句话说,N 上任意一点 q 都能用分段光滑曲线 $C:[0,1]\to N$ 与点 p 连结起来,并且其中每一段光滑曲线都是 L^h 的一维积分流形,即有 $[0,1]$ 的分割

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_r=1,$$

使得每一段曲线 $C|_{[t_i,t_{i+1}]}$ 是光滑的,并且 $\varphi\circ C|_{[t_i,t_{i+1}]}$ 是 L^h 的一维积分流形.

上述讨论启发我们如何去构造分布 L^h 的经过点 $p\in M$ 的极大积分流形. 设 $p\in M$,令

$$K=\{q\in M: q\text{ 能用分段光滑曲线与 } p \text{ 连结,且每段光滑曲线是 } L^h \text{ 的一维积分流形}\}. \tag{4.26}$$

在 K 上能引进光滑流形结构,使之成为 h 维连通光滑流形,并可证明 (i,K) 是 L^h 的经过点 p 的极大积分流形,这里 $i:K\to M$ 是包含映射.

事实上,若 $q\in K$,则 q 必属于某个 U_α. 于是坐标面

$$x_\alpha^{h+1}=x_\alpha^{h+1}(q),\cdots,x_\alpha^m=x_\alpha^m(q)$$

的含有 q 的连通分支必包含在 K 内. 将该连通分支取为点 q 在 K 中的坐标邻域,且以 $x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^h$ 为其中的局部坐标. 可以验证,这样给出的坐标邻域构成 K 的 C^∞- 坐标覆盖,从而使 K 成为 h 维光滑流形,且 (i,K) 是 L^h 的积分流形. 根据 K 的定义以及前面的讨论,若 (φ,N) 是 L^h 的经过点 p 的连通积分流形,则必有 $\varphi(N)\subset K$,因此 K 是极大的.

由定理 4.5 可见,在 M 中存在一族 h 维连通的、单一浸入的子流形,满足如下条件:

(1) 对于 M 上任意一点 p,必有族中的一个子流形通过它;

(2) 存在点 p 的局部坐标系 $(U;x^i)$,使得在族中的子流形 (i,K) 满足 $K\cap U\neq\varnothing$ 时,$K\cap U$ 的连通分支为

$$\{q\in U: x^{h+1}(q)=\text{const},\cdots,x^m(q)=\text{const}\}.$$

这样的子流形族称为 M 的一个**叶状结构**(*foliation*),其中的每一个子流形称为**叶**(*leaf*). 因此,定理 4.5 的意义是:M 上满足 Frobenius 条件的 h 维分布在

M 上决定了一个叶状结构. 关于叶状结构的拓扑和几何的研究，是 60 年代以来一个重要的课题，有兴趣的读者可进一步阅读有关的著作，例如[24].

§5 光滑张量场

设 M 是 m 维光滑流形. 根据光滑流形的结构，在每一点 $x \in M$ 有切空间 T_xM 和余切空间 T_x^*M，从而在每一点 $x \in M$ 有 (p,q) 型张量的概念. 在点 x 的 (p,q) 型张量构成的空间记作

$$T_q^p(x) = \underbrace{T_xM \otimes \cdots \otimes T_xM}_{p\text{ 个}} \otimes \underbrace{T_x^*M \otimes \cdots \otimes T_x^*M}_{q\text{ 个}},$$
$$= \mathscr{L}(\underbrace{T_x^*M, \cdots, T_x^*M}_{p\text{ 个}}, \underbrace{T_xM, \cdots, T_xM}_{q\text{ 个}}; \mathbf{R})$$

其中 p 是反变阶数，q 是协变阶数.（参看第一章，§4 和第二章，§3).

在光滑流形上更多的构造常常是以张量场的形式出现的，因此掌握光滑张量场的一般概念是十分重要的. 在本节，我们先引进光滑张量场的概念，并研究它们的性质，然后证明在光滑流形上存在对称的、正定 2 阶协变张量场，这种张量场就是光滑流形上的所谓黎曼度量张量.

定义 5.1 光滑流形 M 上的一个 (p,q) 型张量场 τ 是指在每一点 $x \in M$ 都指定了一个 (p,q) 型张量 $\tau(x) \in T_q^p(x)$. 若在每一点 $x \in M$ 都有一个局部坐标系 $(U;x^i)$，使得 (p,q) 型张量场 τ 有局部坐标表达式

$$\tau|_U = \tau^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_q}, \tag{5.1}$$

其中分量 $\tau^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q} \in C^\infty(U)$，则称 τ 是流形 M 上的一个**光滑的** (p,q) **型张量场**.

通常，我们把光滑 (p,q) 型张量场说成“以光滑的方式”在流形的每一点指定了一个 (p,q) 型张量.

光滑切向量场就是光滑的 $(1,0)$ 型张量场.

光滑的 $(0,1)$ 型张量场称为**一次微分式**. M 上全体一次微分式的集合记作 $A^1(M)$.

下面，我们给出两个例子：

例 1 光滑流形 M 在每一点的切空间上的恒同映射 $\mathrm{id}: T_xM \to T_xM$，$x \in M$，给出流形 M 上一个光滑的 $(1,1)$ 型张量场 τ. 它的定义是：在任意一点 $x \in M$，对于任意的 $\alpha \in T_x^*M$，$v \in T_xM$，令

$$\tau(x)(\alpha, v) = \alpha(\mathrm{id}(v)) = \alpha(v).$$

在点 x 的局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，我们有

$$\tau(x)\left(\mathrm{d}x^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j.$$

所以，τ 的局部坐标表达式是

$$\tau|_U = \sum_{i,j=1}^m \delta^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \mathrm{d}x^j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \mathrm{d}x^i, \tag{5.2}$$

其中 δ^i_j 是常值函数. 由此可见，τ 是光滑的(1,1) 型张量场.

例 2　设 $f \in C^\infty(M)$，则在每一点 $x \in M$，我们有余切向量 $\mathrm{d}f(x) \in T^*_x M$(参看第二章，§3，(3.15) 式). 这样，$\mathrm{d}f$ 是 M 上光滑的(0,1) 型张量场，即 $\mathrm{d}f$ 是 M 上的一次微分式. 实际上，若设$(U;x^i)$ 是局部坐标系，则

$$\mathrm{d}f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^\infty(U),$$

而且

$$\mathrm{d}f|_U = \sum_{i=1}^m \mathrm{d}f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i, \tag{5.3}$$

因此 $\mathrm{d}f \in A^1(M)$.

M 上全体光滑的(p,q) 型张量场的集合记作 $\mathscr{T}^p_q(M)$. 在 $\mathscr{T}^p_q(M)$ 中有加法，数乘法和 $C^\infty(M)$- 乘法. 此外还有张量积运算 $\otimes : \mathscr{T}^p_q(M) \times \mathscr{T}^r_s(M) \to \mathscr{T}^{p+r}_{q+s}(M)$ 和缩并. 这些运算都是逐点对于张量进行的，因此，张量运算的规则对于张量场也是成立的. 若记

$$\mathscr{T}(M) = \bigoplus_{p,q\geqslant 0} \mathscr{T}^p_q(M),$$

则 $\mathscr{T}(M)$ 成为一个 $C^\infty(M)$- 模，其中

$$\mathscr{T}^0_0(M) = C^\infty(M), \quad \mathscr{T}^1_0(M) = \mathscr{X}(M), \quad \mathscr{T}^0_1(M) = A^1(M).$$

定义 5.1 与定义 2.2 一样，都是通过张量场在局部坐标系下的表达式中分量的光滑性来定义张量场本身的光滑性的. 这种做法的优点是比较直观，与通常所理解的“场”的概念相吻合. 如同光滑切向量场 $v \in \mathscr{X}(M)$ 可以看作满足一定条件的映射 $v : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$(参看本章，定理 2.2)，光滑的$(p,q)$ 型张量场 τ 也可以看作映射

$$\tau:\ \underbrace{A^1(M) \times \cdots \times A^1(M)}_{p\text{ 个}} \times \underbrace{\mathscr{X}(M) \times \cdots \times \mathscr{X}(M)}_{q\text{ 个}} \to C^\infty(M).$$

实际上，若取 $\alpha^1, \cdots, \alpha^p \in A^1(M)$，$v_1, \cdots, v_q \in \mathscr{X}(M)$，则函数 $\tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^p, v_1, \cdots, v_q)$ 定义为：

$$\begin{aligned}&(\tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^p, v_1, \cdots, v_q))(x)\\ &= \tau(x)(\alpha^1(x), \cdots, \alpha^p(x), v_1(x), \cdots, v_q(x)), \quad \forall\, x \in M.\end{aligned} \tag{5.4}$$

至于该函数的光滑性，只要取局部坐标系$(U;x^i)$，则

$$\alpha^a|_U = \alpha^a_i dx^i, \quad 1 \leqslant a \leqslant p,$$

$$v_b|_U = v_b^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad 1 \leqslant b \leqslant q,$$

其中 $\alpha_i^a, v_b^j \in C^\infty(U)$，于是

$$\begin{aligned}&\tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^p, v_1, \cdots, v_q)|_U \\ &= \tau^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q} \alpha_{i_1}^1 \cdots \alpha_{i_p}^p v_1^{j_1} \cdots v_q^{j_q} \in C^\infty(U),\end{aligned} \tag{5.5}$$

其中 $\tau^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q}$ 是 $\tau|_U$ 的分量，是 U 上的光滑函数. 所以 $\tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^p, v_1, \cdots, v_q)|_U$ 是 U 上的光滑函数.

反过来，当映射

$$\tau: A^1(M) \times \cdots \times A^1(M) \times \mathscr{X}(M) \times \cdots \times \mathscr{X}(M) \to C^\infty(M)$$

满足一定条件时，它便是 M 上的一个光滑张量场. 我们有下面的定理：

定理 5.1 设

$$\tau: \underbrace{A^1(M) \times \cdots \times A^1(M)}_{p\text{ 个}} \times \underbrace{\mathscr{X}(M) \times \cdots \times \mathscr{X}(M)}_{q\text{ 个}} \to C^\infty(M)$$

是 $p+q$ 重线性映射，并且对每一个自变量都是 $C^\infty(M)$- 线性的，即对于任意的 $1 \leqslant a \leqslant p, 1 \leqslant b \leqslant q$ 及 $\mu \in C^\infty(M)$ 有

$$\begin{aligned}&\tau(\alpha^1, \cdots, \mu\alpha^a, \cdots, \alpha^p, v_1, \cdots, v_q) \\ &= \tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^p, v_1, \cdots, \mu v_b, \cdots, v_q) \\ &= \mu \cdot \tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^p, v_1, \cdots, v_q),\end{aligned} \tag{5.6}$$

则映射 τ 在每一点 $x \in M$ 以光滑的方式指定了一个 (p,q) 型张量，使得 τ 恰好是这个光滑的 (p,q) 型张量场通过(5.4)式所定义的映射.

证明 为节省篇幅，我们只证 $(p,q) = (0,1)$ 的情形，其余情形的证明是类似的.

设有线性映射 $\tau: \mathscr{X}(M) \to C^\infty(M)$，满足如下条件：对任意的 $v \in \mathscr{X}(M)$ 及 $\mu \in C^\infty(M)$ 有

$$\tau(\mu \cdot v) = \mu \cdot \tau(v). \tag{5.7}$$

我们要在 M 上定义一个光滑的 $(0,1)$ 型张量场 $\tilde{\tau}$，使得在每一点 $x_0 \in M$ 有

$$\tilde{\tau}(x_0)(X(x_0)) = (\tau(X))(x_0), \quad \forall\, X \in \mathscr{X}(M). \tag{5.8}$$

首先注意到，在条件(5.7)下，映射 $\tau: \mathscr{X}(M) \to C^\infty(M)$ 有局部性，即：若 $X, Y \in \mathscr{X}(M)$，且在开子集 $U \subset M$ 上有 $X|_U = Y|_U$，则 $\tau(X)|_U = \tau(Y)|_U \in C^\infty(U)$. 事实上，任取 $x_0 \in U$，则有 x_0 的邻域 V，使得 $\overline{V}$ 是紧致的，且 $x_0 \in V \subset \overline{V} \subset U$. 由第二章的引理 2.2，存在函数 $f \in C^\infty(M)$，使得 $f|_V \equiv 1$，且 $f|_{M \setminus U} \equiv 0$. 于是，$f \cdot (X - Y)$ 是 M 上的零向量场.

线性映射 τ 在零向量场上的值必是零函数. 实际上

$$\tau(0) = \tau(0) + \tau(0) = 2\tau(0),$$

即

$$\tau(0) = 0,$$

故利用(5.7)式以及映射 τ 的线性性质得到

$$0 = \tau(f \cdot (X - Y)) = f \cdot (\tau(X) - \tau(Y)).$$

特别是在点 x_0，有

$$(\tau(X))(x_0) = (\tau(Y))(x_0),$$

故

$$\tau(X)|_U = \tau(Y)|_U.$$

利用映射 τ 的局部性，对于 M 的任意一个开子集 U，不难诱导出线性映射 $\tau: \mathscr{X}(U) \to C^\infty(U)$，并且它满足对应的条件(5.7).

设$(U;x^i)$是 x_0 的任意一个局部坐标系. 又设 $v \in \mathscr{X}(U)$，故有

$$v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{5.9}$$

其中 $v^i \in C^\infty(U)$. 将映射 τ 作用在 v 上，并利用条件(5.7)，则得

$$\tau(v) = \sum_i v^i \cdot \tau\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

特别地，我们有

$$(\tau(v))(x_0) = \sum_i v^i(x_0) \cdot \left(\tau\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)(x_0). \tag{5.10}$$

它表明$(\tau(v))(x_0)$线性地依赖于切向量场 v 在 x_0 处的分量，与 v 在点 x_0 以外的值无关.

现在可以在每一点 $x_0 \in M$ 定义余切向量 $\tilde{\tau}(x_0) \in T^*_{x_0}M$ 如下：任取 $v_0 \in T_{x_0}M$，作 v_0 在点 x_0 的邻域 U 内的任意的光滑扩张 $v \in \mathscr{X}(U)$，使得 $v(x_0) = v_0$. 令

$$(\tilde{\tau}(x_0))(v_0) = (\tau(v))(x_0).$$

上式是有意义的. 实际上，若有 $\tilde{v} \in \mathscr{X}(U)$，使得 $\tilde{v}(x_0) = v_0$，则从(5.10)式可知

$$(\tau(v))(x_0) = (\tau(\tilde{v}))(x_0),$$

即$(\tau(v))(x_0)$与向量 v_0 的扩张 v 无关. 很明显，映射 $\tilde{\tau}(x_0): T_{x_0}M \to \mathbf{R}$ 是线性的，故 $\tilde{\tau}(x_0) \in T^*_{x_0}M$. 这样，我们便得到光滑流形 M 上的余切向量场 $\tilde{\tau}$.

在局部坐标系$(U;x^i)$下，余切向量场 $\tilde{\tau}$ 的局部坐标表达式是

$$\tilde{\tau}|_U = \sum_{i=1}^m \tilde{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \mathrm{d}x^i,$$

其中分量 $\tilde{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ 为

$$\left(\tilde{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)(x_0)=(\tilde{\tau}(x_0))\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\left(\tau\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)(x_0),\quad \forall\, x_0\in U,$$

所以

$$\tilde{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\tau\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\in C^\infty(U),\tag{5.11}$$

故 $\tilde{\tau}$ 是光滑的余切向量场. 由上式及条件(5.7)可知,对于任意的 $v\in\mathscr{X}(M)$,有

$$\tilde{\tau}(v)=\tau(v).$$

回顾一下定理5.1的证明,映射 τ 的 $C^\infty(M)$-线性的性质保证映射 τ 具有局部性,因而映射 τ 可以作用到定义在开子集 U 上的光滑切向量场的空间 $\mathscr{X}(U)$ 上. 进一步,映射 τ 的 $C^\infty(M)$-线性的性质使得 τ 在 $v\in\mathscr{X}(U)$ 上的作用有局部坐标表达式(5.10),这是能够在每一点定义余切向量的关键. 总而言之,$C^\infty(M)$-线性性质是光滑张量场的特征性质,所以经常把它称为张量性质. 一般情形的证明步骤与上述步骤是相同的.

例 3　将切向量场的李导数看成双线性算子 $\mathscr{L}:\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$,使得对于任意的 $(X,Y)\in\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)$,

$$\mathscr{L}(X,Y)=\mathscr{L}_YX=[Y,X],$$

则 $\mathscr{L}$ 对于每一个自变量 X,Y 都不是 $C^\infty(M)$-线性的(参看 §2,(2.10)式). 所以,$\mathscr{L}$ 不是(1,2)型张量场.

设 X 是光滑流形 M 上的光滑切向量场,φ_t 是它所对应的单参数可微变换群,经过点 x 的轨线记作 $\gamma_x(t)$. 由于 φ_t 是可微同胚,故有线性同构

$$(\varphi_t^{-1})_*=(\varphi_{-t})_*:T_{\gamma_x(t)}M\to T_xM,$$

$$(\varphi_t)^*:T^*_{\gamma_x(t)}M\to T^*_xM.$$

因此,它们诱导出张量空间的线性同构

$$\Phi_t:T^p_q(\gamma_x(t))\to T^p_q(x).\tag{5.12}$$

实际上,若设 $(U;x^i)$ 是局部坐标系,并且当 $|t|<\varepsilon$ 时,有 $\gamma_x(t)\in U$. 设 (p,q) 型张量 $\tau\in T^p_q(\gamma_x(t))$ 的局部坐标表达式是

$$\tau(\gamma_x(t))=\tau^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}(\gamma_x(t))\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_q}\right)\Bigg|_{\gamma_x(t)},\tag{5.13}$$

则

$$(\Phi_t(\tau))(x)=\tau^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}(\gamma_x(t))(\varphi_{-t})_*\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Bigg|_{\gamma_x(t)}\right)\otimes\cdots\otimes(\varphi_{-t})_*\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\Bigg|_{\gamma_x(t)}\right)$$
$$\otimes(\varphi_t)^*(\mathrm{d}x^{j_1}|_{\gamma_x(t)})\otimes\cdots\otimes(\varphi_t)^*(\mathrm{d}x^{j_q}|_{\gamma_x(t)}).\tag{5.14}$$

上述定义与局部坐标系的取法无关.

引理 5.2　设 X 是光滑流形 M 上的光滑切向量场，φ_t 是它所对应的单参数可微变换群，则对于 M 上任意两个光滑的张量场 S,T 有：

(1) 对于任意固定的充分小的 t，$\Phi_t S$ 仍是 M 上与 S 同型的光滑张量场，并且

$$\lim_{t\to 0}\Phi_t(S(\varphi_t(p))) = S(p), \quad \forall\, p \in M; \tag{5.15}$$

$$(2)\ \Phi_t(S \otimes T) = \Phi_t(S) \otimes \Phi_t(T); \tag{5.16}$$

(3) 设 C_b^a 是张量场 S 关于第 a 个反变指标与第 b 个协变指标的缩并，则

$$\Phi_t(C_b^a(S)) = C_b^a(\Phi_t(S)). \tag{5.17}$$

证明　(1) 不妨在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下考虑. 设单参数可微变换群 φ 的局部坐标表示是

$$(\varphi(t,x))^i = \varphi^i(t,x^1,\cdots,,x^m),$$

它们是 $t,x^1,\cdots,x^m$ 的光滑函数. 容易证明

$$(\varphi_{-t})_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi_t(p)}\right) = \left.\frac{\partial\varphi^j(-t,x)}{\partial x^i}\right|_{x=\varphi_t(p)} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p, \tag{5.18}$$

$$(\varphi_t)^*(\mathrm{d}x^i|_{\varphi_t(p)}) = \left.\frac{\partial\varphi^i(t,x)}{\partial x^j}\right|_{x=p} \cdot \mathrm{d}x^j|_p, \tag{5.19}$$

其中 $p \in U$.

设 (r,s) 型光滑张量场 S 的局部坐标表达式是

$$S|_U = S_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s},$$

其中 $S_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r} \in C^\infty(U)$. 那么由(5.14)，(5.18)得到

$$\begin{aligned}\Phi_t(S(\varphi_t(p))) = {} & S_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}(\varphi_t(p))\left.\frac{\partial\varphi^{k_1}(-t,x)}{\partial x^{i_1}}\right|_{x=\varphi_t(p)} \\ & \cdots\left.\frac{\partial\varphi^{k_r}(-t,x)}{\partial x^{i_r}}\right|_{x=\varphi_t(p)} \cdot \left.\frac{\partial\varphi^{j_1}(t,x)}{\partial x^{l_1}}\right|_{x=p} \cdots \left.\frac{\partial\varphi^{j_s}(t,x)}{\partial x^{l_s}}\right|_{x=p} \\ & \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\right|_p \otimes \cdots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{k_r}}\right|_p \otimes \mathrm{d}x^{l_1}|_p \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{l_s}|_p.\end{aligned} \tag{5.20}$$

显然，$\Phi_t(S(\varphi_t(p)))$ 的分量是点 p 的光滑函数，故 $\Phi_t(S)$ 是与 S 同型的光滑张量场.

由于 $\varphi_0 = \mathrm{id}$，故在(5.20)式中让 $t \to 0$，便得到(5.15)式.

(2) 是 Φ_t 的定义的直接结果.

(3) 为简便起见，只考虑缩并 C_1^1. 由缩并的定义，$C_1^1(\Phi_t(S(\varphi_t(p))))$ 只是将表达式(5.20)中的 $\left.\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\right|_p$ 与 $\mathrm{d}x^{l_1}|_p$ 配对的结果，即

$$C_1^1(\Phi_t(S(\varphi_t(p)))) = S_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}(\varphi_t(p)) \cdot \left.\frac{\partial\varphi^{k_1}(-t,x)}{\partial x^{i_1}}\right|_{x=\varphi_t(p)}$$

$$\cdots \left.\frac{\partial \varphi^{k_r}(-t,x)}{\partial x^{i_r}}\right|_{x=\varphi_t(p)} \cdot \left.\frac{\partial \varphi^{j_1}(t,x)}{\partial x^{l_1}}\right|_{x=p} \cdots \left.\frac{\partial \varphi^{j_s}(t,x)}{\partial x^{l_s}}\right|_{x=p}$$

$$\cdot \left\langle \mathrm{d}x^{l_1}, \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \right\rangle \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^{k_2}}\right|_p \otimes \cdots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{k_r}}\right|_p \otimes \mathrm{d}x^{l_2}|_p \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{l_s}|_p.$$

注意到上式中的

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial \varphi^{k_1}(-t,x)}{\partial x^{i_1}}\right|_{x=\varphi_t(p)} \cdot \left.\frac{\partial \varphi^{j_1}(t,x)}{\partial x^{l_1}}\right|_{x=p} \cdot \left\langle \mathrm{d}x^{l_1}, \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \right\rangle \\
&= \left.\frac{\partial \varphi^{k_1}(-t,x)}{\partial x^{i_1}}\right|_{x=\varphi_t(p)} \cdot \left.\frac{\partial \varphi^{j_1}(t,x)}{\partial x^{k_1}}\right|_{x=p} \\
&= \left.\frac{\partial \varphi^{j_1}(t,\varphi(-t,x))}{\partial x^{i_1}}\right|_{x=\varphi_t(p)} = \delta_{i_1}^{j_1},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
C_1^1(\Phi_t(S(\varphi_t(p)))) &= S_{i_1 j_2 \cdots j_s}^{i_1 i_2 \cdots i_r}(\varphi_t(p)) \cdot \left.\frac{\partial \varphi^{k_2}(-t,x)}{\partial x^{i_2}}\right|_{x=\varphi_t(p)} \\
&\cdots \left.\frac{\partial \varphi^{k_r}(-t,x)}{\partial x^{i_r}}\right|_{x=\varphi_t(p)} \cdot \left.\frac{\partial \varphi^{j_2}(t,x)}{\partial x^{l_2}}\right|_{x=p} \cdots \left.\frac{\partial \varphi^{j_s}(-t,x)}{\partial x^{l_s}}\right|_{x=p} \\
&\cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^{k_2}}\right|_p \otimes \cdots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{k_r}}\right|_p \otimes \mathrm{d}x^{l_2}|_p \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{l_s}|_p \\
&= \Phi_t(C_1^1(S(\varphi_t(p)))),
\end{aligned}$$

即

$$C_1^1(\Phi_t(S)) = \Phi_t(C_1^1(S)).$$

定义 5.2 设 X 是光滑流形 M 上的光滑切向量场，φ_t 是对应的单参数可微变换群. 设 τ 是流形 M 上的 (r,s) 型光滑张量场，令

$$\mathscr{L}_X \tau = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t(\tau) - \tau}{t}, \tag{5.21}$$

则 $\mathscr{L}_X \tau$ 仍是 M 上的 (r,s) 型光滑张量场，称为张量场 τ 沿着切向量场 X 的**李导数**.

注意到在(5.14)式及定义 5.2 中，只要 φ_t 是由 X 生成的局部单参数变换群就行了，但是叙述起来要麻烦一点. 所以我们都简单地假定 X 是对应于单参数可微变换群 φ 的切向量场，其实 X 可以是 M 上任意的光滑切向量场.

定理 5.3 光滑流形 M 上的光滑张量场关于光滑切向量场 X 的李导数 $\mathscr{L}_X$ 有以下的运算法则：

(1) $\mathscr{L}_X$ 是线性的，即对于任意的 $\tau_1, \tau_2 \in \mathscr{T}_s^r(M)$，$\lambda \in \mathbf{R}$，有

$$\mathscr{L}_X(\tau_1 + \lambda\tau_2) = \mathscr{L}_X\tau_1 + \lambda\mathscr{L}_X\tau_2;$$

(2) 设 $\tau_1 \in \mathscr{T}_s^r(M)$，$\tau_2 \in \mathscr{T}_q^p(M)$，则

$$\mathscr{L}_X(\tau_1 \otimes \tau_2) = \mathscr{L}_X\tau_1 \otimes \tau_2 + \tau_1 \otimes \mathscr{L}_X\tau_2; \tag{5.22}$$

(3) 设 $\tau \in \mathscr{T}^p_q(M)$, $1 \leqslant r \leqslant p$, $1 \leqslant s \leqslant q$,则

$$C^r_s(\mathscr{L}_X \tau) = \mathscr{L}_X(C^r_s(\tau)). \tag{5.23}$$

证明 (1) 根据李导数 $\mathscr{L}_X$ 的定义,这是显然的.

(2) 由定义及引理 5.2 得到

$$\begin{aligned}
&(\mathscr{L}_X(\tau_1 \otimes \tau_2))(x_0)\\
&=\lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t(\tau_1(\varphi_t(x_0)) \otimes \tau_2(\varphi_t(x_0))) - \tau_1(x_0) \otimes \tau_2(x_0)}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\Phi_t(\tau_1(\varphi_t(x_0))) - \tau_1(x_0)}{t} \otimes \Phi_t(\tau_2(\varphi_t(x_0)))\right\}\\
&\quad + \tau_1(x_0) \otimes \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t(\tau_2(\varphi_t(x_0))) - \tau_2(x_0)}{t}\\
&=(\mathscr{L}_X\tau_1 \otimes \tau_2 + \tau_1 \otimes \mathscr{L}_X\tau_2)(x_0),
\end{aligned}$$

其中 $x_0 \in M$,故(5.22)式成立.

(3) 由定义及引理 5.2,我们有

$$\begin{aligned}
C^r_s(\mathscr{L}_X\tau) &= C^r_s\left(\lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t(\tau) - \tau}{t}\right)\\
&=\lim_{t\to 0} \frac{C^r_s(\Phi_t(\tau)) - C^r_s(\tau)}{t}\\
&=\lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t(C^r_s(\tau)) - C^r_s(\tau)}{t}\\
&=\mathscr{L}_X(C^r_s(\tau)).
\end{aligned}$$

例 4 设 $X \in \mathscr{X}(M)$, $\omega \in A^1(M)$,则对于任意的 $Y \in \mathscr{X}(M)$ 有

$$(\mathscr{L}_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X,Y]). \tag{5.24}$$

实际上,$\omega(Y)$ 可以看成(1,1)型光滑张量场 $Y \otimes \omega$ 的缩并,即

$$\omega(Y) = C^1_1(Y \otimes \omega).$$

由定理 5.3,我们有

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_X(\omega(Y)) &= \mathscr{L}_X(C^1_1(Y \otimes \omega))\\
&=C^1_1(\mathscr{L}_X(Y \otimes \omega))\\
&=C^1_1(\mathscr{L}_XY \otimes \omega + Y \otimes \mathscr{L}_X\omega)\\
&=\omega(\mathscr{L}_XY) + (\mathscr{L}_X\omega)(Y),
\end{aligned}$$

此即(5.24)式.

在另一方面,(5.24)式的右端 $X(\omega(\cdot)) - \omega([X,\cdot])$ 可以看作从 $\mathscr{X}(M)$ 到 $C^\infty(M)$ 的线性映射,并且对于任意的 $Y \in \mathscr{X}(M)$, $\mu \in C^\infty(M)$ 有

$$\begin{aligned}
&X(\omega(\mu Y)) - \omega([X,\mu Y])\\
&=X(\mu \cdot \omega(Y)) - \omega(\mu[X,Y] + X(\mu) \cdot Y)\\
&=X(\mu) \cdot \omega(Y) + \mu \cdot X(\omega(Y)) - \mu \cdot \omega([X,Y]) - X(\mu) \cdot \omega(Y)
\end{aligned}$$

$$=\mu\cdot\{X(\omega(Y))-\omega([X,Y])\},$$

所以该映射是 $C^\infty(M)$- 线性的. 根据定理 5.1,这意味着 $X(\omega(\cdot))-\omega([X,\cdot])$ 是 M 上光滑的(0,1) 型张量场,即 $\mathscr{L}_X\omega\in A^1(M)$. 这再次证实了定义 5.2 指出的事实:李导数 $\mathscr{L}_X$ 把(0,1) 型光滑张量场变为(0,1) 型光滑张量场.

在 §3 我们曾经提到过,在光滑流形上处处不为零的连续切向量场是未必存在的. 在紧致光滑流形上,这样的切向量场的存在性蕴含着该流形的 Euler 示性数等于零. 关于 2 阶协变张量场,我们有下面的存在性定理,它对于流形的拓扑却没有什么特殊的要求.

定理 5.4 设 M 是满足第二可数公理的 m 维光滑流形,则在 M 上必定存在对称、正定的(0,2) 型光滑张量场.

证明 设 τ 是(0,2) 型光滑张量场,则在每一点 $p\in M$,$\tau(p)$ 是 T_pM 上的 2 重线性函数. τ 的对称性是指:对于任意的 $X,Y\in T_pM$ 有 $\tau(p)(X,Y)=\tau(p)(Y,X)$. τ 的正定性是指:对于任意的 $X\in T_pM$ 有 $\tau(p)(X,X)\geqslant 0$,且等号只在 $X=0$ 时成立.

如果$(U;x^i)$ 是光滑流形 M 上的一个局部坐标系,则在 U 上很容易构造对称、正定的(0,2) 型光滑张量场. 实际上,只要令

$$\tau=\sum_{i=1}^m \mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^i,\tag{5.25}$$

则 $\tau\in\mathscr{T}^0_2(U)$,且 τ 是对称的. 另外,若 $X=X^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\in T_pM$,则

$$\tau(p)(X,X)=\sum_{i=1}^m (X^i)^2\geqslant 0,$$

且等号成立当且仅当 $X=0$. 因此 τ 是正定的.

至于大范围定义在 M 上的对称、正定的(0,2) 型光滑张量场的构作,需要用单位分解定理(第二章,定理 2.7). 由于 M 满足第二可数公理,根据单位分解定理,在 M 上存在一族局部坐标系$\{(U_\alpha;x^i_\alpha):\alpha\in I\}$,使得$\{U_\alpha:\alpha\in I\}$ 是 M 的局部有限开覆盖,并且有从属于开覆盖$\{U_\alpha:\alpha\in I\}$ 的单位分解$\{h_\alpha\}$,即:$h_\alpha\in C^\infty(M)$,$h_\alpha\geqslant 0$,$\mathrm{Supp}h_\alpha\subset U_\alpha$,且 $\sum\limits_\alpha h_\alpha\equiv 1$.

令

$$\tau_\alpha=\sum_{i=1}^m \mathrm{d}x^i_\alpha\otimes\mathrm{d}x^i_\alpha,\tag{5.26}$$

$$(h_\alpha\cdot\tau_\alpha)(x)\doteq\begin{cases}h_\alpha(x)\cdot\tau_\alpha(x), & \forall\, x\in U_\alpha,\\ 0, & \forall\, x\notin U_\alpha,\end{cases}\tag{5.27}$$

则 $h_\alpha\cdot\tau_\alpha\in\mathscr{T}^0_2(M)$,且 $h_\alpha\cdot\tau_\alpha$ 是对称的. 那么我们所求的张量场是

$$\tau=\sum_{\alpha\in I}h_\alpha\cdot\tau_\alpha.\tag{5.28}$$

首先注意到在每一点 $x \in M$，右端只是有限多项的和. 实际上，x 只能属于有限多个开子集 U_α，否则会导出与 $\{U_\alpha\}$ 的局部有限性的矛盾. 不妨设该开覆盖中包含 x 的开子集仅有 $U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_r}$，则有 x 的局部坐标系 $(U; x^i)$，使得 $x \in U \subset U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_r}$. 这样，

$$\tau|_U = \sum_{\lambda=1}^{r} h_{\alpha_\lambda} \cdot \tau_{\alpha_\lambda}\Big|_U = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j, \tag{5.29}$$

其中

$$g_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sum_{k=1}^{m} h_{\alpha_\lambda} \cdot \frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^k}{\partial x^j}; \tag{5.30}$$

显然 $g_{ij} \in C^\infty(U)$，且 $g_{ij} = g_{ji}$，所以 τ 是 M 上对称的 $(0,2)$ 型光滑张量场.

因为 $0 \leqslant h_\alpha \leqslant 1$，$\sum\limits_\alpha h_\alpha = 1$，故对于任意的 $x \in M$ 存在指标 $\beta \in I$，使得 $h_\beta(x) > 0$. 于是对于任意的 $X \in T_xM$ 有

$$\tau(x)(X,X) \geqslant h_\beta(x) \cdot \tau_\beta(x)(X,X) \geqslant 0,$$

且 $\tau(x)(X,X) = 0$ 只在 $X = 0$ 时成立，故 τ 是正定的.

若 τ 是 M 上对称的、正定的 $(0,2)$ 型光滑张量场，则在每一点 $x \in M$，$\tau(x)$ 是切空间 T_xM 上对称、正定的 2 重线性函数，所以 $\tau(x)$ 是切空间 T_xM 中的一个正定内积，使得 T_xM 成为欧氏向量空间. 在这个内积下，切向量 $X \in T_xM$ 的长度是

$$|X| = \sqrt{\tau(x)(X,X)}, \tag{5.31}$$

切向量 $X, Y \in T_xM$ 之间的夹角余弦定义为

$$\cos \angle(X,Y) = \frac{\tau(x)(X,Y)}{|X||Y|}. \tag{5.32}$$

定义 5.3　光滑流形 M 上任意一个对称、正定的光滑 2 阶协变张量场称为 M 上的一个**黎曼结构**. 若在 M 上指定一个黎曼结构 g，则称 (M,g) 为一个**黎曼流形**. 此时称 g 为黎曼流形 M 上的基本张量场，或度量张量场.

粗略地说，黎曼流形就是以光滑的方式在每一点的切空间上指定了欧氏内积的微分流形，因此黎曼流形在每一点的切空间是一个欧氏向量空间. 在微分流形上作大范围分析的研究，仅有流形的光滑结构是不够的，通常还需要在光滑流形 M 上指定一个黎曼结构. 黎曼流形是作大范围分析研究的合适的舞台.

如同在第一章 §4 关于欧氏向量空间中张量的讨论，在光滑流形 M 上指定一个黎曼结构 g 之后，M 上光滑张量场的协变指标和反变指标也是可以互相转换的. 所依据的事实就是第一章的引理 4.3，即：若 g 是 M 上对称、正定的光滑 2 阶协变张量场，$g = g_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$，令 (g^{ij}) 是 (g_{ij}) 的逆矩阵，则 g^{ij} 在坐标

变换时遵循 2 阶反变张量的分量的变换规律，因而 $^{\#}g = g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}$ 是 M 上对称、正定的光滑 2 阶反变张量场，称为基本度量张量场 g 的共轭张量场. M 上光滑张量场的协变指标与反变指标的转换就是将该张量场与 g 或 $^{\#}g$ 作张量积，然后作缩并的结果.

例 5　设 (M,g) 是 m 维黎曼流形，$X\in\mathscr{X}(M)$. 任取 M 的一个局部坐标系 $(U;x^i)$，设

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

且

$$X|_U = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

令

$$X_i = g_{ij}X^j,$$

则 X_i 在坐标变换时遵循协变向量分量的变换规律，所以

$$\alpha = X_i dx^i$$

是在 M 上大范围定义的 1 次微分式.

很明显，对于任意的 $v\in\mathscr{X}(M)$ 有

$$\alpha(v) = X_j v^j = g_{ij}X^i v^j = g(X,v)$$

（对照第一章的(4.41)式）. 实际上，α 可以表示成

$$\alpha = C_1^1(X\otimes g) = g(X,\cdot).$$

从 1 次微分式 α 到光滑切向量场 X 的转换是借助于共轭度量张量 $^{\#}g$ 实现的，即

$$X = C_1^1(^{\#}g\otimes\alpha) = g^{ji}X_i\frac{\partial}{\partial x^j},$$

它的分量是

$$X^j = g^{ji}X_i.$$

例 6　设 $f\in C^\infty(M)$，则 $\mathrm{d}f$ 是 M 上的 1 次微分式. 用 ∇f 表示 $\mathrm{d}f$ 按照例 5 所对应的光滑切向量场，即

$$\nabla f = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{5.33}$$

切向量场 ∇f 称为光滑函数 f 的**梯度场**.

任取 $X\in\mathscr{X}(M)$，则

$$g(X,\nabla f) = g_{ij}X^i(\nabla f)^j = X^i\frac{\partial f}{\partial x^i} = X(f).$$

若 $X\in T_pM$，且 $|X|=1$，则上式可以写成

$$X(f) = g(X,\nabla f(p)) = |\nabla f(p)|\cdot\cos\angle(X,\nabla f(p)).$$

所以，当 $\nabla f(p)\neq 0$ 时，$X(f)$ 在切向量 $X = \nabla f(p)/|\nabla f(p)|$ 处达到最大

值

$$|\nabla f(p)| = \left(\sqrt{g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}}\right)(p).$$

由此可见，黎曼流形(M,g)上的光滑函数f在一点的最大变化率是$|\nabla f(p)|$，而达到这个最大变化率的方向就是函数f在点p的梯度方向$\nabla f(p)$.

习　题　三

1.　设M是m维光滑流形，证明：切向量丛TM是可定向的$2m$维光滑流形.

2.　证明：光滑切向量场的括号积[,]服从下面的运算律：

(1) 分配律

$$[ax+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z];$$

(2) 反交换律

$$[X,Y]=-[Y,X];$$

(3) Jacobi 恒等式

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0,$$

其中$X,Y,Z\in\mathscr{X}(M)$，$a,b\in\mathbf{R}$.

3.　设U是m维光滑流形M的一个开子集，$v\in\mathscr{X}(U)$. 证明：在任意一点$x_0\in U$，必有x_0的一个邻域$V\subset U$，以及光滑切向量场$\tilde{v}\in\mathscr{X}(M)$，使得

$$\tilde{v}|_V=v|_V.$$

4.　设X是光滑流形M上的一个切向量场. 证明：X是光滑切向量场的充分必要条件是：对于任意的$f\in C^\infty(M)$，由

$$(X(f))(p)=(X(p))f,\quad \forall\ p\in M$$

定义的函数$X(f)$是M上的光滑函数.

5.　设$f:M\to N$是光滑同胚. 对于任意的$X\in\mathscr{X}(M)$，定义映射$f_*X:C^\infty(N)\to C^\infty(N)$如下：

$$(f_*X)(g)=X(g\circ f)\circ f^{-1},\quad \forall\ g\in C^\infty(N).$$

证明：

(1) f_*X是N上的光滑切向量场，并且f_*X与X是f-相关的；

(2) 上面给出的映射$f_*:\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(N)$是李代数的同构.

6.　设M,N是光滑流形，$M\subset N$，且包含映射$i:M\to N$是N的嵌入子流形. 假定$X\in\mathscr{X}(N)$，并且对于每一点$p\in M$，$X(p)\in i_{*p}(T_pM)$. 证明：切向量场X在M上的限制是M上的光滑切向量场.

7.　设$\Phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$是由$t\to t^2$给出的光滑映射. 证明：不存在光滑切向量场

$Y \in \mathscr{X}(\mathbf{R})$，使得$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$和 Y 是 Φ- 相关的。

8.　设 $\varphi: M \to N$ 是嵌入子流形，且 $\varphi(M)$ 是 N 中的闭子集. 证明：对于任意的光滑切向量场 $X \in \mathscr{X}(M)$，必有光滑切向量场 $Y \in \mathscr{X}(N)$，使得 Y 和 X 是 φ- 相关的.

9.　设 $\varphi: M \to N$ 是单一的浸入子流形，$X \in \mathscr{X}(N)$，并且在每一点 $p \in M$，$X(\varphi(p)) \in \varphi_*(T_pM)$. 证明：存在 $\widetilde{X} \in \mathscr{X}(M)$，使得 X 和 $\widetilde{X}$ 是 φ- 相关的.

10.　设 $\varphi: M \to N$ 是光滑映射，$X \in \mathscr{X}(M)$. 假定在 $\varphi(p) = \varphi(q)$ 时，

$$\varphi_{*p}(X(p)) = \varphi_{*q}(X(q)).$$

问：在 N 上是否存在光滑切向量场 Y，使得 Y 和 X 是 φ- 相关的？说明理由.

11.　设 A_1, A_2 是在 $\mathbf{R}$ 上由第二章 §1 例 2 给出的两个光滑结构，命 $M_i = (\mathbf{R}, A_i)$，$i = 1, 2$. 定义映射 $\varphi: M_1 \to M_2$，使得 $\varphi(t) = t$. 证明：φ 是 C^∞- 映射，但是不存在 $Y \in \mathscr{X}(M_2)$，使得$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \in \mathscr{X}(M_1)$ 与 Y 是 φ- 相关的.

12.　设在 $\mathbf{R}^3$ 中给定 3 个光滑切向量场

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$Y = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z},$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z},$$

求 $[X, Y]$，$[Y, Z]$ 和 $[Z, X]$.

13.　设 $X = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的光滑切向量场. 求 X 所生成的单参数变换群.

14.　设 $f: M \to N$ 是光滑映射. 假定 $X \in \mathscr{X}(N)$，$Y \in \mathscr{X}(M)$，且 Y 与 X 是 f- 相关的切向量场. 证明：若 $\gamma(t)$ 是 Y 的积分曲线，则 $f \circ \gamma(t)$ 是 X 的积分曲线.

15.　设 $\varphi(t, x, y) = (xe^{\lambda t}, ye^{\mu t})$，其中 λ, μ 是常数. 证明 $\{\varphi_t\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的单参数变换群，并求它的诱导切向量场.

16.　设 $\mathbf{R}$ 在 $M = \mathbf{R}^2$ 上的作用 $\theta(t, x, y)$ 定义为

$$\theta(t, x, y) = \theta_t(x, y) = (x\cos\lambda t + y\sin\lambda t,\ -x\sin\lambda t + y\cos\lambda t),$$

其中 λ 是常数. 证明 $\theta: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 是作用在 $\mathbf{R}^2$ 上的单参数变换群，并求它的诱导切向量场.

17.　设 $M = \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$. 定义 $\mathbf{R}$ 在 M 上的作用为

$$\theta(t, A) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A, \quad \forall\, A \in M,$$

证明:这是作用在 GL(2,**R**) 上的单参数变换群,并求它的诱导切向量场.

18. 设 $X = x^2 \dfrac{\partial}{\partial x}$ 是 **R** 上的光滑切向量场(这里 x^2 是指 x 的平方),求 X 所生成的局部单参数变换群.

19. 针对图 21 中给出的具有各种指标的平面向量场奇点,各写出一个向量场的表达式,并求出它们的局部单参数变换群.

20. 设 $F: M \to N$ 是光滑映射,$X \in \mathscr{X}(M)$,$Y \in \mathscr{X}(N)$. 证明:Y 和 X 是 F- 相关的,当且仅当由 X,Y 分别生成的局部单参数变换群 $\{\varphi_t\}$ 和 $\{\psi_t\}$ 满足

$$F \circ \varphi_t(p) = \psi_t \circ F(p),$$

只要上式两边在 $(t,p) \in \mathbf{R} \times M$ 处有定义.

21. 设 $f: M \to N$ 是光滑映射,$\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ 和 X,Y 分别是 N,M 上彼此 f- 相关的光滑切向量场. 证明:李导数 $\mathscr{L}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ 和 $\mathscr{L}_X Y$ 也是 f- 相关的.

22. 设 $X,Y \in \mathscr{X}(M)$,证明:

$$\mathscr{L}_{[X,Y]} = \mathscr{L}_X \circ \mathscr{L}_Y - \mathscr{L}_Y \circ \mathscr{L}_X.$$

23. 设 $\{p;e_i(p)\}$ 是定义在开子集 $U \subset M^m$ 上的光滑切标架场,令

$$[e_i,e_j] = c_{ij}^k e_k,$$

其中 c_{ij}^k 是 U 上的光滑函数. 设 $X,Y \in \mathscr{X}(U)$,其表达式为

$$X = X^i e_i, \quad Y = Y^i e_i,$$

证明:

$$\mathscr{L}_X Y = (X(Y^i) - a_j^i Y^j) e_i,$$

其中

$$a_j^i = e_j(X^i) - X^k c_{kj}^i.$$

24. 证明:对于任意的 $X,Y \in \mathscr{X}(M)$,$f \in C^\infty(M)$ 有

$$\mathscr{L}_{X+Y} = \mathscr{L}_X + \mathscr{L}_Y,$$

$$\mathscr{L}_{f\cdot X} Y = f \cdot \mathscr{L}_X Y - Y(f) \cdot X.$$

25. 设 (x,y) 是 $\mathbf{R}^2$ 上的坐标系,$X = x^2 \dfrac{\partial}{\partial x}$,$Y = \dfrac{\partial}{\partial x} + y^2 \dfrac{\partial}{\partial y}$. 求 $\mathscr{L}_X Y$ 关于 $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ 的表达式. 设 $u = x, v = x + y$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的坐标变换,求 $\mathscr{L}_X Y$ 关于 $\dfrac{\partial}{\partial u}$, $\dfrac{\partial}{\partial v}$ 的表达式.

26. 举例说明:对于给定的 $Y \in \mathscr{X}(M)$,李导数 $(\mathscr{L}_X Y)(p)$ 依赖于切向量场 X 在点 p 的邻域内的值,而不只是与切向量场 X 在点 p 的值有关,即:设 $X, \widetilde{X} \in \mathscr{X}(M)$,且 $X(p) = \widetilde{X}(p)$,但是 $(\mathscr{L}_X Y)(p)$ 和 $(\mathscr{L}_{\widetilde{X}} Y)(p)$ 未必相同.

27. 设 $f: M \to N$ 是光滑同胚. 证明:

$$f_*(\mathscr{L}_X Y)=\mathscr{L}_{f_*X}(f_*Y).$$

28. 设L^h是定义在开集$U(\subset M)$上的h维光滑分布. 证明:任给一点$p\in U$及切向量$v\in L^h(p)$,必有L^h的一条积分曲线$\gamma(t)$,使得

$$\gamma(0)=p,\quad \gamma'(0)=v.$$

29. 证明定义 4.6 和定义 4.6′ 的等价性.

30. 设$\{\varphi_t\}$和$\{\psi_s\}$是作用在光滑流形M上的两个单参数可微变换群,$X,Y\in\mathscr{X}(M)$是它们所诱导的切向量场. 证明:$\{\varphi_t\}$和$\{\psi_s\}$在M上的作用是可交换的当且仅当$[X,Y]\equiv 0$.

31. 设$X_1,\cdots,X_h$是定义在开集$U(\subset M)$上的h个处处线性无关的光滑切向量场. 假定这h个切向量场满足条件

$$[X_\alpha,X_\beta]=0,\quad 1\leqslant\alpha,\beta\leqslant h.$$

证明:在每一点$p\in U$,存在局部坐标系$(V;y^i)$使得$p\in V\subset U$,并且

$$X_\alpha=\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\quad 1\leqslant\alpha\leqslant h.$$

32. 设$\{\varphi_t\}$是作用在光滑流形M上的单参数可微变换群,$X\in\mathscr{X}(M)$是它的诱导切向量场. 设

$$\Phi_t:T^p_q(\varphi_t(x))\to T^p_q(x),\quad \forall\, x\in M,$$

如(5.14)式所定义. 证明:

(1) $\Phi_s\circ\Phi_t=\Phi_t\circ\Phi_s=\Phi_{s+t}:T^p_q(\varphi_{s+t}(x))\to T^p_q(x)$;

(2) $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=s}(\Phi_t\tau)=\Phi_s(\mathscr{L}_X\tau)=\mathscr{L}_X(\Phi_s\tau)$,其中$\tau$是$M$上的$(p,q)$型光滑张量场.

33. 设$\{\varphi_t\}$是作用在$\mathbf{R}^n$上的单参数可微变换群,X是它所诱导的切向量场. 证明:

$$f(t,x)=g(\varphi(t,x))$$

是偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)=\displaystyle\sum_{i=1}^n X^i(x)\,\frac{\partial f}{\partial x^i}(t,x),\\ f(0,x)=g(x)\end{cases}$$

的解,其中$g\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

34. 求下列方程的解:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial t}=y\,\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\,\dfrac{\partial f}{\partial y},\\ f(0,x,y)=y\sin x.\end{cases}$$

35. 证明:由(5.14)式给出的映射$\Phi_t:T^p_q(\gamma_x(t))\to T^p_q(x)$与局部坐标系$(U;x^i)$的选取无关.

36.　设 $f_1,\cdots,f_r,r\leqslant n$，是定义在开集 $U\subset M$ 上的 r 个光滑函数. 证明：函数 $f_1,\cdots,f_r$ 能够作为点 $p\in U$ 的某个邻域内的坐标函数的组成部分的充分必要条件是 $\mathrm{d}f_1,\cdots,\mathrm{d}f_r$ 在点 p 是线性无关的.

37.　设

$$\omega^1 = x^1\mathrm{d}x^1 + x^2\mathrm{d}x^2,$$
$$\omega^2 = x^2\mathrm{d}x^1 + x^1\mathrm{d}x^2$$

是 $\mathbf{R}^2$ 上两个余切向量场. 求 ω^1 和 ω^2 彼此线性无关的区域，并在该区域内求 $\{\omega^1,\omega^2\}$ 的对偶标架场.

38.　仿照定理 5.1 直接证明：若

$$\Phi:\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\to C^\infty(M)$$

是一个 2 重线性的 $C^\infty(M)$- 线性映射，则 Φ 在 M 上确定了一个光滑的 2 阶协变张量场 $\widetilde{\Phi}$，使得对于任意的 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$ 有

$$(\Phi(X,Y))(p)=\widetilde{\Phi}(X(p),Y(p)),\quad \forall\, p\in M.$$

39.　设

$$\varphi:\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$$

是 $C^\infty(M)$- 线性映射，即 φ 是线性映射，并且对于任意的 $f\in C^\infty(M)$ 及 $X\in\mathscr{X}(M)$ 有

$$\varphi(f\cdot X)=f\cdot\varphi(X).$$

证明：φ 在 M 上确定了唯一的一个光滑的(1,1) 型张量场 $\tilde{\varphi}$，使得

$$\tilde{\varphi}(X,\alpha)=\alpha(\varphi(X)),\quad \forall\,\alpha\in A^1(M),\quad X\in\mathscr{X}(M).$$

40.　设 $\varphi:\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$ 是 $C^\infty(M)$- 线性映射. 对于任意的 $X\in\mathscr{X}(M)$，令

$$(\mathscr{L}_X\varphi)(Y)=[X,\varphi(Y)]-\varphi([X,Y]),\quad \forall\, Y\in\mathscr{X}(M).$$

证明：映射 $\mathscr{L}_X\varphi:\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$ 是 $C^\infty(M)$- 线性的.

第四章　外微分式

外微分式和活动标架是E. Cartan成功地用于微分几何研究的有力工具. E. Cartan还系统地研究过外微分方程组. 现在所称的Cartan－Kähler理论就是关于外微分方程组的可积性理论，是微分方程理论的重要组成部分，尤其是在微分几何学及几何控制理论中有广泛的应用.

本章的目的是介绍微分流形上关于外微分式的基本概念，以及外微分式的外微分运算和积分的理论. 通常所说的流形上的微积分，主要是指外微分式的理论. 由于外微分式、外微分的应用十分广泛，我们只限于介绍基本概念、运算和基本理论，希望为它们今后在各方面的应用打下坚实的基础.

§1　外微分式

在第一章 §5，我们已经把定义在向量空间 V 上的反对称 r 重线性函数，即反对称 r 阶协变张量称为 V 上的 r 次外形式. 所谓的外微分式就是指光滑的外形式场.

定义 1.1　设 M 是 m 维光滑流形. M 上一个光滑的反对称 r 阶协变张量场称为 M 上的一个 r 次**外微分式**.

M 上全体 r 次外微分式的集合记作 $A^r(M)$. 由于外微分式的反对称性，当次数 $r > m = \dim M$ 时，该外微分式必为零. 所以非零外微分式的次数 r 必在 1 和 m 之间. 为方便起见，规定 0 次外微分式就是 M 上的光滑函数，即 $A^0(M) = C^\infty(M)$；1 次外微分式就是 1 次微分式.

设 $\tau \in A^r(M)$. 根据定义，在每一点 $p \in M$，$\tau(p)$ 是切空间 T_pM 上的一个反对称 r 重线性函数. 设 $(U;x^i)$ 是点 p 的一个局部坐标系，则 $\{dx^i\}$ 是余切空间 T_p^*M 的基底，$\{\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} : 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant m\}$ 是 r 次外形式空间 $\wedge^r T_p^* M$ 的基底，因此 $\tau|_U$ 能表示成

$$\tau|_U = \frac{1}{r!}\tau_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}, \tag{1.1}$$

其中

$$\tau_{i_1\cdots i_r} = \tau\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right). \tag{1.2}$$

张量场 τ 的光滑性就是指 τ 的分量 $\tau_{i_1\cdots i_r}$ 是光滑函数，即 $\tau_{i_1\cdots i_r} \in C^\infty(U)$. 由于 τ 的反对称性，分量 $\tau_{i_1\cdots i_r}$ 关于下指标 $i_1, \cdots, i_r$ 是反对称的，因此

$$\tau|_U = \sum_{1\leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant m} \tau_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}. \tag{1.3}$$

如同一般的光滑张量场，外微分式也可以描述为 $\mathscr{X}(M)$ 上的多重线性映射，其值是 M 上的光滑函数.

设 $\tau \in A^r(M), v_1, \cdots, v_r \in \mathscr{X}(M)$，则有 M 上的函数 $\tau(v_1, \cdots, v_r)$，定义为：

$$(\tau(v_1, \cdots, v_r))(p) = \tau(p)(v_1(p), \cdots, v_r(p)), \quad \forall\, p \in M. \tag{1.4}$$

很明显，函数 $\tau(v_1, \cdots, v_r)$ 是光滑的. 实际上，取 M 的局部坐标系 $(U; x^i)$，则 $\tau|_U$ 有局部坐标表达式(1.3)，其中 $\tau_{i_1\cdots i_r} \in C^\infty(U)$，并且切向量场 v_λ 有表达式

$$v_\lambda|_U = v_\lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 $v_\lambda^i = v_\lambda(x^i) \in C^\infty(U)$，因此

$$\begin{aligned}\tau(v_1, \cdots, v_r)|_U &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant m} \tau_{i_1\cdots i_r} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}(v_1, \cdots, v_r) \\ &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant m} \tau_{i_1\cdots i_r} \begin{vmatrix} v_1^{i_1} & \cdots & v_r^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{i_r} & \cdots & v_r^{i_r} \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.5}$$

(对照第一章 §5，推论 5.5)，即 $\tau(v_1, \cdots, v_r)$ 是光滑函数.

(1.5) 式称为外微分式 τ 的求值公式，它清楚地表明外微分式 τ 对于每一个自变量是 $C^\infty(M)$- 线性的，即对于任意的 $f \in C^\infty(M)$ 有

$$\tau(v_1, \cdots, v_{\lambda-1}, fv_\lambda, v_{\lambda+1}, \cdots, v_r) = f \cdot \tau(v_1, \cdots, v_r), \tag{1.6}$$

其中 $1 \leqslant \lambda \leqslant r$.

反过来，作为第三章 §5 定理 5.1 的直接推论，我们有

定理 1.1　设

$$\tau:\ \underbrace{\mathscr{X}(M) \times \cdots \times \mathscr{X}(M)}_{r\text{个}} \to C^\infty(M)$$

是反对称的 r 重线性映射，并且对每一个自变量是 $C^\infty(M)$- 线性的，即：对于任意的 $1 \leqslant \lambda \leqslant r$，任意的 $f \in C^\infty(M)$，以及任意的 $v_1, \cdots, v_r \in \mathscr{X}(M)$，(1.6) 式成立. 则 τ 在每一点 $x \in M$ 以光滑的方式指定了一个 r 次外形式，使得 τ 恰好是这 r 次外微分式通过(1.4) 式所定义的映射.

根据第三章定理 5.1 的证明，映射 τ 有局部性，即对于定义在任意的开子集 $U \subset M$ 上的 r 个光滑切向量场 $v_1, \cdots, v_r \in \mathscr{X}(U)$，$\tau(v_1, \cdots, v_r)$ 是有意义的，且 $\tau(v_1, \cdots, v_r) \in C^\infty(U)$. 这就是说，$r$ 次外微分式 τ 可以在局部定义的切向量场上取值.

作为定理 1.1 的应用，考虑下面的例子：

例 1　设 M 是 m 维光滑流形，$\alpha \in A^1(M)$. 从 α 诱导出如下的映射

$$\tilde{\alpha}: \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to C^\infty(M),$$

其定义是：对于任意 $X, Y \in \mathscr{X}(M)$，令

$$\tilde{\alpha}(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]). \tag{1.7}$$

显然，$\tilde{\alpha}(X,Y)\in C^\infty(M)$，且 $\tilde{\alpha}$ 是反对称的，即

$$\tilde{\alpha}(X,Y)=-\tilde{\alpha}(Y,X).$$

任取 $f\in C^\infty(M)$，则

$$\begin{aligned}
&\tilde{\alpha}(f\cdot X,Y)\\
&=f\cdot X(\alpha(Y))-Y(\alpha(f\cdot X))-\alpha([f\cdot X,Y])\\
&=f\cdot X(\alpha(Y))-Y(f\cdot\alpha(X))-\alpha(f\cdot[X,Y]-Y(f)\cdot X)\\
&=f\cdot X(\alpha(Y))-Y(f)\cdot\alpha(X)-f\cdot Y(\alpha(X))-\\
&\quad f\cdot\alpha([X,Y])+Y(f)\cdot\alpha(X)\\
&=f\cdot\{X(\alpha(Y))-Y(\alpha(X))-\alpha([X,Y])\}\\
&=f\cdot\tilde{\alpha}(X,Y).
\end{aligned}$$

利用 $\tilde{\alpha}$ 的反对称性得到

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}(X,f\cdot Y)&=-\tilde{\alpha}(f\cdot Y,X)\\
&=-f\cdot\tilde{\alpha}(Y,X)=f\cdot\tilde{\alpha}(X,Y).
\end{aligned}$$

所以，根据定理 1.1，$\tilde{\alpha}$ 是流形 M 上的一个 2 次外微分式.

如例 1 前面的注记所述，映射 $\tilde{\alpha}$ 可以在局部定义的切向量场上求值，因而可以导出 $\tilde{\alpha}$ 的局部表达式. 设$(U;x^i)$ 是局部坐标系，假定

$$\alpha|_U=\alpha_i\mathrm{d}x^i,\tag{1.8}$$

其中 $\alpha_i=\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$，则

$$\begin{aligned}
&\tilde{\alpha}|_U\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)-\alpha\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]\right)\\
&=\frac{\partial\alpha_j}{\partial x^i}-\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j}.
\end{aligned}$$

这样，2 次外微分式 $\tilde{\alpha}$ 的表达式为

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}|_U&=\frac{1}{2!}\tilde{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha_j}{\partial x^i}-\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j\\
&=\frac{\partial\alpha_j}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j.
\end{aligned}\tag{1.9}$$

在下一节会看到，这里所定义的 $\tilde{\alpha}$ 恰好是 1 次微分式 α 的外微分 $\mathrm{d}\alpha$（对照 §2 的(2.2) 式和(2.15) 式）.

r 次外微分式的加法以及与光滑函数的乘法在 r 次外微分式的空间 $A^r(M)$ 中是封闭的. 我们已经定义过两个外形式的外积（第一章 §5），于是两个外微分式的外积可以定义为它们逐点作外积的结果. 这样，如果 $\varphi\in$

$A^r(M)$，$\psi \in A^s(M)$，则 $\varphi \wedge \psi \in A^{r+s}(M)$. 换句话说，关于外形式的代数运算全部可以搬过来作为外微分式的代数运算.

定理 1.2　设 M 是 m 维光滑流形，设 $A(M) = \bigoplus_{r=0}^{m} A^r(M)$. 则在 $A(M)$ 中有加法、数乘法和外积等运算，它们具有分配律、结合律和反交换律，因而使 $A(M)$ 成为一个外代数.

一般说来，$A(M)$ 是一个无限维的外代数.

在讨论光滑切向量场的时候，我们曾经指出：若 $f: M \to N$ 是从光滑流形 M 到 N 的光滑映射，则在每一点 $p \in M$ 有切映射 $f_*: T_pM \to T_{f(p)}N$，但是对于光滑切向量场 $X \in \mathscr{X}(M)$，f_*X 未必是有意义的，因而未必是 N 上的光滑切向量场（因此有必要引进 M 和 N 上的光滑切向量场的 f-相关性的概念，参看第三章，定义 2.3）. 对于光滑的协变张量场，情况就完全不同了. 在这里，我们只讨论外微分式.

第一章的定义 5.5 给出了由向量空间之间的线性映射诱导的、在对应的 r 次外形式空间之间的线性映射，将它用于切映射 $f_*: T_pM \to T_{f(p)}N$ 则得到诱导映射

$$f^*: \wedge^r(T^*_{f(p)}N) \to \wedge^r(T^*_pM),$$

即：对于任意的 $\varphi \in \wedge^r(T^*_{f(p)}N)$ 及 $v_1, \cdots, v_r \in T_pM$，令

$$f^*\varphi(v_1, \cdots, v_r) = \varphi(f_*v_1, \cdots, f_*v_r). \tag{1.10}$$

如果 $\varphi \in A^r(N)$，则对于任意一点 $p \in M$ 以及任意的 r 个切向量 $v_1, \cdots, v_r \in T_pM$，上式仍然是有意义的，且 $f^*\varphi$ 是反对称的，因此 $f^*\varphi(p) \in \wedge^r(T^*_pM)$，即 $f^*\varphi$ 是 M 上的 r 次外形式场. 现在要验证外形式场 $f^*\varphi$ 是光滑的. 为此，设 $(U; x^i)$ 是点 $p \in M$ 的局部坐标系，$(V; y^\alpha)$ 是点 $f(p) \in N$ 的局部坐标系，且 $f(U) \subset V$，于是映射 f 的局部表达式是

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \cdots, x^m) \in C^\infty(U), \tag{1.11}$$

其中 $1 \leqslant \alpha \leqslant n = \dim N$. 切映射 f_* 在自然基底上的作用是

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}. \tag{1.12}$$

假定 $\varphi \in A^r(N)$ 的局部表示是

$$\varphi|_V = \frac{1}{r!}\varphi_{\alpha_1 \cdots \alpha_r} \mathrm{d}y^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{\alpha_r}, \tag{1.13}$$

其中

$$\varphi_{\alpha_1 \cdots \alpha_r} = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^{\alpha_r}}\right) \in C^\infty(V),$$

且设

$$f^*\varphi|_U = \frac{1}{r!}\tilde{\varphi}_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}. \tag{1.14}$$

则

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{i_1\cdots i_r} &= f^*\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)\\ &=\varphi\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right),\cdots,f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)\right)\\ &=\frac{1}{r!}(\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_r}\circ f)\mathrm{d}y^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{\alpha_r}\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right),\cdots,f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)\right)\\ &=(\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_r}\circ f)\cdot\frac{\partial f^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial f^{\alpha_r}}{\partial x^{i_r}}.\end{aligned} \tag{1.15}$$

由此可见，$\tilde{\varphi}_{i_1\cdots i_r}\in C^\infty(U)$，即 $f^*\varphi$ 是 r 次外微分式.

将(1.15)式代入(1.14)式得到

$$f^*\varphi|_U = \frac{1}{r!}\left(\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_r}\circ f\right)\cdot\frac{\partial f^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial f^{\alpha_r}}{\partial x^{i_r}}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}. \tag{1.14$'$}$$

由此可见，将 $\varphi\in A^r(N)$ 利用映射 f 拉回到 M 上成为 $f^*\varphi\in A^r(M)$，在局部上就是将映射 f 的局部表达式 $y^\alpha=f^\alpha(x^1,\cdots,x^m)$ 代入 φ 的局部表达式(1.13)的结果.

定理 1.3 设 M,N 分别是 m 维，n 维的光滑流形，$f:M\to N$ 是光滑映射，则由(1.10)式给出的诱导映射

$$f^*:A^r(N)\to A^r(M)\quad(0\leqslant r\leqslant n)$$

是线性的，且 f^* 与外积可交换，即对于 $\varphi\in A^r(N),\psi\in A^s(N)$ 有

$$f^*(\varphi\wedge\psi)=f^*\varphi\wedge f^*\psi. \tag{1.16}$$

证明 诱导映射 f^* 的线性性质是明显的，f^* 与外积的可交换性是逐点运用第一章定理 5.6 的结果.

诱导映射 f^* 可扩充成映射

$$f^*:A(N)=\bigoplus_{r=0}^{n}A^r(N)\to A(M)=\bigoplus_{r=0}^{m}A^r(M).$$

定理 1.3 意味着，f^* 是从外代数 $A(N)$ 到 $A(M)$ 的同态.

例 2 设 $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,x^2+y^2+z^2=1\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的单位球面，用 $i:S^2\to\mathbf{R}^3$ 记包含映射. $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的 1 次微分式，$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的 2 次外微分式，因此 $i^*\mathrm{d}x,i^*\mathrm{d}y,i^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y),i^*(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)$ 都是 S^2 上的微分式. 我们要用 S^2 的局部坐标系将它们表示出来.

在 S^2 上取第二章 §1，例 3 所给出的坐标覆盖，以 (U_1^-,φ_1^-) 为例，此时

$$U_1^-=\{(x,y,z)\in S^2:x<0\},$$

$$\varphi_1^-(x,y,z)=(y,z),\quad(x,y,z)\in U_1^-.$$

将 $\mathbf{R}^2$ 中的笛卡儿直角坐标记为 (u,v)，则映射 φ_1^- 就是

$$u = y, \qquad v = z.$$

因而包含映射 $i: U_1^- \to \mathbf{R}^3$ 成为

$$i(u,v) = (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v),$$

其中 $(u,v) \in \varphi_1^-(U_1^-)$. 所以

$$i^*\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\sqrt{1-u^2-v^2} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}(u\mathrm{d}u + v\mathrm{d}v),$$

$$i^*\mathrm{d}y = \mathrm{d}u,$$

$$i^*(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = i^*\mathrm{d}x \wedge i^*\mathrm{d}y = -\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$$

$$i^*(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = i^*\mathrm{d}y \wedge i^*\mathrm{d}z = \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

请读者将这些微分式在坐标卡 (U_2^+, φ_2^+) 上表示出来.

例 3 设 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的单位圆周. 用 $i: S^1 \to \mathbf{R}^2$ 表示包含映射, 于是 $x \circ i, y \circ i$ 都是 S^1 上的光滑函数, 且满足恒等式

$$(x \circ i)^2 + (y \circ i)^2 = 1.$$

对上式进行微分(参看第二章 §3, 例 5), 我们有

$$\begin{aligned} &(x \circ i) \cdot \mathrm{d}(x \circ i) + (y \circ i) \cdot \mathrm{d}(y \circ i) \\ =& i^*(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = 0. \end{aligned}$$

由此得到定义在 S^1 上的 1 次微分式 α, 其定义是: 当 $x \circ i \neq 0$ 时,

$$\alpha = \frac{i^*\mathrm{d}y}{x \circ i};$$

当 $y \circ i \neq 0$ 时,

$$\alpha = -\frac{i^*\mathrm{d}x}{y \circ i}.$$

若取 S^1 上的一段开弧(不是整个圆周), 则将 $x \circ i, y \circ i$ 限制在该圆弧上能表示成

$$x \circ i = \cos\theta, \qquad y \circ i = \sin\theta,$$

则微分式 α 成为

$$\alpha = \mathrm{d}\theta.$$

注意: 在整个圆周 S^1 上不存在这样的光滑函数 θ.

作为外微分式的一个应用, 我们给出 m 维光滑流形的可定向性的一个判别条件.

定理 1.4 设 M 是满足第二可数公理的 m 维光滑流形, 则 M 是可定向的当且仅当在 M 上存在一个处处不为零的 m 次外微分式.

证明 在第二章 §6, 1° 已给出可定向光滑流形的定义. 光滑流形 M 称为可定向的, 如果存在 M 的一个容许的坐标卡集 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, 使得 $\{U_\alpha\}$ 是 M 的

覆盖,并且当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$,坐标变换

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

的 Jacobi 行列式是正的.

现在 M 满足第二可数公理,不妨设上述开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 是局部有限的.根据单位分解定理(第二章 §2),存在从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解 $\{h_\alpha\}$,其中 $h_\alpha \in C^\infty(M)$, $0 \leqslant h_\alpha \leqslant 1$, $\mathrm{Supp}h_\alpha \subset U_\alpha$,且 $\sum h_\alpha \equiv 1$.

对于 $x \in U_\alpha$ 记

$$x_\alpha^i = (\varphi_\alpha(x))^i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

令

$$\tau_\alpha = \mathrm{d}x_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_\alpha^m, \tag{1.17}$$

则 $\tau_\alpha \in A^m(U_\alpha)$. 我们要用单位分解 $\{h_\alpha\}$ 把 τ_α 拼接成定义在 M 上的 m 次外微分式.令

$$(h_\alpha \cdot \tau_\alpha)(x) = \begin{cases} h_\alpha(x) \cdot \tau_\alpha(x), & \forall\, x \in U_\alpha, \\ 0, & \forall\, x \notin U_\alpha. \end{cases} \tag{1.18}$$

由于 $\mathrm{Supp}h_\alpha \subset U_\alpha$,所以 $h_\alpha \cdot \tau_\alpha \in A^m(M)$. 再令

$$\tau = \sum_\alpha h_\alpha \cdot \tau_\alpha. \tag{1.19}$$

由于 $\{U_\alpha\}$ 的局部有限性,右边在每一点的邻域内只是有限项的和,因此 $\tau \in A^m(M)$.

现在不难证明 τ 是处处不为零的 m 次外微分式. 任取 $x \in M$,则由覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的局部有限性可知在该覆盖中至多有有限多个成员包含 x,不妨设含有点 x 的成员是 $U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_r}$. 取点 x 的邻域 $V \subset U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_r}$. 于是

$$\tau|_V = \sum_{\lambda=1}^r h_{\alpha_\lambda} \cdot (\mathrm{d}x_{\alpha_\lambda}^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_\lambda}^m).$$

由于 $h_{\alpha_\lambda} \geqslant 0$, $\sum_{\lambda=1}^r h_{\alpha_\lambda}(x) = 1$,不妨设 $h_{\alpha_1}(x) > 0$. 将 $\tau|_V$ 用局部坐标 $x_{\alpha_1}^i$ 表达出来. 在 $U_{\alpha_\lambda} \cap U_{\alpha_1}$ 上有

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}x_{\alpha_\lambda}^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_\lambda}^m \\ &= \frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^1}{\partial x_{\alpha_1}^{i_1}} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^m}{\partial x_{\alpha_1}^{i_m}} \mathrm{d}x_{\alpha_1}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_1}^{i_m} \\ &= \frac{\partial(x_{\alpha_\lambda}^1, \cdots, x_{\alpha_\lambda}^m)}{\partial(x_{\alpha_1}^1, \cdots, x_{\alpha_1}^m)} \mathrm{d}x_{\alpha_1}^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{\alpha_1}^m. \end{aligned}$$

根据流形 M 的可定向性假定,此处 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(x_{\alpha_\lambda}^1, \cdots, x_{\alpha_\lambda}^m)}{\partial(x_{\alpha_1}^1, \cdots, x_{\alpha_1}^m)} > 0,$$

所以

$$\tau|_V = \left\{ \sum_{\lambda=1}^{r} h_{\alpha_\lambda} \cdot \frac{\partial(x_{\alpha_\lambda}^1, \cdots, x_{\alpha_\lambda}^m)}{\partial(x_{\alpha_1}^1, \cdots, x_{\alpha_1}^m)} \right\} \tau_{\alpha_1}|_V,$$

其系数在点 x 的值为

$$\sum_{\lambda=1}^{r} h_{\alpha_\lambda}(x) \cdot \frac{\partial(x_{\alpha_\lambda}^1, \cdots, x_{\alpha_\lambda}^m)}{\partial(x_{\alpha_1}^1, \cdots, x_{\alpha_1}^m)} \geqslant h_{\alpha_1}(x) > 0,$$

即 τ 在 M 上处处不为零.

反过来,设 τ 是光滑流形 M 上处处不为零的 m 次外微分式. 我们断言:在每一点 $p \in M$,必有局部坐标系 $(U_p; x_p^i)$,使得 U_p 是点 p 的连通邻域,且

$$\tau|_{U_p} = a_p \mathrm{d}x_p^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_p^m, \tag{1.20}$$

其中 a_p 是 U_p 上的正值光滑函数. 实际上,m 次外微分式 $\tau|_{U_p}$ 必定能表成(1.20)式,其中 $a_p \in C^\infty(U_p)$. 由于 $\tau|_{U_p}$ 处处不为零,故 a_p 无零点,因此 a_p 在连通开集 U_p 上有定号. 如果 $a_p > 0$,则该局部坐标系就是我们所要的. 如果 $a_p < 0$,则只要把坐标函数 x_p^1 添一个负号,在这新的局部坐标系下便有 $a_p > 0$ 了.

该断言说明,我们能取 M 的一个坐标覆盖 $\{(U_\alpha; x_\alpha^i)\}$,使得

$$\tau|_{U_\alpha} = a_\alpha \mathrm{d}x_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_\alpha^m,$$

其中 $a_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$,且 $a_\alpha > 0$. 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时,

$$\begin{aligned} \tau|_{U_\alpha \cap U_\beta} &= a_\alpha \mathrm{d}x_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_\alpha^m \\ &= a_\beta \mathrm{d}x_\beta^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_\beta^m \\ &= a_\beta \frac{\partial(x_\beta^1, \cdots, x_\beta^m)}{\partial(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^m)} \mathrm{d}x_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_\alpha^m, \end{aligned}$$

因此,在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上坐标变换的 Jacobi 行列式是

$$\frac{\partial(x_\beta^1, \cdots, x_\beta^m)}{\partial(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^m)} = \frac{a_\alpha}{a_\beta} > 0.$$

由此可见 M 是可定向光滑流形.

例 4　单位球面 S^n 上的一个处处不为零的 n 次外微分式.

设

$$S^n = \left\{ (x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1 \right\},$$

用 $i: S^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ 记包含映射. 考虑 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上的 n 次外微分式

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x^i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n+1}. \tag{1.21}$$

我们要证明 $i^*\sigma$ 是球面 S^n 上处处不为零的 n 次外微分式,因此 S^n 是可定向流形.

为此,取 S^n 的一个坐标域

$$U_{n+1}^{+}=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in S^n : x^{n+1}>0\}.$$

设 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标是$(\xi^1,\cdots,\xi^n)$，则坐标映射 $\varphi_{n+1}^{+}: U_{n+1}^{+}\to\mathbf{R}^n$ 为

$$(\xi^1,\cdots,\xi^n)=\varphi_{n+1}^{+}(x^1,\cdots,x^{n+1})=(x^1,\cdots,x^n),$$

显然，U_{n+1}^{+} 在 φ_{n+1}^{+} 下的象集是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位实心球

$$D=\left\{(\xi^1,\cdots,\xi^n)\in\mathbf{R}^n : \sum_{\alpha=1}^{n}(\xi^\alpha)^2<1\right\}.$$

用 ψ 记 φ_{n+1}^{+} 的逆映射，则 $\psi: D\to S^n$ 的表达式是

$$(x^1,\cdots,x^{n+1})=\psi(\xi^1,\cdots,\xi^n)=\left(\xi^1,\cdots,\xi^n,\sqrt{1-\sum_{\alpha=1}^{n}(\xi^\alpha)^2}\right). \quad (1.22)$$

这样，$i^*\sigma|_{U_{n+1}^{+}}$ 的局部坐标表达式是

$$\psi^*i^*\sigma=\psi^*i^*\sigma\left(\frac{\partial}{\partial\xi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi^n}\right)\mathrm{d}\xi^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\xi^n, \quad (1.23)$$

其中

$$\begin{aligned}\psi^*i^*\sigma\left(\frac{\partial}{\partial\xi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi^n}\right)&=\sigma\left(i_*\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial\xi^1}\right),\cdots,i_*\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial\xi^n}\right)\right)\\&=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}(x^i\circ\psi)\cdot\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\\&\quad\cdots\wedge\mathrm{d}x^{n+1}\left(i_*\psi_*\frac{\partial}{\partial\xi^1},\cdots,i_*\psi_*\frac{\partial}{\partial\xi^n}\right).\end{aligned} \quad (1.24)$$

由(1.22)式得到

$$i_*\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial x^i}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}-\frac{x^\alpha}{x^{n+1}}\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}, \quad (1.25)$$

所以对于 $1\leqslant\alpha\leqslant n$ 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^\alpha}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{n+1}\left(i_*\psi_*\frac{\partial}{\partial\xi^1},\cdots,i_*\psi_*\frac{\partial}{\partial\xi^n}\right)\\&=\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^\alpha}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{n+1}\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,-\frac{x^\alpha}{x^{n+1}}\frac{\partial}{\partial x^{n+1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)\\&=(-1)^{n+\alpha+1}\frac{x^\alpha}{x^{n+1}}.\end{aligned} \quad (1.26)$$

另外用(1.25)式代入得到

$$\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\left(i_*\psi_*\frac{\partial}{\partial\xi^1},\cdots,i_*\psi_*\frac{\partial}{\partial\xi^n}\right)=1, \quad (1.27)$$

因此

$$\begin{aligned}&\psi^*i^*\sigma\left(\frac{\partial}{\partial\xi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi^n}\right)\\&=(-1)^n x^{n+1}+\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha+1}x^\alpha\cdot(-1)^{n+\alpha+1}\frac{x^\alpha}{x^{n+1}}\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \neq 0,$$

故

$$\psi^* i^* \sigma = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1 - \sum_\alpha (\xi^\alpha)^2}} \mathrm{d}\xi^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\xi^n \tag{1.28}$$

在 U_{n+1}^+ 内处处不为零. 在别的坐标域上的推导是类似的.

上面的计算可以简化. 从(1.22)式得到

$$\mathrm{d}x^\alpha = \mathrm{d}\xi^\alpha, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant n,$$

$$\mathrm{d}x^{n+1} = \frac{-\sum_\beta \xi^\beta \mathrm{d}\xi^\beta}{\sqrt{1 - \sum_{\beta=1}^n (\xi^\beta)^2}},$$

所以

$$\begin{aligned}
\psi^* i^* \sigma = & \psi^* i^* \Big((-1)^n x^{n+1} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
& + \sum_{\alpha=1}^n (-1)^{\alpha+1} x^\alpha \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^\alpha} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n+1} \Big) \\
= & (-1)^n (x^{n+1} \circ \psi) \mathrm{d}\xi^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\xi^n \\
& + \sum_{\alpha=1}^n (-1)^{\alpha+1} \xi^\alpha \mathrm{d}\xi^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}\xi^\alpha} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\xi^n \wedge \frac{-\sum_{\beta=1}^n \xi^\beta \mathrm{d}\xi^\beta}{\sqrt{1 - \sum_{\beta=1}^n (\xi^\beta)^2}} \\
= & (-1)^n \left(\sqrt{1 - \sum_{\beta=1}^n (\xi^\beta)^2} \mathrm{d}\xi^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\xi^n \right. \\
& \left. + \sum_{\alpha=1}^n \frac{(\xi^\alpha)^2}{\sqrt{1 - \sum_{\beta=1}^n (\xi^\beta)^2}} \mathrm{d}\xi^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\xi^n \right) \\
= & (-1)^n \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{\beta=1}^n (\xi^\beta)^2}} \mathrm{d}\xi^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\xi^n.
\end{aligned}$$

当 $n = 1$ 时, $\sigma = x^1 \mathrm{d}x^2 - x^2 \mathrm{d}x^1$. 不难看出 $i^*\sigma$ 恰好是例 3 中所定义的 1 次微分式 α.

例 5　$\mathbf{R}P^1$ 可以用两个坐标域覆盖住(参看第二章 §1, 例 4), 它们是

$$U_1 = \{[(x,y)] : (x,y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{0\}, x \neq 0\},$$

$$U_2 = \{[(x,y)] : (x,y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{0\}, y \neq 0\}.$$

在 U_1 上取坐标函数

$$\xi_1 = \frac{y}{x},$$

在 U_2 上取坐标函数

$$\xi_2 = \frac{x}{y}.$$

在 $U_1 \cap U_2$ 上有坐标变换

$$\xi_1 = \frac{1}{\xi_2},$$

其微分为

$$d\xi_1 = -\frac{d\xi_2}{\xi_2^2}.$$

另一方面

$$1 + \xi_1^2 = 1 + \frac{1}{\xi_2^2} = \frac{1 + \xi_2^2}{\xi_2^2},$$

所以

$$\frac{d\xi_1}{1 + \xi_1^2} = -\frac{d\xi_2}{1 + \xi_2^2}.$$

这就是说，在 $\mathbf{R}P^1$ 上有处处不为零的 1 次微分式 α，使得

$$\alpha|_{U_1} = \frac{d\xi_1}{1 + \xi_1^2},$$

$$\alpha|_{U_2} = -\frac{d\xi_2}{1 + \xi_2^2}.$$

所以 $\mathbf{R}P^1$ 是可定向流形，它的定向相符的坐标覆盖是 $\{(U_1;\xi_1),(U_2;-\xi_2)\}$.

例 6 设 (M,g) 是 n 维有向的黎曼流形，$(U;x^i)$ 是 M 的定向相符的局部坐标系. 记

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right), \tag{1.29}$$

则

$$\Omega = \sqrt{G}\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{1.30}$$

是在 M 上大范围定义的 n 次外微分式（习题四，第 1 题），其中 $G = \det(g_{ij})$. 很明显，Ω 处处不为零，称为黎曼流形 (M,g) 的**体积元素**.

§2 外 微 分

在 §1 我们已经介绍了外微分式的空间 $A(M) = \bigoplus_{r=0}^{m} A^r(M)$ 中的代数运算：加法、数乘法和外积，使它成为一个结合代数. 在本节我们要讲作用在外微

分式上的最重要的运算 —— 外微分.

定理 2.1 设 M 是 m 维光滑流形,则存在唯一的一个映射 $\mathrm{d}: A(M) \to A(M)$,使得 $\mathrm{d}(A^r(M)) \subset A^{r+1}(M)$,并且满足以下条件:

(1) 对任意的 $\alpha, \beta \in A(M)$ 有

$$\mathrm{d}(\alpha + \beta) = \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta;$$

(2) 设 α 是 r 次外微分式,则

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge \mathrm{d}\beta;$$

(3) 对于任意的 $f \in A^0(M)$(即 $C^\infty(M)$),$\mathrm{d}f$ 是 f 的微分;

(4) 对任意的 $\alpha \in A(M)$,$\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0$.

上面所说的映射 d 称为**外微分**.

证明 我们首先要指出:如果上述外微分算子 d 是存在的,则 d 必具有局部性. 即:如果 $\alpha, \beta \in A(M)$,且在开子集 $U \subset M$ 上有 $\alpha|_U = \beta|_U$,则必有

$$\mathrm{d}\alpha|_U = \mathrm{d}\beta|_U.$$

考虑到 d 所满足的条件(1),只需证明:若 $\omega \in A(M)$,且 $\omega|_U = 0$,则 $\mathrm{d}\omega|_U = 0$.

任取一点 $p \in U$. 由于流形的局部紧致性,可找到包含点 p 的开邻域 W,使得 $\overline{W}$ 紧致,并且

$$p \in W \subset \overline{W} \subset U,$$

则由第二章的引理 2.2,存在光滑函数 $h \in C^\infty(M)$,使得

$$h|_W \equiv 1, \quad h|_{M \setminus U} \equiv 0.$$

这样,$h \cdot \omega \in A(M)$,并且 $h \cdot \omega \equiv 0$.

条件(1) 蕴含着外微分算子 d 在零微分式上的作用是零(线性映射所共有的性质),因此由条件(2) 得

$$0 = \mathrm{d}(h \cdot \omega) = \mathrm{d}h \wedge \omega + h \cdot \mathrm{d}\omega,$$

这里 $\mathrm{d}h$ 是 h 的普通微分(条件(3)). 将上式限制到 W 上,因 $h|_W \equiv 1, \mathrm{d}h|_W \equiv 0$,故有

$$\mathrm{d}\omega|_W \equiv 0.$$

由于 p 在开集 U 内的任意性,因此 $\mathrm{d}\omega|_U \equiv 0$.

利用算子 d 的局部性,d 就可以作用于定义在开子集 U 上的外微分式,并且仍满足定理2.1 的 4 个条件. 实际上,若设 $\omega \in A(U)$,$p \in U$,则如同第二章定理 2.3 的做法,必有点 p 的邻域$V \subset U$,以及 $\widetilde{\omega} \in A(M)$,使得 $\widetilde{\omega}|_V = \omega|_V$. 于是我们可以定义

$$\mathrm{d}\omega(p) = \mathrm{d}\widetilde{\omega}(p).$$

d 的局部性保证了上式右端的 $\mathrm{d}\widetilde{\omega}(p)$ 与 ω 在点 p 的邻域上的扩张 $\widetilde{\omega}$ 的取法无关. 因此,如果 d 是光滑流形 M 上的外微分算子,则 d 也是 M 的任意一个开子集 U 上的外微分算子,因此 d 可以作用于定义在 M 的任意一个局部坐标域上

的外微分式.

根据 d 所满足的 4 个条件, d 在局部坐标所表达的外微分式上的作用是完全确定的, 因而 d 是唯一的. 实际上, 设 $(U;x^i)$ 是 M 的任意一个局部坐标系, $\alpha \in A^r(M)$, 则 $\alpha|_U$ 有局部坐标表达式

$$\alpha|_U = \frac{1}{r!}\alpha_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}, \tag{2.1}$$

其中 $\alpha_{i_1\cdots i_r} \in C^\infty(U)$. 因此利用 d 所满足的条件得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\alpha|_U) &= \frac{1}{r!}\Big\{\mathrm{d}\alpha_{i_1\cdots i_r} \wedge \mathrm{d}x^{i_1}\cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^{r}(-1)^{\lambda-1}\alpha_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(\mathrm{d}x^{i_\lambda}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}\Big\} \\ &= \frac{1}{r!}\frac{\partial\alpha_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

这里因为 $x^{i_\lambda} \in C^\infty(U)$, 故有 $\mathrm{d}(\mathrm{d}x^{i_\lambda}) = 0$.

下面我们证明外微分算子 d 的存在性. 设 $(U;x^i)$ 是 M 的任意一个局部坐标系, 用(2.2)式来定义作用于 $A(U)$ 上的外微分算子 d_U, 即对于

$$\alpha = \frac{1}{r!}\alpha_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \in A^r(U),$$

令

$$\mathrm{d}_U\alpha = \frac{1}{r!}\frac{\partial\alpha_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}.$$

显然, d_U 满足条件(1)和(3). 为证明(2), 取两个单项式

$$\alpha = a\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \in A^r(U),$$
$$\beta = b\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s} \in A^s(U),$$

其中 $a, b \in C^\infty(U)$, 则

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}_U(\alpha \wedge \beta) \\ &= \mathrm{d}(a \cdot b) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s} \\ &= (\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}) \wedge (b\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s}) \\ &\quad + (-1)^r(a\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}) \wedge (\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s}) \\ &= \mathrm{d}_U\alpha \wedge \beta + (-1)^r\alpha \wedge \mathrm{d}_U\beta.\end{aligned}$$

关于(4), 设 α 如前, 则

$$\mathrm{d}_U\alpha = \frac{\partial a}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_U(\mathrm{d}_U\alpha) &= \frac{\partial^2 a}{\partial x^j \partial x^k}\mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^j}\right)\mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} = 0,\end{aligned}$$

即 $d_U \circ d_U = 0$. 这样，d_U 确实是定义在 U 上的外微分算子，因此，前面所谈论的局部性和唯一性对于 d_U 是成立的.

假定有另一个局部坐标系 $(V; y^i)$，故有外微分算子 $d_V: A(V) \to A(V)$. 若 $U \cap V \neq \varnothing$，则对于 $\alpha \in A^r(M)$ 有

$$\begin{aligned} & d_U(\alpha|_U)|_{U\cap V} \\ =& d_U(\alpha|_{U\cap V}) \quad \text{（由于算子 } d_U \text{ 的局部性）} \\ =& d_V(\alpha|_{U\cap V}) \quad \text{（由于在 } U\cap V \text{ 上外微分算子的唯一性）} \\ =& d_V(\alpha|_V)|_{U\cap V}. \quad \text{（由于算子 } d_V \text{ 的局部性）} \end{aligned} \tag{2.3}$$

这意味着外微分式 $d_U(\alpha|_U)$ 和 $d_V(\alpha|_V)$ 限制在 $U \cap V$ 上是相同的. 因此可以定义一个 $r+1$ 次外微分式 $d\alpha \in A^{r+1}(M)$，使得

$$d\alpha|_U = d_U(\alpha|_U).$$

如上所给出的对应 $\alpha \in A^r(M) \mapsto d\alpha \in A^{r+1}(M)$ 记为 $d: A^r(M) \to A^{r+1}(M)$. 显然，d 满足条件(1)—(4).

在(2.3)式的证明中用到了算子 d_U, d_V 的局部性和唯一性. 下面通过具体的计算也可以直接证明外微分算子在局部上的唯一性，以便获得关于外微分的感性认识. 设

$$\alpha|_U = \frac{1}{r!}\alpha_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, \tag{2.4}$$

$$\alpha|_V = \frac{1}{r!}\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_r}, \tag{2.5}$$

于是

$$\begin{aligned} \alpha|_{U\cap V} &= \frac{1}{r!}\alpha_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \\ &= \frac{1}{r!}\tilde{\alpha}_{j_1\cdots j_r} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_{i_1\cdots i_r}, \tilde{\alpha}_{j_1\cdots j_r}$ 关于下指标都是反对称的. 因此，在 $U \cap V$ 上有

$$\alpha_{i_1\cdots i_r} = \tilde{\alpha}_{j_1\cdots j_r} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}}, \tag{2.6}$$

这意味着 $\alpha_{i_1\cdots i_r}$ 是协变张量的分量. 于是

$$\begin{aligned} d_U(\alpha|_{U\cap V}) &= \frac{1}{r!} \frac{\partial \alpha_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \\ &= \frac{1}{r!}\left\{ \frac{\partial \tilde{\alpha}_{j_1\cdots j_r}}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\lambda=1}^{r} \tilde{\alpha}_{j_1\cdots j_r} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial^2 y^{j_\lambda}}{\partial x^{i_\lambda} \partial x^i} \cdots \frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}} \right\} \cdot dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}. \end{aligned}$$

注意到二次偏导数 $\dfrac{\partial^2 y^{j_\lambda}}{\partial x^{i_\lambda} \partial x^i}$ 关于指标 i_λ 和 i 的对称性，所以

$$\frac{\partial^2 y^{j_\lambda}}{\partial x^{i_\lambda}\partial x^{i}}\mathrm{d}x^{i}\wedge\mathrm{d}x^{i_\lambda}=0. \tag{2.7}$$

因此

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}_U(\alpha|_{U\cap V})\\&=\frac{1}{r!}\frac{\partial\tilde{\alpha}_{j_1\cdots j_r}}{\partial y^{j}}\mathrm{d}y^{j}\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_r}\\&=\mathrm{d}_V(\alpha|_{U\cap V}).\end{aligned} \tag{2.8}$$

这里面已经隐蔽地使用了1次微分的形式不变性，即函数的1次微分的形式在自变量替换下是保持的：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\tilde{\alpha}_{j_1\cdots j_r}(y^1(x^1,\cdots,x^m),\cdots,y^m(x^1,\cdots,x^m))}{\partial x^{i}}\mathrm{d}x^{i}\\&=\mathrm{d}(\tilde{\alpha}_{j_1\cdots j_r}(y^1(x^1,\cdots,x^m),\cdots,y^m(x^1,\cdots,x^m)))\\&=(\mathrm{d}\tilde{\alpha}_{j_1\cdots j_r})(y^1(x^1,\cdots,x^m),\cdots,y^m(x^1,\cdots,x^m))\\&=\frac{\partial\tilde{\alpha}_{j_1\cdots j_r}}{\partial y^{j}}(y^1(x^1,\cdots,x^m),\cdots,y^m(x^1,\cdots,x^m))\mathrm{d}y^{j}(x^1,\cdots,x^m).\end{aligned}$$

现在，(2.8)式的意义可以更确切地表达为：若在容许的参数变换

$$y^{i}=y^{i}(x^1,\cdots,x^m),\quad 1\leqslant i\leqslant m$$

下（即 $y^{i}(x^1,\cdots,x^m)\in C^\infty$，且 $\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\neq 0$）有

$$\begin{aligned}&\alpha_{i_1\cdots i_r}(x^1,\cdots,x^m)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}\\&=\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}(y^1,\cdots,y^m)\mathrm{d}y^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{i_r},\end{aligned} \tag{2.9}$$

则仍然有

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\alpha_{i_1\cdots i_r}(x^1,\cdots,x^m)\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}\\&=\mathrm{d}\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}(y^1,\cdots,y^m)\wedge\mathrm{d}y^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{i_r}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

这是“1次微分的形式不变性”的推广，可以称为“外微分的形式不变性”. 在微积分学中所定义的2次微分的形式在变量替换下不具有不变性，因此2次微分的概念在光滑流形上没有意义，而有意义的是外微分式和它们的外微分.

定理2.1表明：在光滑流形上，通过外微分能够从一个光滑的反对称协变张量场得到一个光滑的高一阶反对称协变张量场. 对一个光滑切向量场，或一般的光滑张量场进行微分而得到协变阶数增加1的光滑张量场，仅有流形的光滑结构是不够的，还需要在光滑流形上附加另外的结构，比如黎曼结构（参看第五章）. 但是，外微分式，即光滑的反对称协变张量场的外微分是一个例外，不需要光滑流形有别的结构.

定理 2.2 设 $\omega\in A^r(M)$，$X_1,\cdots,X_{r+1}\in\mathscr{X}(M)$，则

$$\mathrm{d}\omega(X_1,\cdots,X_{r+1}) = \sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}X_\lambda(\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_\lambda\cdots,X_{r+1}))$$
$$+\sum_{\lambda<\mu}(-1)^{\lambda+\mu}\omega([X_\lambda,X_\mu],X_1,\cdots,\hat{X}_\lambda,\cdots,\hat{X}_\mu,\cdots,X_{r+1}). \quad (2.11)$$

证明　由定理 2.1 可知 $\mathrm{d}\omega\in A^{r+1}(M)$，所以按照第三章的定理 4.1，我们有反对称的 $r+1$ 重线性映射

$$\mathrm{d}\omega:\underbrace{\mathscr{X}(M)\times\cdots\times\mathscr{X}(M)}_{r+1\text{个}}\to C^\infty(M)$$

它对每一个自变量都是 $C^\infty(M)$- 线性的.

将(2.11) 式右端记为 $\alpha(X_1,\cdots,X_{r+1})$，则

$$\alpha:\underbrace{\mathscr{X}(M)\times\cdots\times\mathscr{X}(M)}_{r+1\text{个}}\to C^\infty(M)$$

也是 $r+1$ 重线性映射. 映射 α 的反对称性是不难验证的，留给读者自己完成. 现要证明 α 对每一个自变量也都是 $C^\infty(M)$- 线性的.

为此，任取 $f\in C^\infty(M)$，则

$$\begin{aligned}
&\alpha(f\cdot X_1,X_2,\cdots,X_{r+1})\\
&=f\cdot X_1(\omega(X_2,\cdots,X_{r+1}))+\sum_{\lambda=2}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}X_\lambda(\omega(fX_1,\cdots,\hat{X}_\lambda,\cdots,X_{r+1}))\\
&\quad+\sum_{\mu=2}^{r+1}(-1)^{\mu+1}\omega([f\cdot X_1,X_\mu],\cdots,\hat{X}_\mu,\cdots,X_{r+1})\\
&\quad+\sum_{2\leqslant\lambda<\mu\leqslant r+1}(-1)^{\lambda+\mu}\omega([X_\lambda,X_\mu],fX_1,\cdots,\hat{X}_\lambda,\cdots,\hat{X}_\mu,\cdots,X_{r+1})\\
&=f\cdot X_1(\omega(X_2,\cdots,X_{r+1}))+\sum_{\lambda=2}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}X_\lambda(f\cdot\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_\lambda,\cdots,X_{r+1}))\\
&\quad+\sum_{\mu=2}^{r+1}(-1)^{\mu+1}\omega(f[X_1,X_\mu]-X_\mu(f)\cdot X_1,X_2,\cdots,\hat{X}_\mu\cdots,X_{r+1})\\
&\quad+f\cdot\sum_{2\leqslant\lambda<\mu\leqslant r+1}(-1)^{\lambda+\mu}\omega([X_\lambda,X_\mu],X_1,\cdots,\hat{X}_\lambda,\cdots,\hat{X}_\mu,\cdots,X_{r+1})\\
&=f\cdot\alpha(X_1,\cdots,X_{r+1}).
\end{aligned}$$

根据第三章定理 5.1，α 是 M 上的 $r+1$ 次外微分式. 下面我们要证明 $\mathrm{d}\omega=\alpha$.

如第三章定理 5.1 的证明所表明的那样，映射 $\mathrm{d}\omega$ 和 α 都有局部性，因而能在开子集 U 上的光滑切向量场上求值. 取局部坐标系 $(U;x^i)$，设

$$\omega|_U=\frac{1}{r!}\omega_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}, \quad (2.12)$$

并且令

$$d\omega|_U = \frac{1}{(r+1)!}(d\omega|_U)_{j_1\cdots j_{r+1}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{r+1}}, \tag{2.13}$$

那么 $d\omega|_U$ 的分量是

$$\begin{aligned}
&(d\omega|_U)_{j_1\cdots j_{r+1}} \\
&= d\omega|_U\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}}\right) \\
&= \frac{1}{r!}\frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}}\right) \\
&= \frac{1}{r!}\frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i}\delta^{ii_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{r+1}} \\
&= \sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}\frac{\partial \omega_{j_1\cdots \hat{j}_\lambda \cdots j_{r+1}}}{\partial x^{j_\lambda}}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

另外，设

$$\alpha|_U = \frac{1}{(r+1)!}\alpha_{j_1\cdots j_{r+1}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{r+1}},$$

则按定义，α 的分量是

$$\begin{aligned}
&\alpha_{j_1\cdots j_{r+1}} \\
&= \alpha|_U\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}}\right) \\
&= \sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}\frac{\partial}{\partial x^{j_\lambda}}\left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \cdots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{j_\lambda}}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}}\right)\right) \\
&\quad + \sum_{\lambda<\mu}(-1)^{\lambda+\mu}\omega\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^{j_\lambda}}, \frac{\partial}{\partial x^{j_\mu}}\right], \cdots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{j_\lambda}}}, \cdots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{j_\mu}}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}}\right) \\
&= \sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}\frac{\partial \omega_{j_1\cdots \hat{j}_\lambda \cdots j_{r+1}}}{\partial x^{j_\lambda}},
\end{aligned}$$

所以

$$d\omega|_U = \alpha|_U.$$

于是对于任意的 $X_1, \cdots, X_{r+1} \in \mathscr{X}(M)$，(2.11) 式成立.

(2.11) 式称为外微分的求值公式.

定 理 2.2 还能够通过直接计算得到. 事实上，在任意一个局部坐标系 $(U; x^i)$ 下设

$$\omega|_U = \frac{1}{r!}\omega_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r},$$

则

$$d\omega|_U = \frac{1}{r!}\frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}.$$

切向量场 X_λ 可以表示为

$$X_\lambda|_U = X_\lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant r+1,$$

则

$$\begin{aligned}[X_\lambda, X_\mu]|_U &= \left[X_\lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}, X_\mu^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right] \\ &= (X_\lambda(X_\mu^i) - X_\mu(X_\lambda^i)) \frac{\partial}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

由于外微分 d 的局部性，我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\omega(X_1, \cdots, X_{r+1})|_U \\ =&\mathrm{d}\omega|_U(X_1|_U, \cdots, X_{r+1}|_U) \\ =&\frac{1}{r!}\frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i} X_1^{j_1}\cdots X_{r+1}^{j_{r+1}} \delta_{j_1\cdots j_{r+1}}^{i i_1\cdots i_r} \\ =&\sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1} X_\lambda(\omega_{i_1\cdots i_r}) X_1^{i_1}\cdots X_{\lambda-1}^{i_{\lambda-1}} X_{\lambda+1}^{i_\lambda}\cdots X_{r+1}^{i_r} \\ =&\sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}\{X_\lambda(\omega_{i_1\cdots i_r} X_1^{i_1}\cdots X_{\lambda-1}^{i_{\lambda-1}} X_{\lambda+1}^{i_\lambda}\cdots X_{r+1}^{i_r}) \\ &- \sum_{\mu<\lambda}\omega_{i_1\cdots i_r} X_1^{i_1}\cdots X_\lambda(X_\mu^{i_\mu})\cdots X_{\lambda+1}^{i_\lambda}\cdots X_{r+1}^{i_r} \\ &- \sum_{\mu>\lambda}\omega_{i_1\cdots i_r} X_1^{i_1}\cdots X_{\lambda-1}^{i_{\lambda-1}}\cdots X_\lambda(X_\mu^{i_{\mu-1}})\cdots X_{r+1}^{i_r}\}.\end{aligned}$$

在右端花括号内第一项恰好是

$$X_\lambda(\omega(X_1, \cdots, X_{\lambda-1}, X_{\lambda+1}, \cdots, X_{r+1}))|_U.$$

在后两项中利用 $\omega_{i_1\cdots i_r}$ 关于下指标的反对称性分别把指标 $i_\mu, i_{\mu-1}$ 调整为 i_1，于是

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}\{-\sum_{\mu<\lambda}\omega_{i_1\cdots i_r} X_1^{i_1}\cdots X_\lambda(X_\mu^{i_\mu})\cdots X_{\lambda+1}^{i_\lambda}\cdots X_{r+1}^{i_r} \\ &-\sum_{\mu>\lambda}\omega_{i_1\cdots i_r} X_1^{i_1}\cdots X_{\lambda-1}^{i_{\lambda-1}}\cdots X_\lambda(X_\mu^{i_{\mu-1}})\cdots X_{r+1}^{i_r}\} \\ =&\sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}\{(-1)^\mu\sum_{\mu<\lambda}\omega_{i_1\cdots i_r} X_\lambda(X_\mu^{i_1}) X_1^{i_2}\cdots X_{\mu-1}^{i_\mu} X_{\mu+1}^{i_{\mu+1}}\cdots X_{\lambda-1}^{i_{\lambda-1}} X_{\lambda+1}^{i_\lambda}\cdots X_{r+1}^{i_r} \\ &+(-1)^{\mu+1}\sum_{\mu>\lambda}\omega_{i_1\cdots i_r} X_\lambda(X_\mu^{i_1}) X_1^{i_2}\cdots X_{\lambda-1}^{i_\lambda} X_{\lambda+1}^{i_{\lambda+1}}\cdots X_{\mu-1}^{i_{\mu-1}} X_{\mu+1}^{i_\mu}\cdots X_{r+1}^{i_r}\} \\ =&\sum_{\lambda<\mu}(-1)^{\lambda+\mu}\omega_{i_1\cdots i_r}(X_\lambda(X_\mu^{i_1}) - X_\mu(X_\lambda^{i_1})) X_1^{i_2}\cdots X_{\lambda-1}^{i_\lambda} X_{\lambda+1}^{i_{\lambda+1}}\cdots X_{\mu-1}^{i_{\mu-1}} X_{\mu+1}^{i_\mu}\cdots X_{r+1}^{i_r} \\ =&\sum_{\lambda<\mu}(-1)^{\lambda+\mu}\omega([X_\lambda, X_\mu], X_1, \cdots, \hat{X}_\lambda, \cdots, \hat{X}_\mu, \cdots, X_{r+1})|_U.\end{aligned}$$

综合起来，我们得到

$$\mathrm{d}\omega(X_1,\cdots,X_{r+1})|_U = \sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}X_\lambda(\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_\lambda,\cdots,X_{r+1}))|_U$$

$$+\sum_{\lambda<\mu}(-1)^{\lambda+\mu}\omega([X_\lambda,X_\mu],X_1,\cdots,\hat{X}_\lambda,\cdots,\hat{X}_\mu,\cdots,X_{r+1})|_U.$$

由于坐标域 U 的任意性，上式在整个 M 上成立.

推论 2.3 设 $\omega\in A^1(M)$，$X,Y\in\mathscr{X}(M)$，则

$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]). \tag{2.15}$$

外微分 d 的另一个重要性质是它与光滑映射 $f: M\to N$ 的诱导映射 $f^*: A^r(N)\to A^r(M)$ 的可交换性.

定理 2.4 设 M,N 分别是 m 维，n 维光滑流形，且 $f: M\to N$ 是光滑映射，$f^*: A^r(N)\to A^r(M)$ 是诱导映射（$0\leqslant r\leqslant n$），则对于任意的 $\omega\in A^r(N)$ 有

$$f^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(f^*\omega). \tag{2.16}$$

证明 由于外微分 d 有局部性，我们只需要在局部上进行验证.

设 $(U;x^i)$ 是 M 的一个局部坐标系，(V,y^α) 是 N 的一个局部坐标系，且 $f(U)\subset V$. 设 $\varphi\in A^r(N)$，则

$$\varphi|_V = \frac{1}{r!}\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_r}\mathrm{d}y^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{\alpha_r},$$

$$\mathrm{d}(\varphi|_V) = (\mathrm{d}\varphi)|_V = \frac{1}{r!}\frac{\partial\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_r}}{\partial y^\alpha}\mathrm{d}y^\alpha\wedge\mathrm{d}y^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{\alpha_r}.$$

由 §1 的 (1.15) 式，

$$f^*(\mathrm{d}(\varphi|_V)) = \frac{1}{r!}\left(\frac{\partial\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_r}}{\partial y^\alpha}\circ f\right)\cdot\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{i_r}}\cdot\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}$$

$$= \frac{1}{r!}\frac{\partial(\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_r}\circ f)}{\partial x^i}\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{i_r}}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}.$$

另一方面，

$$f^*(\varphi|_V) = \frac{1}{r!}(\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_r}\circ f)\cdot\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{i_r}}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r},$$

因此

$$\mathrm{d}(f^*(\varphi|_V)) = \frac{1}{r!}\left\{\frac{\partial(\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_r}\circ f)}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{i_r}}\right.$$

$$\left.+(\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_r}\circ f)\cdot\sum_{\lambda=1}^{r}\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial^2 y^{\alpha_\lambda}}{\partial x^{i_\lambda}\partial x^i}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{i_r}}\right\}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}.$$

注意到

$$\frac{\partial^2 y^{\alpha_\lambda}}{\partial x^{i_\lambda}\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{i_\lambda} = 0$$

(对照(2.7)式),故有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f^*(\varphi|_V)) &= \frac{1}{r!}\frac{\partial(\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_r}\circ f)}{\partial x^i}\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{i_r}}\mathrm{d}x^i\wedge \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_r}\\ &= f^*(\mathrm{d}(\varphi|_V)).\end{aligned}$$

前面所说的"外微分的形式不变性"是本定理的特例.

在定理 2.1 中外微分算子 d 所满足的条件(4)$\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$ 意味着 d 可以看作拓扑学中的边缘算子. 实际上,若把 r 次外微分式的空间 $A^r(M)$ 看作加法群,则 $\mathrm{d}: A^r(M)\to A^{r+1}(M)$ 是加法群的同态,且满足 $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$,故在拓扑学上把 $A^r(M)$ 当作上链群,且把算子 d 作为上边缘算子.

定义 2.1　令

$$Z^r(M)=\ker \mathrm{d}=\{\alpha\in A^r(M): \mathrm{d}\alpha=0\},$$

$Z^r(M)$ 中的元素称为 r 次**闭微分式**.

定义 2.2　令

$$\begin{aligned}B^r(M) &= \mathrm{d}(A^{r-1}(M))\\ &= \{\alpha\in A^r(M):\ \text{存在}\ \beta\in A^{r-1}(M),\text{使得}\ \alpha=\mathrm{d}\beta\},\end{aligned}$$

$B^r(M)$ 中的元素称为 r 次**恰当微分式**.

这样,性质 $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$ 意味着 $B^r(M)$ 是 $Z^r(M)$ 的子群. 在拓扑学中,$Z^r(M)$ 为上闭链群,$B^r(M)$ 为上边缘链群.

定义 2.3　商群 $H^r(M)=Z^r(M)/B^r(M)$ 称为光滑流形 M 上的第 r 个 deRham **上同调群**.

关于 deRham 上同调群有下面既重要又漂亮的定理:

deRham **定理**　设 M 是紧致光滑流形,则 M 的第 r 个 deRham 上同调群与 M 的第 r 个实系数上同调群同构. 特别是,$\dim H^r(M)$ 恰好是流形 M 的第 r 个 Betti 数 β_r.

deRham 上同调群是流形 M 的微分结构的产物,而 Betti 数 β_r 纯粹是流形 M 的拓扑不变量. 凡是描述两个不同范畴的结构之间的关系的定理都是十分重要的. 关于 deRham 定理的初等、详尽的证明可查阅[10],p. 166. 当然 deRham 自己的书[25]也是非常值得钻研的.

从 $B^r(M)\subset Z^r(M)$ 的事实引出一个重要的问题:既然一个恰当微分式必定是闭微分式,那么一个闭微分式是否一定是恰当微分式呢?如果不是,则在什么情况下,一个闭微分式总是能写成另一个外微分式的外微分呢?从 deRham 上同调群的观点看,只要 deRham 上同调群是平凡的就行了.

根据 deRham 定理,在紧致光滑流形 M 上任意一个 r 次闭微分式是恰当微分式的充分必要条件是流形 M 的第 r 个 Betti 数 $\beta_r=0$. 在 §1 的例 3,单位圆周 S^1 是 1 维紧致光滑流形,它的第 1 个 Betti 数 $\beta_1=1$. 因为在 1 维光滑流

形上没有非零的2次外微分式，所以S^1上的1次微分式α必定是闭的，$\mathrm{d}\alpha=0$. 根据 deRham 定理，α不是恰当形式，即α确实不能写成S^1上的一个光滑函数的微分. 但是在局部上存在光滑函数θ，使得$\alpha=\mathrm{d}\theta$(参看 §1，例3). 这个事实的一般化，就是在球状邻域上任意一个闭微分式都是恰当的，即它可以写成另一个外微分式的外微分. 这个断言称为Poincaré 引理，它在证明 deRham 定理的过程中起着关键的作用.

定理 2.5(Poincaré引理) 设$U=B_0(r)$是$\mathbf{R}^n$中以原点O为中心、以r为半径的球状邻域. 设$\omega\in A^r(U)$，且$\mathrm{d}\omega=0$，则存在$\tau\in A^{r-1}(U)$，使得

$$\omega=\mathrm{d}\tau.$$

证明 设ω的坐标表达式为

$$\omega=\frac{1}{r!}\omega_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r},$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\frac{1}{r!}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}\\&=\frac{1}{(r+1)!}\left\{\sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots\hat{i}_\lambda\cdots i_{r+1}}}{\partial x^{i_\lambda}}\right\}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_{r+1}}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

显然，最后一式括号内的系数关于$i_1,\cdots,i_{r+1}$是反对称的. 由$\mathrm{d}\omega=0$得到

$$\sum_{\lambda=1}^{r+1}(-1)^{\lambda+1}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots\hat{i}_\lambda\cdots i_{r+1}}}{\partial x^{i_\lambda}}=0,$$

即

$$\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i}=\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_{\alpha-1}ii_{\alpha+1}\cdots i_r}}{\partial x^{i_\alpha}}.\tag{2.18}$$

令

$$\begin{aligned}\tau(x)=\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r}\left\{\int_0^1 t^{r-1}\omega_{i_1\cdots i_r}(tx)\mathrm{d}t\right\}\sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha+1}x^{i_\alpha}\mathrm{d}x^{i_1}\\\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r},\end{aligned}\tag{2.19}$$

其中$x\in U$，则$\tau\in A^{r-1}(U)$. 下面计算$\mathrm{d}\tau$：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tau=&\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r,i}\left\{\int_0^1 t^r\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i}(tx)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x^i\wedge\\&\sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha+1}x^{i_\alpha}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}\\&+\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r}\left\{\int_0^1 t^{r-1}\omega_{i_1\cdots i_r}(tx)\mathrm{d}x\right\}r\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}.\end{aligned}$$

为化简第一个和式，我们有

$$\sum_{i_1,\cdots,i_r,i}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha+1}x^{i_\alpha}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_r,i}\sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha+1}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i}x^{i_\alpha}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_r,i}\sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha+1}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_{\alpha-1}ii_{\alpha+1}\cdots i_r}}{\partial x^{i_\alpha}}x^i\mathrm{d}x^{i_\alpha}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_r,i}\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_{\alpha-1}ii_{\alpha+1}\cdots i_r}}{\partial x^{i_\alpha}}x^i\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_r,i}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i}x^i\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r},$$

其中第2个等号只是将哑指标i,i_α的命名交换一下，第4个等号是因为(2.18)式. 所以

$$\mathrm{d}\tau=\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r}\left\{\int_0^1\left(rt^{r-1}\omega_{i_1\cdots i_r}(tx)+\sum_i t^r\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i}(tx)\cdot x^i\right)\mathrm{d}t\right\}\cdot\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}$$

$$=\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r}\left\{\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^r\omega_{i_1\cdots i_r}(tx))\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}$$

$$=\frac{1}{r!}\omega_{i_1\cdots i_r}(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}=\omega,$$

证毕.

从上面的证明可见，若U是以O为中心的星形区域，定理2.5亦真. 这里，星形区域U是指：若$x\in U$，则连结O、x的直线段也落在U内. 更一般地，若U是可缩区域，定理的结论也成立.

例1　设ω是$\mathbf{R}^n$上的1次微分式，其表达式为

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\mathrm{d}x^i,$$

其中$\omega_i\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，要求函数$f\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$使得

$$\mathrm{d}f=\omega.$$

该问题等价于解一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}=\omega_i(x^1,\cdots,x^n).$$

由第三章定理4.4，该方程组的可积条件是

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}=\frac{\partial\omega_j}{\partial x^i},$$

即

$$\mathrm{d}\omega=0.$$

这恰好是Poincaré引理.

例 2 定理 2.5 在本质上是局部的(大范围的结果就是 deRham 定理). 考虑 $\mathbf{R}^2\backslash\{0\}$ 上的一次微分式

$$\omega=\frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,$$

经计算得到

$$\mathrm{d}\omega=0.$$

但是在 $\mathbf{R}^2\backslash\{0\}$ 上不存在 C^1- 函数 $f:\mathbf{R}^2\backslash\{0\}\to\mathbf{R}$ 使得 $\omega=\mathrm{d}f$. 这是因为, 若有这样的 f 存在, 则一次微分式 ω 沿 $\mathbf{R}^2\backslash\{0\}$ 中任意一条分段光滑的封闭曲线的积分应该为零. 而事实上, 若取 C 为

$$x=r\cos t,\qquad y=r\sin t,\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

则

$$\oint_C-\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.$$

这是一个矛盾.

根据 Poincaré 引理, 在任意一点 $p\in\mathbf{R}^2\backslash\{0\}$ 的任意一个球状邻域内, 这样的函数 f 确实是存在的. 例如: 在 $(x_0,y_0)\neq 0$ 的邻域内有光滑函数 $f=\arctan\frac{y}{x}$, 它满足 $\mathrm{d}f=\omega$.

§3 Pfaff 方程组和 Frobenius 定理

E. Cartan 和 E. Kahler 发展起来的外微分方程组理论是偏微分方程组理论的重要组成部分, 是外微分理论的应用. 我们在这里将讨论一类最简单的外微分方程组——Pfaff 方程组, 它们在外微分方程组的一般理论中起着重要的作用.

定义 3.1 设 $\omega^\alpha(1\leqslant\alpha\leqslant r)$ 是定义在 m 维光滑流形 M 的开子集 U 上的 r 个 1 次微分式, 则称微分方程组

$$\omega^\alpha=0,\qquad 1\leqslant\alpha\leqslant r,\tag{3.1}$$

为 U 上的 Pfaff **方程组**.

若 $r=1$, 相应的方程称为 Pfaff 方程, 即通常的全微分方程. 例如:

$$\omega\equiv P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0,$$

其中 P,Q,R 是 x,y,z 的光滑函数.

定义 3.2 设 (3.1) 是开子集 $U\subset M$ 上的 Pfaff 方程组. 若有单一的浸入子流形 $\varphi:N\to U$, 使得

$$\varphi^*\omega^\alpha\equiv 0,\qquad 1\leqslant\alpha\leqslant r,$$

则称 (φ,N) 为 Pfaff 方程组 (3.1) 的**积分流形**.

例 1 设有一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{i}} = f_{i}^{\alpha}(x^{1}, \cdots, x^{m}, y^{1}, \cdots, y^{n}), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant n, \tag{3.2}$$

其中 $f_i^\alpha(x,y)$ 是开子集 $U \times V \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ 上的光滑函数. 该方程组能写成 $U \times V$ 上的 Pfaff 方程组

$$\omega^{\alpha} \equiv \mathrm{d}y^{\alpha} - f_{i}^{\alpha}(x, y)\mathrm{d}x^{i} = 0, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant n. \tag{3.3}$$

若方程组(3.2) 有解

$$y^{\alpha} = g^{\alpha}(x^{1}, \cdots, x^{m}),$$

则 m 维子流形 $\varphi: U \to U \times V$,

$$\varphi(x^{1}, \cdots, x^{m}) = (x^{1}, \cdots, x^{m}, g^{1}(x), \cdots, g^{n}(x))$$

是(3.3) 的积分流形. 实际上,

$$\begin{aligned} \varphi^{*}\omega^{\alpha} &= \mathrm{d}g^{\alpha}(x) - f_{i}^{\alpha}(x, g(x))\mathrm{d}x^{i} \\ &= \left(\frac{\partial g^{\alpha}(x)}{\partial x^{i}} - f_{i}^{\alpha}(x, g(x)) \right) \mathrm{d}x^{i} \\ &= 0. \end{aligned}$$

例 2　设有常微分方程

$$y''' = f(x, y, y', y''), \tag{3.4}$$

其中 $f(x,y,y',y'')$ 是 x,y,y',y'' 的光滑函数. 引进新变量 $z = y'$, $w = y''$,, 则在 4 维空间 $\mathbf{R}^4$ 中有 Pfaff 方程组:

$$\begin{cases} \alpha_{1} \equiv \mathrm{d}y - z\mathrm{d}x = 0, \\ \alpha_{2} \equiv \mathrm{d}z - w\mathrm{d}x = 0, \\ \alpha_{3} \equiv \mathrm{d}w - f(x, y, z, w)\mathrm{d}x = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

设 $y = g(x)$ 是方程(3.4) 的解, 则 1 维子流形

$$\begin{cases} y = g(x), \\ z = g'(x), \\ w = g''(x) \end{cases}$$

是 Pfaff 方程组(3.5) 的积分流形.

Pfaff 方程组(3.1) 中的 1 次微分式在各点给出的 1 — 形式的线性无关的个数未必是相同的. 我们感兴趣的情形是它们在各点的线性无关的个数是常数, 该数称为 Pfaff 方程组(3.1) 的秩. 此时, 在每一点的邻域内, Pfaff 方程组(3.1) 总可以化简为等价的 Pfaff 方程组, 使得方程的个数恰好等于方程组的秩. 因此, 不妨假定方程组 (3.1) 的秩是 r. 这样, 在每一点 $p \in U$, 方程组(3.1) 的几何意义是: 它们在切空间 T_pM 中定义了一个 $h = m - r$ 维子空间

$$L^{h}(p) = \{v \in T_{p}M : \omega^{\alpha}(v) = 0, 1 \leqslant \alpha \leqslant r\}.$$

所以 Pfaff 方程组(3.1) 在 U 上给出了一个 h 维分布 L^h.

分布 L^h 还是光滑的. 实际上, 取点 p 的局部坐标系$(V;x^i)$, 使得 $V \subset U$, 设

$$\omega^\alpha|_V = \omega_i^\alpha \mathrm{d}x^i, \tag{3.6}$$

其中 $\omega_i^\alpha \in C^\infty(V)$. 由于 $\omega^\alpha(1 \leqslant \alpha \leqslant r)$ 是处处线性无关的，不妨设系数矩阵 (ω_i^α) 的前 r 列子式 $\det(\omega_\beta^\alpha)$ 在 V 上处处不为零. 用 (b_β^α) 表示 (ω_β^α) 的逆矩阵，则方程组

$$\begin{aligned}\theta^\alpha &\equiv \sum_\beta b_\beta^\alpha \omega^\beta|_V \\ &= \mathrm{d}x^\alpha + \sum_{\lambda=r+1}^{m} C_\lambda^\alpha \mathrm{d}x^\lambda = 0, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r\end{aligned} \tag{3.7}$$

与 Pfaff 方程组(3.1) 是等价的，其中

$$C_\lambda^\alpha = \sum_\beta b_\beta^\alpha \omega_\lambda^\beta.$$

在这里我们约定指标的取值范围是：

$$1 \leqslant i, j, k \leqslant m, \qquad 1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant r, \qquad r+1 \leqslant \lambda, \mu, \upsilon \leqslant m,$$

并且采用 Einstein 的和式约定.

此外，令

$$\theta^\lambda = \mathrm{d}x^\lambda, \tag{3.8}$$

则 $\{\theta^1, \cdots, \theta^m\}$ 是 V 上 m 个处处线性无关的 1 次微分式，它们构成 V 上的余切标架场. 与之对偶的切标架场 $\{X_1, \cdots, X_m\}$ 是

$$\begin{cases} X_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}, \\ X_\lambda = \dfrac{\partial}{\partial x^\lambda} - \displaystyle\sum_{\beta=1}^{r} C_\lambda^\beta \dfrac{\partial}{\partial x^\beta}. \end{cases} \tag{3.9}$$

直接验证可知

$$\theta^i(X_j) = \delta_j^i.$$

这样，Pfaff 方程组(3.1)，或等价的 Pfaff 方程组(3.7) 所对应的 h 维分布是

$$L^h|_V = \mathrm{Span}\{X_{r+1}, \cdots, X_m\},$$

故 L^h 是光滑的.

上面的推演过程是可逆的. 如果 L^h 是定义在开子集 $U \subset M$ 上的 h 维光滑分布，则在每一点 $p \in U$ 的一个邻域 V 内存在秩为 $r = m - h$ 的 Pfaff 方程组，使得它所对应的分布就是 L^h. 实际上，设有点 p 的局部坐标系 $(V; x^i)$，以及 h 个处处线性无关的光滑切向量场 $X_\lambda \in \mathscr{X}(V)$，使得

$$L^h|_V = \mathrm{Span}\{X_{r+1}, \cdots, X_m\}.$$

假定

$$X_\lambda = X_\lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

并且 $\det(X_\lambda^\mu) \neq 0$，则可用 (b_λ^μ) 记 (X_λ^μ) 的逆矩阵，并且令

$$Y_\lambda = b_\lambda^\mu X_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - l_\lambda^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha},$$

其中

$$l_\lambda^\alpha = - b_\lambda^\mu X_\mu^\alpha,$$

于是仍有

$$L^h|_V = \mathrm{Span}\{Y_{r+1}, \cdots, Y_m\}.$$

由此可见，分布 $L^h|_V$ 对应于秩为 r 的 Pfaff 方程组

$$\varphi^\alpha \equiv \mathrm{d}x^\alpha + l_\lambda^\alpha \mathrm{d}x^\lambda = 0, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r.$$

上面的事实可以叙述成

命题 3.1 定义在开子集 $V \subset M$ 上的秩为 r 的 Pfaff 方程组在局部上等价于 $h = m - r$ 维的光滑分布，其中 $m = \dim M$.

对照定义 3.2 与第三章的定义 4.4，Pfaff 方程组(3.1)的积分流形恰好是对应的光滑分布 L^h 的积分流形. 事实上，若设 $\varphi: N \to U$ 是 Pfaff 方程组(3.1)的积分流形，任取 $X \in T_pN$，则

$$\omega^\alpha(\varphi_* X) = \varphi^* \omega_\alpha(X) = 0,$$

故

$$\varphi_*(T_pN) \subset L^h(\varphi(p)).$$

这说明：$\varphi: N \to V$ 是分布 L^h 的积分流形. 反之亦然. 这样，我们可以用对应的光滑分布的完全可积性来定义 Pfaff 方程组的完全可积性. 换言之，我们有下面的定义：

定义 3.3 设 $\omega^\alpha (l \leqslant \alpha \leqslant r)$ 是定义在开子集 $U \subset M$ 上的 r 个处处线性无关的一次微分式. 若对于任意一点 $p \in U$，Pfaff 方程组

$$\omega^\alpha = 0, \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant r$$

都有一个 $h = m - r$ 维积分流形经过它，则称该方程组是**完全可积**的. 这里，$m = \dim M$.

下面的定理给出 Pfaff 方程组完全可积的条件，它是 Frobenius 定理(第三章的定理 4.2，定理 4.3)的对偶叙述.

定理 3.2 设(3.1)是定义在开子集 $U \subset M$ 上的秩为 r 的 Pfaff 方程组，则它是完全可积的充分必要条件是：在每一点 $p \in U$ 的一个邻域 V 内存在 r^2 个 1 次微分式 φ_β^α，使得在 V 内成立

$$\mathrm{d}\omega^\alpha = \varphi_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r. \tag{3.10}$$

按照第一章的定义 5.6，上述条件可以说成在 V 上有

$$\mathrm{d}\omega^\alpha \equiv 0 \mod(\omega^1, \cdots, \omega^r), \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r. \tag{3.11}$$

证明 根据前面的讨论，在每一点 $p \in U$ 的一个局部坐标系 $(V; x^i)$ 下，设

$$\omega^\alpha = \omega_i^\alpha \mathrm{d}x^i,$$

且 $\det(\omega^{\alpha}_{\beta}) \neq 0$，则 Pfaff 方程组(3.1) 在 V 内等价于 $h = m - r$ 维光滑分布

$$L^h = \mathrm{Span}\{X_{r+1}, \cdots, X_m\},$$

其中 X_λ 由(3.9) 式给出. (3.1) 的完全可积性等价于 L^h 的完全可积性，因此，根据第三章定理 4.2′ 和定理 4.3，只要证明条件(3.10) 等价于分布 L^h 满足 Frobenius 条件

$$[X_\lambda, X_\mu] \equiv 0 \bmod \{X_{r+1}, \cdots, X_m\}, \quad r+1 \leqslant \lambda, \quad \mu \leqslant m. \tag{3.12}$$

首先我们要指出，当1次微分式 ω^α 经受变换(3.7) 时，条件(3.10) 是不变的. 实际上，假定(3.10) 成立，则

$$d\theta^\alpha = db^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + b^\alpha_\beta d\omega^\beta = (db^\alpha_\beta + b^\alpha_\gamma \varphi^\gamma_\beta)\omega^\beta_\delta \wedge \theta^\delta.$$

取

$$\tilde{\varphi}^\alpha_\beta = \omega^\delta_\beta(db^\alpha_\delta + b^\alpha_\gamma \varphi^\gamma_\delta),$$

则有

$$d\theta^\alpha = \tilde{\varphi}^\alpha_\beta \wedge \theta^\beta, \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant r, \tag{3.13}$$

即

$$d\theta^\alpha \equiv 0 \bmod (\theta^1, \cdots, \theta^r). \tag{3.14}$$

因此，我们只要证明条件(3.13) 等价于分布 L^h 满足 Frobenius 条件(3.12).

设 $\{\theta^i\}$ 是由(3.7)，(3.8) 定义的余切标架场，于是 $\{\theta^i \wedge \theta^j : 1 \leqslant i < j \leqslant m\}$ 构成 2 次外微分式空间 $A^2(V)$ 作为 $C^\infty(V)$- 模的基底，故可设

$$d\theta^\alpha = \frac{1}{2} A^\alpha_{ij} \theta^i \wedge \theta^j, \tag{3.15}$$

其中

$$A^\alpha_{ij} = d\theta^\alpha(X_i, X_j), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant m. \tag{3.16}$$

根据推论 2.3，并且注意到 $\theta^\alpha(X_\mu) = 0 (1 \leqslant \alpha \leqslant r, r+1 \leqslant \mu \leqslant m)$，我们有

$$\begin{aligned} A^\alpha_{\lambda\mu} &= d\theta^\alpha(X_\lambda, X_\mu) \\ &= X_\lambda(\theta^\alpha(X_\mu)) - X_\mu(\theta^\alpha(X_\lambda)) - \theta^\alpha([X_\lambda, X_\mu]) \\ &= -\theta^\alpha([X_\lambda, X_\mu]). \end{aligned} \tag{3.17}$$

如果(3.13) 式成立，则由(3.15) 式得到

$$A^\alpha_{\lambda\mu} = 0, \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant r, \qquad r+1 \leqslant \lambda, \mu \leqslant m,$$

即

$$\theta^\alpha([X_\lambda, X_\mu]) = 0.$$

因此由 $\{\theta^i\}$ 与 $\{X_i\}$ 的对偶性得到

$$[X_\lambda, X_\mu] = \sum_{i=1}^m \theta^i([X_\lambda, X_\mu])X_i = \sum_{\nu=r+1}^m \theta^\nu([X_\lambda, X_\mu])X_\nu,$$

即(3.12) 式成立.

反过来，若(3.12) 式成立，即

$$[X_\lambda, X_\mu] = \sum_{v=r+1}^{m} C_{\lambda\mu}^{v} X_v,$$

则在(3.15)式中有

$$A_{\lambda\mu}^{\alpha} = -\theta^{\alpha}([X_\lambda, X_\mu])$$
$$= -\sum_{v=r+1}^{m} C_{\lambda\mu}^{v} \theta^{\alpha}(X_v) = 0,$$

故

$$\mathrm{d}\theta^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{r} \left(\frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^{r} A_{\gamma\beta}^{\alpha} \theta^{\gamma} + \sum_{\lambda=r+1}^{m} A_{\lambda\beta}^{\alpha} \theta^{\lambda} \right) \wedge \theta^{\beta},$$

即(3.13)式成立. 证毕.

通常,我们把条件(3.10)(或(3.11))称为 Pfaff 方程组(3.1)所满足的 Frobenius **条件**. 根据第三章的定理 3.3 以及上面的证明,我们还可以有稍微强一点的结果:

推论 3.3　若 Pfaff 方程组(3.1)满足 Frobenius 条件,则在每一点 $p \in U$ 存在局部坐标系$(V; x^i)$,$V \subset U$,使得 Pfaff 方程组(3.1)在 V 上等价于方程组

$$\mathrm{d}x^{\alpha} = 0, \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant r. \tag{3.18}$$

Pfaff 方程组(3.7)满足 Frobenius 条件的意思是系数 C_λ^α 满足条件

$$\frac{\partial C_\lambda^\alpha}{\partial x^\mu} - \frac{\partial C_\mu^\alpha}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial C_\lambda^\alpha}{\partial x^\beta} C_\mu^\beta + \frac{\partial C_\mu^\alpha}{\partial x^\beta} C_\lambda^\beta = 0. \tag{3.19}$$

实际上,对(3.7)式求外微分得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta^{\alpha} &= \sum_{\lambda=r+1}^{m} \mathrm{d}C_\lambda^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\lambda \\
&= \left(\frac{\partial C_\lambda^\alpha}{\partial x^\beta} \mathrm{d}x^\beta + \frac{\partial C_\lambda^\alpha}{\partial x^\mu} \mathrm{d}x^\mu \right) \wedge \mathrm{d}x^\lambda \\
&= \left(\frac{\partial C_\lambda^\alpha}{\partial x^\beta} (\theta^\beta - C_\mu^\beta \mathrm{d}x^\mu) + \frac{\partial C_\lambda^\alpha}{\partial x^\mu} \mathrm{d}x^\mu \right) \wedge \mathrm{d}x^\lambda \\
&= \theta^\beta \wedge \left(\sum_\lambda \frac{\partial C_\lambda^\alpha}{\partial x^\beta} \theta^\lambda \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu} \left(\frac{\partial C_\lambda^\alpha}{\partial x^\mu} - \frac{\partial C_\mu^\alpha}{\partial x^\lambda} - \sum_\beta \frac{\partial C_\lambda^\alpha}{\partial x^\beta} C_\mu^\beta + \sum_\beta \frac{\partial C_\mu^\alpha}{\partial x^\beta} C_\lambda^\beta \right) \theta^\mu \wedge \theta^\lambda.
\end{aligned}$$

由于$\{\theta^i\}$是余切标架场,所以条件

$$\mathrm{d}\theta^\alpha \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(\theta^1, \cdots, \theta^r)$$

成立的充分必要条件是在 V 内成立(3.19)式. 对照第三章的定理 4.4,不难发现条件(3.19)恰好是一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\lambda} = -C_\lambda^\alpha(x^1, \cdots, x^m), \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r, \quad r+1 \leqslant \lambda \leqslant m \tag{3.20}$$

的可积条件，而方程组(3.20) 是 Pfaff 方程组(3.7) 的另一个表达形式(参看例 1).

下面我们叙述定理 3.2 中充分性的一个直接证明. 它是 E. Cartan 给出的，有助于我们熟悉外微分理论. 由于 Pfaff 方程组和一阶偏微分方程组的上述联系，实际上我们所给出的将是第三章定理 4.4 的另一个证明.

定理 3.2 **的充分性的直接证明.** 考虑 Pfaff 方程组

$$\theta^\alpha \equiv \mathrm{d}x^\alpha + \sum_{\lambda=r+1}^{m} C_\lambda^\alpha \mathrm{d}x^\lambda = 0, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r, \tag{3.7$'$}$$

它满足 Frobenius 条件

$$\mathrm{d}\theta^\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} \tilde{\varphi}_\beta^\alpha \wedge \theta^\beta, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r. \tag{3.13$'$}$$

任意取定一点$(x_0^i) \in V$，在$(x^{r+1},\cdots,x^m)$ 的空间中考虑从点(x_0^λ) 出发的射线

$$x^\lambda = x_0{}^\lambda + t \cdot a^\lambda, \tag{3.21}$$

其中 a^λ 是常数，满足条件 $\sum\limits_{\lambda=r+1}^{m} (a^\lambda)^2 = 1$.

将(3.21) 式代入(3.7)$'$，得到

$$\mathrm{d}x^\alpha + \sum_\lambda C_\lambda^\alpha(x^\beta, x_0{}^\mu + ta^\mu) \cdot a^\lambda \mathrm{d}t = 0, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r,$$

它等价于常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} = -\sum_\lambda C_\lambda^\alpha(x^\beta, x_0{}^\mu + ta^\mu) \cdot a^\lambda, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r. \tag{3.22}$$

方程组(3.22) 有经过已知点(x_0^i) 的唯一解

$$x^\alpha = f^\alpha(t, a^{r+1}, \cdots, a^m), \tag{3.23}$$

即

$$f^\alpha(0, a^{r+1}, \cdots, a^m) = x_0^\alpha, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r. \tag{3.24}$$

让$(a^{r+1},\cdots,a^m)$ 取遍单位球面上所有的点，则函数组(3.23) 给出一个 $h = m - r$ 维子流形，我们要证明它是方程组(3.7)$'$ 的、经过点(x_0^i) 的积分流形.

不妨设 $a^m \neq 0$，于是可以把$(t, a^{r+1}, \cdots, a^{m-1})$ 作为该 h 维子流形上的局部坐标系. 由于 $\sum\limits_\lambda (a^\lambda)^2 = 1$. 故 $da^m = -\frac{1}{a^m}\sum\limits_{b=r+1}^{m-1} a^b da^b$. 将(3.21) 与(3.23) 式代入(3.7)$'$ 式，由于函数 f^α 满足方程组(3.22)，故有

$$\begin{aligned}\theta^\alpha &= \mathrm{d}f^\alpha + \sum_\lambda C_\lambda^\alpha(t\mathrm{d}a^\lambda + a^\lambda \mathrm{d}t) \\ &= \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial a^\lambda} + tC_\lambda^\alpha\right) da^\lambda + \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial t} + C_\lambda^\alpha a^\lambda\right) \mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= P_\lambda^\alpha(t,a)\mathrm{d}a^\lambda$$

$$= \sum_{b=r+1}^{m-1} \widetilde{P}_b^\alpha(t,a)\mathrm{d}a^b, \tag{3.25}$$

其中

$$P_\lambda^\alpha(t,a) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial a^\lambda} + tC_\lambda^\alpha, \qquad r+1 \leqslant \lambda \leqslant m$$

$$\widetilde{P}_b^\alpha(t,a) = P_b^\alpha(t,a) - \frac{a^b}{a^m}P_m^\alpha(t,a), \quad r+1 \leqslant b \leqslant m-1.$$

我们要证明 $\widetilde{P}_b^\alpha(t,a) \equiv 0$.

假定 1 次微分式 $\widetilde{\varphi}_\beta$ 在上述 h 维子流形上的限制有表达式

$$\widetilde{\varphi}_\beta = Q_\beta^\alpha(t,a)\mathrm{d}t + \sum_b Q_{\beta b}^\alpha(t,a)\mathrm{d}a^b. \tag{3.26}$$

将(3.25) 和(3.26) 式代入 Frobenius 条件(3.13)′ 式得到

$$\left(\frac{\partial \widetilde{P}_b^\alpha}{\partial a^c}\mathrm{d}a^c + \frac{\partial \widetilde{P}_b^\alpha}{\partial t}\mathrm{d}t\right) \wedge \mathrm{d}a^b$$

$$= (Q_\beta^\alpha \mathrm{d}t + Q_{\beta c}^\alpha \mathrm{d}a^c) \wedge \widetilde{P}_b^\beta \mathrm{d}a^b.$$

比较两边含有 $\mathrm{d}t$ 的项得到

$$\frac{\partial \widetilde{P}_b^\alpha}{\partial t} = \sum_\beta Q_\beta^\alpha \widetilde{P}_B^\beta, \tag{3.27}$$

可见 $\widetilde{P}_b^\alpha$ 作为 t 的函数满足一阶线性齐次方程组. 当 $t=0$ 时, $f^\alpha(0,a^{r+1},\cdots,a^m) = x_0^\alpha$ 与 a^λ 无关,因此

$$\widetilde{P}_b^\alpha(0,a) = \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial a^b} + tC_b^\alpha\right)\Big|_{t=0} - \frac{a^b}{a^m}\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial a^m} + tC_m^\alpha\right)\Big|_{t=0}$$

$$= 0.$$

故由方程组(3.27) 的解的唯一性得知 $\widetilde{P}_b^\alpha$ 必定是平凡解,即 $\widetilde{P}_b^\alpha(t,a) \equiv 0$. 这样,当 1 次微分式 θ^α 限制在 h 维子流形(3.23) 上时恒为零,所以(3.23) 是 Pfaff 方程组(3.7)′ 的积分流形.

例 3 设

$$\theta = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \tag{3.28}$$

是定义在区域 $D \subset \mathbf{R}^3$ 上的 1 次微分式,处处不为零. 根据 Poincaré 引理(定理 2.5),如果 D 是圆球(或星形区域,或可缩区域),则当 $\mathrm{d}\theta = 0$ 时 θ 必能写成一个函数的微分, $\theta = \mathrm{d}f$. 我们考虑稍微广泛一点的问题:在什么条件下存在函数 $\lambda = \lambda(x,y,z)$,使得 $\lambda \cdot \theta$ 成为一个恰当微分式?这就是下面的微分方程(3.29) 的积分因子 λ 的存在性问题.

若存在函数 $\lambda \neq 0$,使得

$$\lambda \cdot \theta = \mathrm{d}f,$$

其中 f 是 D 上的光滑函数，则 Pfaff 方程

$$\theta = 0 \tag{3.29}$$

与

$$\mathrm{d}f = 0 \tag{3.30}$$

是等价的. 此时，$f(x,y,z) = c$ 就是 Pfaff 方程(3.29) 的 2 维积分流形，因此 Pfaff 方程(3.29) 是完全可积的. 反过来，如果 Pfaff 方程(3.29) 是完全可积的，则方程(3.29) 与(3.30) 等价，即有函数 λ，使得

$$\lambda\theta = \mathrm{d}f.$$

由此可见，全微分方程(3.29) 有积分因子的充分必要条件为它是完全可积的，因而根据定理 3.2 在 D 内有

$$\mathrm{d}\theta \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \theta.$$

根据第一章的定理 5.8，这等价于

$$\mathrm{d}\theta \wedge \theta \equiv 0. \tag{3.31}$$

将(3.31) 式展开，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta \wedge \theta = &\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \right.\\ &\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\right\} \wedge (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z)\\ = &\left\{P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\right.\\ &\left. + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 0.\end{aligned}$$

即在 D 上有

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0. \tag{3.32}$$

这就是方程(3.29) 有积分因子的条件.

§4 外微分法在几何中的应用

外微分和活动标架法结合在一起在微分几何学中有广泛的应用. E. Cartan 曾经系统地发展这种方法，将它用于各种几何问题；陈省身则继承和发扬这种方法，通过自己的出色工作使外微分和活动标架法成为几何学界公认的强有力手段. 在本节，我们以微分几何中的基本公式为例，说明外微分式和外微分的应用.

设 A^3 是一个 3 维仿射空间. 所谓 A^3 中的一个标架是指 A^3 中的一点 P 及伴随向量空间 V 中的一个基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 组成的总体 $\{P; e_1, e_2, e_3\}$. A^3 中全体标架的集合记为 $\mathscr{D}$.

根据仿射空间的定义，对于每一个 e_i，存在唯一的一点 P_i，使得 $\overrightarrow{PP_i} = e_i$.

所以标架$\{P;e_1,e_2,e_3\}$可以看成A^3中的以P为顶点的三棱形$P\text{-}P_1P_2P_3$.

若在V中指定了一个正定的内积,则A^3成为欧氏空间E^3,可以取$\{e_1,e_2,e_3\}$为V的单位正交基底.此时,称$\{P;e_1,e_2,e_3\}$为E^3中的单位正交标架.E^3中全体单位正交标架的集合记为$\mathscr{P}$,可以看作$\widetilde{\mathscr{P}}$的子集.

标架空间$\mathscr{P}$,$\widetilde{\mathscr{P}}$的重要性在于:$\mathscr{P}$的元素可以和E^3到它自身的等距变换等同起来(参看第一章 §1);同样,$\widetilde{\mathscr{P}}$的元素可以和A^3到它自身的仿射变换等同起来.按照 F. Klein 的观点,几何学的研究对象是在一定的变换群作用下保持不变的图形的性质.欧氏几何学是与等距变换群联系在一起的,而仿射几何学是与仿射变换群联系在一起的.标架空间$\mathscr{P}$和$\widetilde{\mathscr{P}}$分别是等距变换群和仿射变换群作为图形的一种表示,使得相应的变换群具体化、形象化,因此标架空间是十分重要的概念.

标架空间$\widetilde{\mathscr{P}}$是12维的光滑流形,它是$\mathbf{R}^{12}$的一个开子流形.实际上,若在$\widetilde{\mathscr{P}}$中取定一个元素$\{O;\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$,则$A^3$中任意一个标架$\{P;e_1,e_2,e_3\}$都可以表示为

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = a^1\delta_1 + a^2\delta_2 + a^3\delta_3, \\ e_1 = a_1^1\delta_1 + a_1^2\delta_2 + a_1^3\delta_3, \\ e_2 = a_2^1\delta_1 + a_2^2\delta_2 + a_2^3\delta_3, \\ e_3 = a_3^1\delta_1 + a_3^2\delta_2 + a_3^3\delta_3, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中

$$\det(a_i^j) \neq 0. \tag{4.2}$$

反过来,任意一组数$a^i,a_i^j,\det(a_i^j)\neq 0$通过(4.1)式决定了$\widetilde{\mathscr{P}}$中的一个元素$\{P;e_1,e_2,e_3\}$.所以标架$\{P;e_1,e_2,e_3\}$与矩阵

$$\begin{pmatrix} a^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}, \quad \det(a_i^j) \neq 0$$

是一一对应的.因此,标架空间$\widetilde{\mathscr{P}}$等同于$\mathbf{R}^{12}$的开子集$\mathbf{R}^3\times \mathrm{GL}(3)$,其中$\mathrm{GL}(3)$是$3\times 3$非退化实矩阵的集合,故$\widetilde{\mathscr{P}}$是$\mathbf{R}^{12}$的开子流形,$a^i,a_i^j$给出了$\widetilde{\mathscr{P}}$中的坐标系.

当然,$\widetilde{\mathscr{P}}$中的坐标系不是唯一确定的.若在$\widetilde{\mathscr{P}}$中取定另一个标架$\{O';\delta'_1,\delta'_2,\delta'_3\}$,则在$\widetilde{\mathscr{P}}$上得到一个新的坐标系$\{a'^i,a'^j_i\}$.假定

$$\begin{cases}\overrightarrow{OO'} = \lambda^i\delta_i,\\ \delta'_i = \lambda_i^j\delta_j, \quad \det(\lambda_i^j) \neq 0,\end{cases} \tag{4.3}$$

则

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = (\lambda^i + a'^j\lambda_j^i)\delta_i,$$

$$e_i = a'^j_i\delta'_j = a'^j_i\lambda_j^k\delta_k,$$

所以坐标系$\{a^i, a_i^j\}$和$\{a'^i, a'^j_i\}$的变换公式是

$$\begin{cases}a^i = \lambda^i + a'^j\lambda_j^i,\\ a_i^j = a'^k_i\lambda_k^j.\end{cases} \tag{4.4}$$

从标架空间$\mathscr{P}$中看，微分dP, de_1, de_2, de_3无非是da^i, da_i^j，它们给出了$\mathscr{P}$上的余切标架场. 然而从仿射空间A^3的角度来看，dP, de_1, de_2, de_3是A^3中的切向量，所以它们能用基底$\{e_1, e_2, e_3\}$表示出来. 假定

$$\begin{cases}dP = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3,\\ de_1 = \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3,\\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 e_3,\\ de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3,\end{cases} \tag{4.5}$$

则ω^i, ω_i^j是$\mathscr{P}$上的一次微分式. 实际上，若设矩阵(a_i^j)的逆矩阵是(b_i^j)，则b_i^j是a_i^j的有理分式，即

$$b_i^j = \frac{A_j^i}{\det(a_k^l)}, \tag{4.6}$$

其中A_j^i表示在行列式$\det(a_k^l)$中元素a_j^i的代数余子式. 于是

$$dP = da^i\delta_i = da^i b_i^j e_j,$$

$$de_i = da_i^k\delta_k = da_i^k b_k^j e_j,$$

所以

$$\begin{cases}\omega^i = b_k^i da^k,\\ \omega_i^j = b_k^j da_i^k.\end{cases} \tag{4.7}$$

由此可见，$\{\omega^i, \omega_i^j\}$也是$\mathscr{P}$上的余切标架场；它与$\{da^i, da_i^j\}$不同的是，它不依赖于A^3中固定的标架$\{O;\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$的选取. 事实上，若对(4.4)式求微分，得到

$$\begin{cases}da^i = \lambda_j^i da'^j,\\ da_j^i = \lambda_k^i da'^k_j.\end{cases}$$

用(b'^j_i)表示矩阵(a'^j_i)的逆矩阵，则由(4.4)得到

$$b'^i_k = \lambda_k^j b_j^i,$$

所以

$$\begin{cases} \omega^i = b^i_k \mathrm{d}a^k = b^i_k \lambda^k_j \mathrm{d}a'^j = b'^i_j \mathrm{d}a'^j, \\ \omega^j_i = b^j_k \mathrm{d}a^k_i = b^j_k \lambda^k_l \mathrm{d}a'^l_i = b'^j_k \mathrm{d}a'^k_i. \end{cases}$$

我们把 ω^i, ω^j_i 称为 A^3 中活动标架的**相对分量**.

分别将 P, e_i 看成$\widetilde{\mathscr{P}}$上的坐标函数 a^j, a^j_i 的数组，即 $P = (a^1, a^2, a^3), e_i = (a^1_i, a^2_i, a^2_i)$，对(4.5)式求外微分，得到

$$0 = \mathrm{d}(\mathrm{d}P) = \mathrm{d}(\omega^i e_i)(\mathrm{d}\omega^i - \omega^j \wedge \omega^i_j)e_i,$$

$$0 = \mathrm{d}(\mathrm{d}e_i) = \mathrm{d}(\omega^j_i e_j)(\mathrm{d}\omega^j_i - \omega^k_i \wedge \omega^j_k)e_j,$$

所以

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \\ \mathrm{d}\omega^j_i = \omega^k_i \wedge \omega^j_k. \end{cases} \tag{4.8}$$

它们称为仿射空间 A^3 的**结构方程**. 若对(4.7)式直接求外微分，也能得到这组同样的方程.

实际上，从(4.7)式得到

$$\mathrm{d}\omega^i = \mathrm{d}b^i_k \wedge \mathrm{d}a^k,$$

$$\mathrm{d}\omega^j_i = \mathrm{d}b^j_k \wedge \mathrm{d}a^k_i.$$

但是

$$b^j_k a^k_i = \delta^j_i,$$

故

$$0 = \mathrm{d}(b^j_k a^k_i) = \mathrm{d}b^j_k \cdot a^k_i + b^j_k \mathrm{d}a^k_i,$$

$$\mathrm{d}b^j_k = - b^j_l \mathrm{d}a^l_i b^i_k.$$

将上式代入 $\mathrm{d}\omega^i, \mathrm{d}\omega^j_i$ 的表达式得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega^i &= - b^i_l \mathrm{d}a^l_h b^h_k \wedge \mathrm{d}a^k \\ &= - \omega^i_h \wedge \omega^h = \omega^h \wedge \omega^i_h, \\ \mathrm{d}\omega^j_i &= - b^j_l \mathrm{d}a^l_h b^h_k \wedge \mathrm{d}a^k_i \\ &= - \omega^j_h \wedge \omega^h_i = \omega^h_i \wedge \omega^j_h. \end{aligned}$$

这正好是(4.8)式.

前面已经提到过，单位正交标架空间 $\mathscr{P}$ 可以看成$\widetilde{\mathscr{P}}$ 的子集，用 $i: \mathscr{P} \to \widetilde{\mathscr{P}}$ 记包含映射. 假设固定标架 $\{O; \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ 是单位正交标架，那么

$$\sum_{k=1}^{3} (a^k_i \circ i)(a^k_j \circ i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 3. \tag{4.9}$$

因此 $\mathscr{P}$ 可以和 $\mathbf{R}^3 \times \mathrm{O}(3)$ 等同起来，它是$\widetilde{\mathscr{P}}$ 的 6 维嵌入子流形(第二章，§5，3°).

对(4.9)式求微分得到

$$i^*(a_j^k \mathrm{d}a_i^k) + i^*(a_i^k \mathrm{d}a_j^k) = 0,$$

即

$$i^*\omega_i^j + i^*\omega_j^i = 0. \tag{4.10}$$

因此，将 ω^i, ω_i^j 经过映射 i 拉回到 $\mathscr{P}$ 得到 6 个 1 次微分式

$$\begin{aligned} &i^*\omega^1, \quad i^*\omega^2, \quad i^*\omega^3, \\ &i^*\omega_1^2 = -i^*\omega_2^1, \quad i^*\omega_1^3 = -i^*\omega_3^1, \quad i^*\omega_2^3 = -i^*\omega_3^2, \end{aligned} \tag{4.11}$$

它们构成 $\mathscr{P}$ 上的余切标架场，称为 E^3 中活动标架的相对分量.

事实上，如果用 $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ 表示单位正交标架，设 $\overrightarrow{OP} = a^i\delta_i, e_i = a_i^j\delta_j$，那么 $(a_i^j) \in O(3)$，因而 (a_i^j) 的逆矩阵就是它的转置，故

$$b_i^j = a_j^i.$$

因此 E^3 中活动标架的相对分量是

$$\begin{cases} \omega^i = \sum\limits_k a_i^k \mathrm{d}a^k, \\ \omega_i^j = \sum\limits_k a_j^k \mathrm{d}a_i^k \end{cases} \tag{4.7$'$}$$

（这里省略了记号 i^*）. 由于 $\sum\limits_k a_j^k a_i^k = \delta_{ij}$，故直接微分得到

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0,$$

此即(4.10)式.

由于诱导映射 i^* 与外积、外微分都是可交换的，因此在 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 上相对分量所满足的公式在 $\mathscr{P}$ 上仍然成立. 特别是，E^3 的结构方程为

$$\begin{cases} \mathrm{d}(i^*\omega^i) = i^*\omega^j \wedge i^*\omega_j^i, \\ \mathrm{d}(i^*\omega_i^j) = i^*\omega_i^k \wedge i^*\omega_k^j. \end{cases} \tag{4.12}$$

为记号简洁起见，今后省掉记号 i^* 不写. 考虑到在空间 $\mathscr{P}$ 上相对分量 ω_i^j 关于指标 i, j 的反对称性，(4.12) 的第二组方程只是

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega_1^2 = -\omega_1^3 \wedge \omega_2^3, \\ \mathrm{d}\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3, \\ \mathrm{d}\omega_2^3 = -\omega_1^2 \wedge \omega_1^3. \end{cases} \tag{4.13}$$

(4.13) 式也可以通过对(4.7)$'$ 式直接求外微分得到.

因为向量空间 V 有两个定向，相应地，E^3 中的标架分为右手标架和左手标架两种. 假定 $\{O; \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ 是右手标架，则 $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ 是右手标架还是左手标架视行列式 $\det(a_i^j)$ 的值为正还是负而定. 很明显，按这种规则，空间 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 和 $\mathscr{P}$ 分别有两个连通分支.

在用活动标架研究空间 E^3 的几何时，通常对所研究的图形的每一点附加上一个标架，从而使 E^3 中的图形成为 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 中的子集. 例如，设 U 是 E^3 中一个开

区域,其中有曲纹坐标(u^1,u^2,u^3),于是

$$r=\overrightarrow{OP}=a^i(u^1,u^2,u^3)\delta_i, \tag{4.14}$$

$a^i(u^1,u^2,u^3)$ 是 u^1,u^2,u^3 的光滑函数. 令

$$r_i=\frac{\partial r}{\partial u^i}=\frac{\partial a^j}{\partial u^i}\delta_j, \tag{4.15}$$

则在 U 上有光滑的自然标架场$\{r;r_1,r_2,r_3\}$. 令

$$g_{ij}=r_i\cdot r_j=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial a^k}{\partial u^i}\frac{\partial a^k}{\partial u^j},\quad 1\leqslant i,j\leqslant 3, \tag{4.16}$$

它们是自然标架的度量系数. 在第一章 §3 已算出

$$\frac{\partial r_i}{\partial u^j}=\Gamma_{ij}^k r_k, \tag{4.17}$$

其中

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right). \tag{4.18}$$

(参看第一章 §3,(3.17) 式). 因此

$$\begin{cases} \mathrm{d}r=r_i\mathrm{d}u^i, \\ \mathrm{d}r_i=\dfrac{\partial r_i}{\partial u^j}\mathrm{d}u^j=\Gamma_{ij}^k\mathrm{d}u^j r_k, \end{cases} \tag{4.19}$$

按照我们现在的记号则有

$$\begin{cases} \omega^i=\mathrm{d}u^i, \\ \omega_i^k=\Gamma_{ij}^k\mathrm{d}u^j. \end{cases} \tag{4.20}$$

由于 $\Gamma_{ji}^k=\Gamma_{ij}^k$,故直接验证得到

$$\mathrm{d}\omega^i-\omega^j\wedge\omega_j^i=-\Gamma_{jk}^i\mathrm{d}u^j\wedge\mathrm{d}u^k=0.$$

另外,由(4.8) 的第二式得到

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\omega_i^j-\omega_i^k\wedge\omega_k^j \\ =&\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial u^l}\mathrm{d}u^l\wedge\mathrm{d}u^k-\Gamma_{ik}^h\Gamma_{hl}^j\mathrm{d}u^k\wedge\mathrm{d}u^l \\ =&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial u^l}-\frac{\partial\Gamma_{il}^j}{\partial u^k}+\Gamma_{ik}^h\Gamma_{hl}^j-\Gamma_{il}^h\Gamma_{hk}^j\right)\mathrm{d}u^l\wedge\mathrm{d}u^k=0, \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial u^l}-\frac{\partial\Gamma_{il}^j}{\partial u^k}+\Gamma_{ik}^h\Gamma_{hl}^j-\Gamma_{il}^h\Gamma_{hk}^j=0. \tag{4.21}$$

对照第五章(3.2) 式可知 U 上的曲率张量 R_{ilk}^j 恒为零. 当然,若用(4.16),(4.17) 代入(4.21) 的左边,也能得到上面的恒等式.

如果将自然标架场$\{r;r_1,r_2,r_3\}$ 作 Schmidt 正交化,则得定义在 U 上的单位正交标架场$\{r;e_1,e_2,e_3\}$,其中

$$e_1 = \frac{r_1}{|r_1|} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} r_1,$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}(g_{11}r_2 - g_{12}r_1),$$

$$e_3 = e_1 \times e_2.$$

一般的单位正交标架场与上述标架场至多逐点差一个正交变换.

现在假定 $r: D(\subset \mathbf{R}^2) \to \mathbf{R}^3$ 是一张正则曲面,记 D 内的直角坐标为 u^1, u^2. 令

$$r_\alpha = \frac{\partial r}{\partial u^\alpha}, \quad \alpha = 1,2, \tag{4.22}$$

则 $r_1 \times r_2 \neq 0$. 设

$$n = \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|}, \tag{4.23}$$

则得到沿曲面定义的自然标架场$\{r; r_1, r_2, n\}$,其中 r_1, r_2 是曲面的切向量,n 是曲面的单位法向量. 令

$$g_{\alpha\beta} = r_\alpha \cdot r_\beta, \quad 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 2, \tag{4.24}$$

则通过计算可得

$$\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma r_\gamma + b_{\alpha\beta} n, \tag{4.25}$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma &= \frac{1}{2} g^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta}\right), \\ b_{\alpha\beta} &= \frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot n. \end{aligned} \tag{4.26}$$

由此得到这个依赖 2 个参数的标架场的相对分量是

$$\begin{aligned} &\omega^\alpha = \mathrm{d}u^\alpha, \quad \omega^3 = 0, \\ &\omega_\alpha^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathrm{d}u^\beta, \quad \omega_\alpha^3 = b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\beta, \\ &\omega_3^\alpha = -g^{\alpha\beta}\omega_\beta^3 = -g^{\alpha\gamma}b_{\gamma\beta}\mathrm{d}u^\beta, \quad \omega_3^3 = 0. \end{aligned} \tag{4.27}$$

注意到曲面的第一基本形式是

$$I = \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}r = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha \mathrm{d}u^\beta,$$

它的第二基本形式是

$$II = \mathrm{d}^2 r \cdot n = -\mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}n = b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha \mathrm{d}u^\beta,$$

而自然标架场的相对分量(4.27)是由曲面的两个基本形式完全确定的. 将曲面的自然标架场看成是在标架空间$\mathscr{F}$中的嵌入,所以结构方程(4.8)限制在曲面上时仍然成立. 第一组方程是:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^3 \wedge \omega_3^\alpha \\ &= \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha du^\beta \wedge du^\gamma \\ &= \frac{1}{2}(\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha) du^\beta \wedge du^\gamma \\ &= 0, \\ d\omega^3 &= \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^3 + \omega^3 \wedge \omega_3^3 \\ &= b_{\alpha\beta} du^\alpha \wedge du^\beta \\ &= \frac{1}{2}(b_{\alpha\beta} - b_{\beta\alpha}) du^\alpha \wedge du^\beta \\ &= 0, \end{aligned}$$

它们没有给出更多的信息. 第二组方程是:

$$\begin{aligned} d\omega_\alpha^\beta &= \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \omega_\alpha^3 \wedge \omega_3^\beta, \\ d\omega_\alpha^3 &= \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^3. \end{aligned}$$

将它们展开, 第一式是

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta}{\partial u^\delta} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\delta}^\beta}{\partial u^\gamma} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \Gamma_{\delta\eta}^\beta - \Gamma_{\alpha\delta}^\eta \Gamma_{\gamma\eta}^\beta = g^{\beta\eta}(b_{\alpha\gamma} b_{\eta\delta} - b_{\alpha\delta} b_{\eta\gamma}), \tag{4.28}$$

这正好是曲面的 Gauss 方程. 第二式是

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta b_{\eta\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\eta b_{\eta\gamma}, \tag{4.29}$$

它们正好是曲面的 Codazzi 方程. 所以, 曲面的第一基本形式和第二基本形式的系数之间有密切的联系, 不是互相独立的.

至此, 曲面论基本定理可以归结为某个 Pfaff 方程组的完全可积性. 假定在区域 $U \subset \mathbf{R}^2$ 上给出两个 2 次微分式

$$\begin{aligned} \varphi &= g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \quad g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}, \\ \psi &= b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \quad b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}, \end{aligned}$$

其中矩阵 $(g_{\alpha\beta})$ 是正定的, 而且 $g_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ 满足 Gauss 方程(4.28) 和 Codazzi 方程(4.29). 根据已知的 $g_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ 以及(4.26) 式, 构造定义在空间 $U \times \mathscr{F}$ 上的 Pfaff 方程组:

$$\begin{cases} \theta^\alpha \equiv \omega^\alpha - du^\alpha = 0, \\ \theta^3 \equiv \omega^3 = 0, \\ \theta_\alpha^\beta \equiv \omega_\alpha^\beta - \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta du^\gamma = 0, \\ \theta_\alpha^3 \equiv \omega_\alpha^3 - b_{\alpha\gamma} du^\gamma = 0, \\ \theta_3^\alpha \equiv \omega_3^\alpha + g^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma} du^\gamma = 0, \\ \theta_3^3 \equiv \omega_3^3 = 0, \end{cases} \tag{4.30}$$

其中 ω^i, ω^j 是在 $\mathscr{F}$ 上由(4.7) 式定义的 1 次微分式. 这是 14 维空间 $U \times \mathscr{F}$ 上

由 12 个方程构成的 Pfaff 方程组，其中 u^1,u^2 是自变量，a^i,a_i^j 是未知函数. 由于 $\mathscr{F}$ 上的相对分量 ω^i,ω_i^j 满足结构方程(4.8)，并且 $g_{\alpha\beta},b_{\alpha\beta}$ 满足 Gauss-Codazzi 方程(4.28) 和(4.29)，因此

$$\begin{aligned}
d\theta^\alpha &= d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^3 \wedge \omega_3^\alpha \\
&= (\omega^\beta - du^\beta) \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^3 \wedge \omega_3^\alpha + du^\beta \wedge (\omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha du^\gamma) \\
&= \theta^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \theta^3 \wedge \omega_3^\alpha + du^\beta \wedge \theta_\beta^\alpha,
\end{aligned}$$

同理，我们有

$$\begin{aligned}
d\theta^3 &= \theta^\alpha \wedge \omega_\alpha^3 + du^\alpha \wedge \theta_\alpha^3 + \theta^3 \wedge \omega_3^3, \\
d\theta_\alpha^\beta &= \theta_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \Gamma_{\alpha\delta}^\gamma du^\delta \wedge \theta_\gamma^\beta + \theta_\alpha^3 \wedge \omega_3^\beta + b_{\alpha\delta} du^\delta \wedge \omega_3^\beta, \\
d\theta_\alpha^3 &= \theta_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^3 + \Gamma_{\alpha\delta}^\beta du^\delta \wedge \theta_\beta^3 + \omega_\alpha^3 \wedge \theta_3^3, \\
d\theta_3^\alpha &= \theta_3^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha - g^{\beta\delta} b_{\delta\gamma} du^\gamma \wedge \theta_\beta^\alpha + \theta_3^3 \wedge \omega_3^\alpha, \\
d\theta_3^3 &= \theta_3^\alpha \wedge \omega_\alpha^3 - g^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma} du^\gamma \wedge \theta_\alpha^3 + \theta_3^3 \wedge \omega_3^3.
\end{aligned}$$

由此可见，方程组(4.30) 满足 Frobenius 条件. 根据定理 3.2，在 $U \times \mathscr{F}$ 中存在一个 2 维子流形，即在 $\mathscr{F}$ 中有一个依赖两个参数的标架族 $a^i = a^i(u^1,u^2)$，$a_i^j = a_i^j(u^1,u^2)$，使得它以(4.27) 为其相对分量. 在适当取初始值之后，该标架族的原点在 E^3 中描出以 φ,ψ 为第一基本形式和第二基本形式的曲面.

§5　外微分式的积分和 Stokes 定理

本节的目的是在 m 维有向光滑流形 M 上定义 m 次外微分式的积分. 实质上该积分是 m 重黎曼积分，关键是如何进行大范围的、与局部坐标系的选取无关的处理. 积分是把流形的局部性质和整体性质联系起来的有力手段，在理论上有很多应用. 本节的最后部分要把外微分式通过积分看作 M 的下链群上的线性函数，从而建立了 deRham 上同调群与 M 的奇异上同调群的联系. 在这里，Stokes 定理起着关键的作用.

假定 M 是满足第二可数公理的 m 维有向光滑流形. 设 $\omega \in A^r(M)$，ω 的**支撑集**定义为

$$\operatorname{Supp}\omega = \overline{\{p \in M : \omega(p) \neq 0\}}. \tag{5.1}$$

M 上全体有紧致支撑集的 r 次外微分式的集合记作 $A_0{}^r(M)$. 我们要定义的积分 $\int_M$ 是指线性映射

$$\int_M : A_0{}^m(M) \to \mathbf{R}.$$

先对特殊的外微分式 ω 定义 $\int_M \omega$. 设 $\omega \in A_0{}^m(M)$，并且有 M 的一个定向相

符的坐标卡(U,φ)，使得 $\mathrm{Supp}\omega\subset U$. 这样

$$\omega|_{M\setminus U}=0,\quad \omega|_U=a\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m,\tag{5.2}$$

其中 $a\in C^\infty(U)$，$\mathrm{Supp}a=\mathrm{Supp}\omega\subset U$，$\{x^i\}$ 是 U 上由坐标映射 φ 决定的局部坐标系. 因为 $\mathrm{Supp}a$ 是紧致的，故 m 重黎曼积分

$$\int_{\varphi(U)}(a\circ\varphi^{-1})\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^m$$

是一个有限的数值. 因此我们规定

$$\int_M\omega=\int_{\varphi(U)}(a\circ\varphi^{-1})\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^m.\tag{5.3}$$

值得指出的是，在写出(5.3)式右端的 m 重积分时，要求局部坐标系$(U;x^i)$的定向与 M 的定向是一致的.

上面的定义与定向相符的坐标卡(U,φ)的选取无关. 设(V,ψ)是另一个定向相符的坐标卡，使得 $\mathrm{Supp}\omega\subset V$. 设$\{y^i\}$是 V 上由坐标映射 ψ 给出的局部坐标系，则

$$\omega|_{M\setminus V}=0,$$
$$\omega|_V=b\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^m,$$

其中 $b\in C^\infty(V)$，$\mathrm{Supp}\,b=\mathrm{Supp}\,\omega\subset V$. 于是，在 $U\cap V$ 上有

$$\begin{aligned}&a\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m\\&=b\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^m\\&=b\cdot\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m,\end{aligned}$$

故

$$a\circ\varphi^{-1}=((b\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ\varphi^{-1}))\cdot\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}.\tag{5.4}$$

由于(U,φ)，(V,ψ)是 M 的定向相符的坐标卡，故坐标变换 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}>0.\tag{5.5}$$

根据重积分的变量替换公式和(5.4)，(5.5)式，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\psi(V)}(b\circ\psi^{-1})\mathrm{d}y^1\cdots\mathrm{d}y^m=\int_{\psi(U\cap V)}(b\circ\psi^{-1})\mathrm{d}y^1\cdots\mathrm{d}y^m\\&=\int_{\varphi(U\cap V)}((b\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ\varphi^{-1}))\cdot\left|\frac{\partial(y^1,\cdots,y^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\right|\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^m\\&=\int_{\varphi(U\cap V)}(a\circ\varphi^{-1})\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^m=\int_{\varphi(U)}(a\circ\varphi^{-1})\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^m.\end{aligned}\tag{5.6}$$

当 ω 是零微分式时，由定义式(5.3)得到

$$\int_M \omega = 0. \tag{5.7}$$

现在考虑一般情形，设 $\omega \in A_0^m(M)$. 取 M 的定向相符的坐标卡集 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$，使得 $\{U_\alpha\}$ 构成 M 的局部有限开覆盖，在 U_α 上由 φ_α 决定的局部坐标系为 $\{x_\alpha^i\}$，设

$$\omega|_{U_\alpha} = a_\alpha \mathrm{d}x_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_\alpha^m, \tag{5.8}$$

其中 $a_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$.

根据单位分解定理(第二章 §2，定理 2.7)，在 M 上有从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解 $\{h_\alpha\}$，其中 $\mathrm{Supp}h_\alpha \subset U_\alpha, h_\alpha \in C^\infty(M), h_\alpha \geqslant 0, \sum_\alpha h_\alpha = 1$，因此

$$\omega = \omega \cdot \sum_\alpha h_\alpha = \sum_\alpha (h_\alpha \cdot \omega), \tag{5.9}$$

其中 $h_\alpha \cdot \omega \in A_0^m(M)$，并且

$$\mathrm{Supp}(h_\alpha \cdot \omega) = \mathrm{Supp}h_\alpha \cap \mathrm{Supp}\omega \subset U_\alpha \cap \mathrm{Supp}\omega.$$

由于 $\mathrm{Supp}\omega$ 是紧致的，故 $\mathrm{Supp}\omega$ 与局部有限开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中至多有限多个成员相交，因此(5.9)式的右端至多是有限多项的和. 另外，(5.9)式右端的每一项 $h_\alpha \cdot \omega$ 的支撑集 $\mathrm{Supp}(h_\alpha \cdot \omega)$ 包含在坐标域 U_α 内，故(5.3)式可用于 $h_\alpha \cdot \omega$ 得到数值 $\int_M h_\alpha \cdot \omega$. 这样，利用映射 $\int_M$ 的线性性质，令

$$\int_M \omega = \int_M \sum_\alpha h_\alpha \cdot \omega = \sum_\alpha \int_M h_\alpha \cdot \omega = \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} ((h_\alpha \cdot a_\alpha) \circ \varphi_\alpha^{-1}) \mathrm{d}x_\alpha^1 \cdots \mathrm{d}x_\alpha^m. \tag{5.10}$$

我们要证明：(5.10)式右端的值与光滑流形 M 的定向相符的局部有限坐标覆盖 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 的选取无关，与从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解 $\{h_\alpha\}$ 的选取也无关.

为此，设 $\{(V_\lambda, \psi_\lambda)\}$ 是 M 的另一个定向相符的坐标卡集，使得 $\{V_\lambda\}$ 是 M 的局部有限的开覆盖，并且 $\{g_\lambda\}$ 是从属于 $\{V_\lambda\}$ 的单位分解. 假定坐标映射 ψ_λ 在 V_λ 上决定的局部坐标系为 $\{y_\lambda^i\}$，并设

$$\omega|_{V_\lambda} = b_\lambda \mathrm{d}y_\lambda^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_\lambda^m, \tag{5.11}$$

其中 $b_\lambda \in C^\infty(V_\lambda)$. 当 $U_\alpha \cap V_\lambda \neq 0$ 时，在 $U_\alpha \cap V_\lambda$ 上有两个局部坐标系 $\{x_\alpha^i\}$ 和 $\{y_\lambda^i\}$. 因为它们的定向都是和 M 的定向相符的，故

$$\frac{\partial(y_\lambda^1, \cdots, y_\lambda^m)}{\partial(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^m)} > 0.$$

比较(5.8)和(5.11)两式得到，在 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\lambda)$ 上有

$$a_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} = ((b_\lambda \circ \psi_\lambda^{-1}) \circ (\psi_\lambda \circ \varphi_\alpha^{-1})) \cdot \frac{\partial(y_\lambda^1, \cdots, y_\lambda^m)}{\partial(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^m)}.$$

由于 $\{h_\alpha\}$ 是单位分解，故

$$\left(\sum_{\alpha} h_{\alpha}\right)\Big|_{V_{\lambda}} = 1,$$

所以

$$\sum_{\lambda} \int_{\psi_{\lambda}(V_{\lambda})} ((g_{\lambda} \cdot b_{\lambda}) \circ \psi_{\lambda}^{-1}) \cdot \mathrm{d}y_{\lambda}^{1} \cdots \mathrm{d}y_{\lambda}^{m}$$

$$= \sum_{\lambda} \int_{\psi_{\lambda}(V_{\lambda})} \left(\sum_{\alpha} h_{\alpha} \circ \psi_{\lambda}^{-1}\right) \cdot ((g_{\lambda} \cdot b_{\lambda}) \circ \psi_{\lambda}^{-1}) \cdot \mathrm{d}y_{\lambda}^{1} \cdots \mathrm{d}y_{\lambda}^{m}$$

$$= \sum_{\lambda} \sum_{\alpha} \int_{\psi_{\lambda}(V_{\lambda})} ((h_{\alpha} \cdot g_{\lambda} \cdot b_{\lambda}) \circ \psi_{\lambda}^{-1}) \cdot \mathrm{d}y_{\lambda}^{1} \cdots \mathrm{d}y_{\lambda}^{m},$$

其中 $\mathrm{Supp}(g_{\lambda} \cdot b_{\lambda})$ 是紧致的，故上式关于 α 也是有限项的和. 又因为

$$\mathrm{Supp}(h_{\alpha} \cdot g_{\lambda} \cdot b_{\lambda}) \subset U_{\alpha} \cap V_{\lambda},$$

利用(5.6)式得到

$$\sum_{\lambda} \int_{\psi_{\lambda}(V_{\lambda})} ((g_{\lambda} \cdot b_{\lambda}) \circ \psi_{\lambda}^{-1}) \cdot \mathrm{d}y_{\lambda}^{1} \cdots \mathrm{d}y_{\lambda}^{m}$$

$$= \sum_{\lambda,\alpha} \int_{\psi_{\lambda}(V_{\lambda} \cap U_{\alpha})} ((h_{\alpha} \cdot g_{\lambda} \cdot b_{\lambda}) \circ \psi_{\lambda}^{-1}) \cdot \mathrm{d}y_{\lambda}^{1} \cdots \mathrm{d}y_{\lambda}^{m}$$

$$= \sum_{\lambda,\alpha} \int_{\varphi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap V_{\lambda})} ((g_{\lambda} \cdot h_{\alpha} \cdot a_{\alpha}) \circ \varphi_{\alpha}^{-1}) \cdot \mathrm{d}x_{\alpha}^{1} \cdots \mathrm{d}x_{\alpha}^{m}$$

$$= \sum_{\alpha} \int_{\varphi_{\alpha}(U_{\alpha})} \left(\sum_{\lambda} g_{\lambda} \circ \varphi_{\alpha}^{-1}\right) \cdot ((h_{\alpha} \cdot a_{\alpha}) \circ \varphi_{\alpha}^{-1}) \cdot \mathrm{d}x_{\alpha}^{1} \cdots \mathrm{d}x_{\alpha}^{m}$$

$$= \sum_{\alpha} \int_{\varphi_{\alpha}(U_{\alpha})} ((h_{\alpha} \cdot a_{\alpha}) \circ \varphi_{\alpha}^{-1}) \cdot \mathrm{d}x_{\alpha}^{1} \cdots \mathrm{d}x_{\alpha}^{m}.$$

由此可见，由(5.10)式定义的数值 $\int_{M} \omega$ 与坐标卡集 $\{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}$ 及单位分解 $\{h_{\alpha}\}$ 的选取是无关的.

定义 5.1　设 M 是满足第二可数公理的 m 维有向光滑流形，则对于任意的有紧致支撑集的 m 次外微分式 ω，由(5.10)所定义的数值 $\int_{M} \omega$ 称为 ω **在** M **上的积分**.

很明显，如果 $\omega, \eta \in A_{0}^{m}(M)$，$\lambda \in \mathbf{R}$，则

$$\int_{M} \omega + \eta = \int_{M} \omega + \int_{M} \eta,$$

$$\int_{M} \lambda \omega = \lambda \cdot \int_{M} \omega.$$

由此可见，映射 $\int_{M} : A_{0}^{m}(M) \to \mathbf{R}$ 是线性的. 我们把映射 $\int_{M}$ 称为**在** M **上的积分**.

若 M 是连通的光滑流形，则第二章 §6 告诉我们，在 M 上有两种定向. 将连通的有向光滑流形 M 的定向改为相反的定向，所得的有向光滑流形记作 M^-，则由积分的定义可知

$$\int_M \omega = -\int_{M^-} \omega, \quad \forall\, \omega \in A_0{}^m(M). \tag{5.12}$$

如果 $\omega \in A_0{}^r(M)(r < m)$，则能定义 ω 在 M 的 r 维有向子流形上的积分. 确切地说，设 N 是满足第二可数公理的 r 维有向光滑流形，$f: N \to M$ 是 M 的光滑嵌入子流形，则 $f^*\omega \in A_0{}^r(N)$，故积分 $\int_N f^*\omega$ 是有意义的，并记

$$\int_{f(N)} \omega = \int_N f^*\omega. \tag{5.13}$$

若 (f,N) 是 M 的浸入子流形，则(5.13)式右端仍然是有意义的.

关于外微分式的积分的基本定理是所谓的 Stokes 定理，它是微积分基本定理在高维情形的推广.

定理 5.1(Stokes 定理) 设 M 是满足第二可数公理的 m 维有向带边光滑流形，$\omega \in A_0{}^{m-1}(M)$，则

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} i^*\omega, \tag{5.14}$$

其中 ∂M 是第二章 §6 中所述的 $m-1$ 维光滑流形，具有从 M 诱导的定向. $i: \partial M \to M$ 是包含映射，使 $(i, \partial M)$ 成为 M 的嵌入子流形.

证明 设 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是 M 的定向相符的坐标卡集，使得 $\{U_\alpha\}$ 成为 M 的局部有限的开覆盖；$\{h_\alpha\}$ 是从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解，则

$$\omega = (\sum_\alpha h_\alpha) \cdot \omega = \sum_\alpha (h_\alpha \cdot \omega).$$

因为支撑集 $\mathrm{Supp}\omega$ 是紧致的，故 $\mathrm{Supp}\omega$ 只与 $\{U_\alpha\}$ 中有限多个成员相交，因此上式的末端只是有限多项的和，于是

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \sum_\alpha \int_M \mathrm{d}(h_\alpha \cdot \omega),$$

并且

$$\int_{\partial M} i^*\omega = \sum_\alpha \int_{\partial M} i^*(h_\alpha \cdot \omega).$$

所以，只要对于每一个 α 证明下式成立就可以了：

$$\int_M \mathrm{d}(h_\alpha \cdot \omega) = \int_{\partial M} i^*(h_\alpha \cdot \omega).$$

注意到此时外微分式 $h_\alpha \cdot \omega$ 的特性是

$$\mathrm{Supp}(h_\alpha \cdot \omega) \subset \mathrm{Supp}h_\alpha \cap \mathrm{Supp}\omega \subset U_\alpha,$$

即支撑集 $\mathrm{Supp}(h_\alpha\cdot\omega)$ 是紧致的，并且包含在坐标域 U_α 内. 这样，我们已经把问题归结为对于具有如下性质的 $m-1$ 次外微分式 ω 证明(5.14) 式：$\mathrm{Supp}\omega$ 是紧致的，并且存在 M 的定向相符的坐标卡 (U,φ)，使得 $\mathrm{Supp}\omega\subset U$.

令 $x^i(p)=(\varphi(p))^i, \forall\ p\in U$. 假定 ω 的局部坐标表达式是

$$\omega|_U=\sum_{j=1}^m(-1)^{j+1}a_j\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^j}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m, \tag{5.15}$$

其中 $a_j\in C^\infty(U)$，且 $\mathrm{Supp}a_j\subset U$. 它的外微分 $\mathrm{d}\omega$ 的表达式成为

$$\mathrm{d}\omega|_U=\left(\sum_{j=1}^m\frac{\partial a_j}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m. \tag{5.16}$$

下面分两种情形进行讨论.

(1) $U\cap\partial M=\varnothing$. 此时，

$$U\subset\mathrm{Int}M,\quad i^*\omega=0,$$

故(5.14) 式的右端为零. 我们的目标是证明(5.14) 式的左端也是零. 由于 $\mathrm{Supp}\omega$ 是紧的，故不妨设 $\varphi(U)\subset H^m$ 是有界的开区域，因此有充分大的 K，使得

$$\varphi(U)\subset H^m\cap C,$$

其中

$$C=\{(x^1,\cdots,x^m)\in\mathbf{R}^m: |x^i|\leqslant K,\forall\ i\}. \tag{5.17}$$

现在

$$\mathrm{Supp}(a_j\circ\varphi^{-1})\subset\varphi(U),$$

而 $\varphi(U)\backslash\mathrm{Supp}(a_j\circ\varphi^{-1})$ 是开集，所以可以让函数 $a_j\circ\varphi^{-1}$ 光滑地延拓到整个 $H^m\cap C$，使得它在 $\varphi(U)$ 外的值为零. 由于 $U\subset\mathrm{Int}M$，故

$$\mathrm{Supp}(a_j\circ\varphi^{-1})\subset\varphi(U)\subset\mathrm{Int}H^m,$$

所以扩充后的函数 $a_j\circ\varphi^{-1}$ 在 $H^m\cap C$ 的边界上皆取零值. 这样，对于 $1\leqslant j\leqslant m-1$ 有

$$\begin{aligned}&\int_{-K}^K\frac{\partial(a_j\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\\&=a_j\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^{j-1},K,x^{j+1},\cdots,x^m)\\&\quad-a_j\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^{j-1},-K,x^{j+1},\cdots,x^m)\\&=0.\end{aligned} \tag{5.18}$$

同时

$$\begin{aligned}&\int_0^K\frac{\partial(a_m\circ\varphi^{-1})}{\partial x^m}\mathrm{d}x^m\\&=a_m\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^{m-1},K)-a_m\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^{m-1},0)\end{aligned}$$

$$=0.$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_{\varphi(U)} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \right) dx^1 \cdots dx^m \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{H^m \cap C} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^m \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} \int_{\substack{|x^i| \leqslant K \\ i \neq j, m \\ x^m \geqslant 0}} \left(\int_{-K}^{K} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^j \right) dx^1 \cdots \widehat{dx^j} \cdots dx^m \\
&\quad + \int_{\substack{|x^i| \leqslant K \\ i \neq m}} \left(\int_{0}^{K} \frac{\partial(a_m \circ \varphi^{-1})}{\partial x^m} dx^m \right) dx^1 \cdots dx^{m-1} = 0.
\end{aligned}$$

(2)$U \cap \partial M \neq \varnothing$. 此时$(U,\varphi)$ 是 M 的定向相符的坐标卡，并且

$$U \cap \partial M = \{p \in U : (\varphi(p))^m = 0\}. \tag{5.19}$$

如在情形(1) 所述，可取充分大的 K，使得

$$\varphi(U) \subset H^m \cap C,$$

其中 C 是如(5.17) 给出的方体. 由于

$$\mathrm{Supp}(a_j \circ \varphi^{-1}) \subset \varphi(U),$$

而 $\varphi(U) \backslash \mathrm{Supp}(a_j \circ \varphi^{-1})$ 是开集，故每一个函数 $a_j \circ \varphi^{-1}$ 可以光滑地延拓到整个 $H^m \cap C$，使得它在 $\varphi(U)$ 外的值为零. 特别是，扩充后的函数 $a_j \circ \varphi^{-1}$ 在 $H^m \cap C$ 的边界上除了 $\partial H^m \cap C$ 以外的值皆为零. 这样，我们有

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_{\varphi(U)} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \right) dx^1 \cdots dx^m \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{H^m \cap C} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^m \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} \int_{\substack{|x^i| \leqslant K \\ i \neq j, m \\ x^m \geqslant 0}} \left(\int_{-K}^{K} \frac{\partial(a_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} dx^j \right) dx^1 \cdots \widehat{dx^j} \cdots dx^m \\
&\quad + \int_{\substack{|x^i| \leqslant K \\ i \neq m}} \left(\int_{0}^{K} \frac{\partial(a_m \circ \varphi^{-1})}{\partial x^m} dx^m \right) dx^1 \cdots dx^{m-1} \\
&= - \int_{\substack{|x^i| \leqslant K \\ 1 \leqslant i \leqslant m-1}} a_m \circ \varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^{m-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{m-1}.
\end{aligned}$$

对于边界流形 ∂M 来说，(5.19) 式表明 $U \cap \partial M$ 是 ∂M 的坐标域，具有诱导定向的局部坐标系由 $(-1)^m x^1, x^2, \cdots, x^{m-1}$ 给出，并且 $x^m = 0$. 因为

$$\mathrm{Supp}(i^*\omega|_{\partial M}) \subset U \cap \partial M,$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} i^*\omega &= \int_{U\cap\partial M} i^*\omega \\
&= \int_{U\cap\partial M} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} a_j \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m \\
&= \int_{U\cap\partial M} (-1)^{m+1} a_m \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{m-1} \\
&= -\int_{\varphi(U)\cap\partial H^m} (a_m \circ \varphi^{-1}) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{m-1} \\
&= -\int_{\partial H^m \cap C} (a_m \circ \varphi^{-1}) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{m-1} \\
&= -\int_{\substack{|x^i| \leqslant K \\ 1 \leqslant i \leqslant m-1}} a_m \circ \varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^{m-1}, 0) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{m-1},
\end{aligned}$$

其中第 3 个等号用到了在 $U \cap \partial M$ 上的诱导定向，故有

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} i^*\omega.$$

证毕.

定义 5.2　设 M 是 m 维光滑流形，D 是 M 的闭子集，并且 D 的内部 $\mathrm{Int}D \neq \varnothing$. 如果对于任意一点 $p \in D\setminus\mathrm{Int}D$，存在点 p 的坐标卡 (U,φ)，使得

$$U \cap D = \{p \in U : (\varphi(p))^m \geqslant 0\},$$

则称 D 是 M 中的**带边区域**，$\partial D = D\setminus\mathrm{Int}D$ 称为 D 的边界.

很明显，M 中的带边区域 D 本身是一个 m 维带边流形. 如果 M 是有向光滑流形，则 M 在 D 上就有诱导的定向，从而如第二章 § 6 所说的那样，在 ∂D 上也诱导出一个确定的定向. 这样，由 Stokes 定理得到：

推论 5.2　设 D 是 m 维有向光滑流形 M 中的一个带边区域，假定 M 满足第二可数公理，则对于任意的 $\omega \in A_0{}^{m-1}(M)$ 有

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega. \tag{5.20}$$

自然，Stokes 定理包括了微积分学中的 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式作为特例.

例 1　设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个有界闭区域，其定向与 $\mathbf{R}^2$ 一致. 在 D 的边界 ∂D

上的诱导定向是在沿着 ∂D 的正向行进时，区域 D 的内部落在行进者的左边，即 ∂D 的正向与指向 D 的内部的法向量构成与 $\mathbf{R}^2$ 的定向一致的标架. 设 P,Q 是 D 上的光滑函数(即 P,Q 可以延拓为包含 D 在内的一个开区域内的光滑函数). 令

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

则

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

由(5.20)式得到

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D}\omega = \int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

这就是经典的 Green 公式.

例 2 设 D 是 $\mathbf{R}^3$ 中的有界闭区域，其定向与 $\mathbf{R}^3$ 一致. 在 ∂D 上的诱导定向以外法向量作为正向(参看第二章 §6)，设 P,Q,R 是 D 上的光滑函数，令

$$\varphi = P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

则

$$\mathrm{d}\varphi = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

由 Stokes 定理得到

$$\begin{aligned}&\int_{\partial D} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\partial D}\varphi = \int_D \mathrm{d}\varphi = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

这就是经典的 Gauss 公式，其中左端是第二型曲面积分.

例 3 设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 中一块有向曲面，其边界 ∂S 是光滑简单闭曲线，具有从 S 诱导的定向. P、Q、R 是包含 S 在内的一个区域上的光滑函数，令

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

则

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

由 Stokes 定理得到

$$\begin{aligned}&\int_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

这正好是经典的 Stokes 公式.

最后，我们顺便提一下 Stokes 定理在拓扑学上的含义. 在这里我们只能作一个简要的说明，对 §2 所叙述的 deRham 定理作一些解释. 有关的拓扑学概念可进一步查阅[5]或[13].

设 $a^0, a^1, \cdots, a^r$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中的 $r+1$ 个点，使得向量$\overrightarrow{a^0a^1}, \cdots, \overrightarrow{a^0a^r}$ 是线性无关的，则点集

$$\underline{s}^r = \{x = \lambda_0 a^0 + \cdots + \lambda_r a^r : \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0\}$$

称为以 $a^0, a^1, \cdots, a^r$ 为顶点的 r 维单形，记作

$$\underline{s}^r = (a^0, a^1, \cdots, a^r).$$

所谓 0 维单形就是一个点，1 维单形是一条线段，2 维单形是一个三角形. 一般地，r 维单形有 $r+1$ 个 $r-1$ 维面，它们是

$$(a^0, \cdots, \hat{a}^i, \cdots, a^r), 0 \leqslant i \leqslant r. \tag{5.21}$$

所谓一个复形 K 是指欧氏空间 E^n 中的单形组成的一个有限集，使得：

(1) 如果 $\underline{s}^r \in K$，则 $\underline{s}^r$ 的任意一个面也属于 K；

(2) 如果 $\underline{s}, \underline{t}$ 是 K 中的任意两个单形，那么或者 $\underline{s} \cap \underline{t} = \varnothing$，或者 $\underline{s} \cap \underline{t}$ 是 $\underline{s}$ 的一个面，也是 $\underline{t}$ 的一个面. 这样的两个单形 $\underline{s}, \underline{t}$ 称为是规则相处的.

若 $\underline{s}^r = (a^0, a^1, \cdots, a^r)$ 是一个单形，则 $\underline{s}^r$ 的顶点的排列分为两组，在每一组中任意两个排列之间差一个偶置换，而属于不同组的两个排列之间差一个奇置换. 每一组排列叫做 $\underline{s}^r$ 的一个定向. 选定了一个定向的单形叫做有向单形，并且记

$$s^r = a^0 a^1 \cdots a^r, \tag{5.22}$$

即 s^r 是由顺序的顶点 $a^0, a^1, \cdots, a^r$ 给出的有向单形. 实际上，在有向单形 s^r 所在的 r 维欧氏空间中赋予一个定向，它是由 $\{\overrightarrow{a^0a^1}, \cdots, \overrightarrow{a^0a^r}\}$ 给出的，则有向单形 s^r 可以看作单形 $\underline{s}^r$、并且被赋予从这个有向的 r 维欧氏空间诱导的定向，使得 $\underline{s}^r$ 成为有向的有界闭区域.

设 K 是一个复形，并且对于 K 中每一个单形都指定了一个定向，那么 K 的 r 维有向单形的整系数线性组合称为 K 的一个 r 维链. K 的全体 r 维链的集合是一个加法群，记为 $C_r(K)$，称作 K 的(下)链群. 当然，每一个单形有两个定向，因此链群 $C_r(K)$ 与属于 K 的 r 维单形的定向的指定有关. 但是对于定向的不同的指定，所得的链群是彼此同构的.

对于任意一个有向单形 $s^r = a^0 a^1 \cdots a^r$，令

$$\partial s^r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i a^0 \cdots \hat{a}^i \cdots a^r, \quad r > 0. \tag{5.23}$$

将 ∂ 在 $C_r(K)$ 上作线性扩张，所以 ∂ 成为从 $C_r(K)$ 到 $C_{r-1}(K)$ 的线性映射，称为边缘算子.

把有向单形 s^r 看作前面所说的 r 维欧氏空间中的有向有界闭区域，它的边界由 $r+1$ 个 $r-1$ 维面(5.21)组成. 根据有向区域在其边界上诱导定向的规则(第二章 §6)，由于

$$a^0a^1\cdots a^r=(-1)^{r-i}a^0\cdots\hat{a}^i\cdots a^ra^i,$$

这里假定 $0<i\leqslant r$，故 E^r 的定向也是由有序向量组

$$\{(-1)^{r-i}\overrightarrow{a^0a^1},\cdots,\overrightarrow{a^0a^{i-1}},\overrightarrow{a^0a^{i+1}},\cdots,\overrightarrow{a^0a^r},\overrightarrow{a^0a^i}\}$$

给出的，所以在第 i 个 $r-1$ 维面 $(a^0,a^1,\cdots,\hat{a}^i\cdots a^r)$ 上的诱导定向是由

$$\{(-1)^r\cdot(-1)^{r-i}\overrightarrow{a^0a^1}=(-1)^i\overrightarrow{a^0a^1},\cdots,\overrightarrow{a^0a^{i-1}},\overrightarrow{a^0a^{i+1}},\cdots,\overrightarrow{a^0a^r}\}$$

给出的，它恰好是有向单形 $(-1)^ia^0a^1\cdots\hat{a}^i\cdots a^r$. 在 $i=0$ 的情形也可作类似的解释. 由此可见，边缘算子 ∂ 在有向单形 s^r 上作用的结果是一些 $r-1$ 维有向单形的和，它们的定向恰好是按照有向带边区域在边界上诱导定向的规则从有向单形 s^r 诱导而来的. 换言之，Stokes 定理可用于 s^r，即如果 ω 是定义在 r 维欧氏空间 E^r 上的 $r-1$ 次外微分式，那么

$$\int_{s^r}\mathrm{d}\omega=\int_{\partial s^r}\omega. \tag{5.24}$$

现在假定 M 是一个紧致的 m 维光滑流形. 我们说 M 有一个三角部分，如果存在一个复形 K，以及从多面体 $|K|$ 到 M 的一个同胚 $h:|K|\to M$，使得对于 K 中每一个 r 维单形 $\underline{s}$，映射 $h|_{\underline{s}}:\underline{s}\to M$ 有一个在单形 $\underline{s}$ 所在的 r 维欧氏空间中包含 $\underline{s}$ 的某个开子集 U 上的延拓 $h_{\underline{s}}$，使得 $h_{\underline{s}}:U\to M$ 成为 M 的一个 r 维光滑子流形. 可以证明每一个紧致光滑流形都有三角剖分，其证明是困难的. 因此，我们在这里假定 M 是有三角剖分 (M,K,h) 的 m 维紧致光滑流形.

这样，每一个 r 次外微分式 $\omega\in A^r(M)$ 借助于积分可以看成从下链群 $C_r(K)$ 到 $\mathbf{R}$ 的线性映射 $f_r(\omega):C_r(K)\to\mathbf{R}$，其定义是：设 $\sum\limits_i\lambda_is_i^r\in C_r(K)$，其中 $\lambda_i\in\mathbf{Z}$，令

$$(f_r(\omega))(\sum_i\lambda_is_i^r)=\sum_i\lambda_i\int_{s_i^r}(h_{\underline{s}_i^r})^*\omega, \tag{5.25}$$

其中 $h_{\underline{s}_i^r}$ 是指 $h|_{\underline{s}_i^r}$ 在包含 $\underline{s}_i^r$ 的开子集上的延拓. 所以

$$f_r(\omega)\in\mathrm{Hom}(C_r(K);\mathbf{R})\equiv C^r(K;\mathbf{R}),$$

$C^r(K;\mathbf{R})$ 称为复形 K 的 r 维实系数上链群. 利用积分关于外微分式的线性性质，f_r 本身可以看作从 $A^r(M)$ 到 $C^r(K;\mathbf{R})$ 的线性映射 $f_r:A^r(M)\to C^r(K;\mathbf{R})$.

设 $\omega\in A^r(M)$，s^{r+1} 是属于 K 的任意一个 $(r+1)$ 维有向单形，则由(5.24)式得到

$$(f_{r+1}(\mathrm{d}\omega))(s^{r+1})=\int_{s^{r+1}}(h_{\underline{s}^{r+1}})^*(\mathrm{d}\omega)$$

$$= \int_{s^{r+1}} \mathrm{d}((h_{\underline{s}^{r+1}})^* \omega) = \int_{\partial s^{r+1}} (h_{\underline{s}^{r+1}})^* \omega$$

$$= (f_r(\omega))(\partial s^{r+1}) = (\delta(f_r(\omega)))(s^{r+1}),$$

这里 $\delta: C^r(K;\mathbf{R}) \to C^{r+1}(K;\mathbf{R})$ 是由边缘算子 $\partial: C_{r+1}(K) \to C_r(K)$ 诱导的上边缘算子，即对于任意的 $g \in C^r(K;\mathbf{R}), s \in C_{r+1}(K)$，

$$\delta g(s) = g(\partial s). \tag{5.26}$$

由此可见

$$f_{r+1} \circ \mathrm{d} = \delta \circ f_r, \tag{5.27}$$

即下面的交换图表成立：

$$\begin{array}{ccccc} \xrightarrow{\mathrm{d}} & A^r(M) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & A^{r+1}(M) & \xrightarrow{\mathrm{d}} \\ & \downarrow f_r & & \downarrow f_{r+1} & \\ \xrightarrow{\delta} & C^r(K;\mathbf{R}) & \xrightarrow{\delta} & C^{r+1}(K;\mathbf{R}) & \xrightarrow{\delta} \end{array}$$

特别是，如果 $\omega \in Z^r(M)$，即 $\mathrm{d}\omega = 0$，则

$$\delta(f_r(\omega)) = 0,$$

这意味着 $f_r(\omega) \in Z^r(K;\mathbf{R})$，是一个 r 维上闭链. 所以，线性映射 $f_r: A^r(M) \to C^r(K;\mathbf{R})$ 诱导出上同调群之间的同态

$$\tilde{f}_r: H^r(M) \to H^r(K;\mathbf{R}),$$

其中 $H^r(M)$ 是流形 M 的第 r 个 deRham 上同调群，$H^r(K;\mathbf{R})$ 是复形 K 的第 r 个实系数上同调群. 著名的 deRham 定理（见 §2）就是断言：同态 $\tilde{f}_r$ 在实际上是同构，即 $H^r(M)$ 与 $H^r(K;\mathbf{R})$ 是同构的. Stokes 定理的作用是保证由积分定义的映射 f_r 是链映射，即交换关系(5.27)成立. 这对于同态 $\tilde{f}_r: H^r(M) \to H^r(K;\mathbf{R})$ 的建立起到基本的作用.

习　题　四

1. 设 (M,g) 是 n 维有向黎曼流形，$(U;x^i)$ 是定向相符的局部坐标系. 令

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right),\ G = \det(g_{ij}).$$

证明：$\sqrt{G}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ 与定向相符的局部坐标系 $(U;x^i)$ 的选取无关，因而是大范围地定义在 M 上的 n 次外微分式.

2. 试在 $\mathbf{R}P^n$ 上给出一个黎曼度量，并将它在局部坐标系下表示出来. 在 $\mathbf{R}P^n$ 上能否定义体积元素？

3. 设 $X \in \mathscr{X}(M)$，对于任意的 $\varphi \in A^r(M)$，定义映射

$$i(X)\varphi: \mathscr{X}(M) \times \cdots \times \mathscr{X}(M)(\text{共 } r-1 \text{ 个因子}) \to C^\infty(M)$$

如下：

$$(i(X)\varphi)(X_1,\cdots,X_{r-1}) = \varphi(X,X_1,\cdots,X_{r-1}),$$
$$\forall\, X_1,\cdots,X_{r-1} \in \mathscr{X}(M).$$

证明：

(1) 对每一个 $\varphi \in A^r(M)$，$i(X)\varphi \in A^{r-1}(M)$；

(2) $i(X): A^r(M) \to A^{r-1}(M)$ 是 $C^\infty(M)$-线性映射；

(3) $i(X)(\varphi \wedge \psi) = (i(X)\varphi) \wedge \psi + (-1)^r \varphi \wedge (i(X)\psi)$，其中 $\varphi \in A^r(M)$，$\psi \in A^s(M)$.

4. 设 $X \in \mathscr{X}(M)$，用 $\mathscr{L}_X$ 表示作用在 $A^r(M)$ 上的李导数. 证明：

(1) $\mathscr{L}_X = i(X) \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ i(X): A^r(M) \to A^r(M)$；

(2) $\mathscr{L}_X \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ \mathscr{L}_X$；

(3) $\mathscr{L}_X(\varphi \wedge \psi) = (\mathscr{L}_X\varphi) \wedge \psi + \varphi \wedge (\mathscr{L}_X\psi)$，$\forall\, \varphi \in A^r(M)$，$\psi \in A^s(M)$.

5. 设

$$\omega = xy\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y - yz\mathrm{d}z,$$
$$\eta = x\mathrm{d}x - yz^2\mathrm{d}y - 2x\mathrm{d}z.$$

求：

(1) $\mathrm{d}\omega$； (2) $\mathrm{d}\eta$； (3) $\mathrm{d}\omega \wedge \eta - \omega \wedge \mathrm{d}\eta$；

(4) $f^*\omega$ 和 $f^*(\mathrm{d}\omega)$，其中 $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ 的定义是

$$f(u,v) = (uv, u^2, 3u + v).$$

6. 举例说明：存在 r 次微分式 ω 在点 $p \in M$ 为零，但是 $\mathrm{d}\omega$ 在点 p 不是零.

7. 设 $U = \mathbf{R}^2 \backslash \{0\}$，令

$$\omega = (x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)/(x^2 + y^2).$$

(1) 证明：ω 是闭微分式；

(2) 证明：ω 是恰当微分式.

8. 设 $U = \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$，$m$ 是固定的正数，考虑 U 上的 $n-1$ 次外微分式

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n,$$

其中 $f_i = x^i / \| x \|^m$，$\| x \|^m = \left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2 \right)^{m/2}$.

(1) 求 $\mathrm{d}\omega$；

(2) 确定 m 的值，使得 $\mathrm{d}\omega = 0$；

(3) 证明：在上述情况下，ω 不是恰当微分式.

9. 设 U 是 m 维光滑流形 M 的开子集，$\omega \in A^r(U)$. 证明：在任意一点 $p \in U$，存在点 p 的某个邻域 $V \subset U$，以及 r 次微分式 $\widetilde{\omega} \in A^r(M)$，使得 $\widetilde{\omega}|_V = \omega|_V$.

10. 设 M 是嵌入在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的有向超曲面，对任意一点 $p \in M$，存在局部坐标系 $(U;u^i)$，使得 $M|_U$ 有参数表示

$$x^\alpha = f^\alpha(u^1,\cdots,u^n),1 \leqslant \alpha \leqslant n+1.$$

(1) 证明：M 上单位法向量场 υ 的分量是

$$\upsilon^\alpha = (-1)^{\alpha+1} \cdot \frac{A^\alpha}{A},$$

其中

$$A^\alpha = \frac{\partial(f^1,\cdots,\widehat{f^\alpha},\cdots,f^{n+1})}{\partial(u^1,\cdots,u^n)},$$

$$A = \Big(\sum_{\alpha=1}^{n+1}(A^\alpha)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

(2) 求 $\mathbf{R}^{n+1}$ 在 M 上的诱导黎曼度量；

(3) 证明：M 的体积元素是

$$i(\upsilon)(\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n+1}|_M).$$

11. 设 $f: M^m \to \mathbf{R}^{m+1}$ 是单一地浸入在 $\mathbf{R}^{m+1}$ 中的 m 维子流形，证明：M^m 是可定向的，当且仅当沿着子流形 (f,M) 存在一个光滑的处处不为零的法向量场.

12. 设 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面 $r = r(u^1,u^2)$ 的第一基本形式和第二基本形式分别是

$$I = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta,$$

$$II = b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta.$$

令

$$\begin{cases}\omega^\alpha = \mathrm{d}u^\alpha, \quad \omega^3 = 0,\\ \omega_\alpha{}^\beta = \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\mathrm{d}u^\gamma, \quad \omega_\alpha{}^3 = b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\beta,\\ \omega_3{}^\alpha = -b_\beta{}^\alpha\mathrm{d}u^\beta, \quad \omega_3{}^3 = 0, \quad 1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 2.\end{cases}$$

其中 $\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}$ 是 $g_{\alpha\beta}$ 的 Christoffel 记号，$b^\alpha_\beta = g^{\alpha\gamma}g_{\beta\gamma}$. 验证：

(1) 第一组结构方程 $\mathrm{d}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j{}^i$ 是自动成立的；

(2) 第二组结构方程 $\mathrm{d}\omega_i^j = \omega_i{}^k \wedge \omega_k{}^j$ 恰好是Gauss-Codazzi 方程，$1 \leqslant i,j,k \leqslant 3$.

13. 在 $\mathbf{R}P^3$ 构造一个处处非零的 1 次微分式 ω.

14. 证明：1 次微分式 $\omega = \dfrac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在 $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ 上是闭的，但不

是恰当的.

假定 $M=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: y>0\}$,则 ω 在 M 上是否是恰当的?如果 ω 是恰当的,找出函数 f 使得 $\mathrm{d}f=\omega$.

15. 证明:

(1) 若 α,β 是闭微分式,则 $\alpha\wedge\beta$ 是闭微分式;

(2) 若 α 是闭微分式,β 是恰当微分式,则 $\alpha\wedge\beta$ 是恰当微分式.

16. 设 M 是 $2n$ 维光滑流形,ω 是 M 上的 2 次外微分式. 假定 ω 是非退化的,即:在任意一点 $x\in M$,及任意的 $\zeta\in T_xM$,恒等式 $\omega(\zeta,\eta)=0$ 对于任意的 $\eta\in T_xM$ 成立蕴含着 $\zeta=0$. 证明:在每一点 $x\in M$,存在自然同构 $I: T_xM\to T_x{}^*M$,使得对于任意的 $\zeta\in T_xM$ 有

$$(I(\zeta))(\eta)=\omega(\eta,\zeta),\quad \forall\,\eta\in T_xM.$$

17. 在光滑流形 M 上指定一个非退化的闭 2 次外微分式 ω,则称 (M,ω) 为一个辛流形,ω 称为 M 上的辛结构. 在 $\mathbf{R}^{2n}$ 中设直角坐标系为 $(p^1,\cdots,p^n,q^1,\cdots,q^n)$,令

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}p^i\wedge\mathrm{d}q^i.$$

验证:$(\mathbf{R}^{2n},\omega)$ 是一个辛流形.

18. 设 (M^{2n},ω) 是一个辛流形,证明:M 是可定向流形.

19. 设 (M,ω) 是辛流形. 对于任意的 $f\in C^\infty(M)$,必有光滑切向量场 $X_f\in\mathscr{X}(M)$,使得

$$\mathrm{d}f(Y)=\omega(X_f,Y),\quad \forall\,Y\in\mathscr{X}(M).$$

这样的切向量场 X_f 称为在辛流形 (M,ω) 上以 f 为势函数的 Hamilton 向量场. 用 $\gamma_x(t)$ 表示切向量场 X_f 经过点 $x\in M$ 的轨线. 证明:

(1) $i(X_f)\omega=\mathrm{d}f$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\gamma_x(t))=0,\quad \forall\,(t,x)\in\mathbf{R}\times M$;

(3) $\mathscr{L}_{X_f}\omega=0$.

20. 设 (M,ω) 是辛流形. 对于任意的 $f,g\in C^\infty(M)$,令

$$\{f,g\}=\omega(X_f,X_g),$$

称为光滑函数 f,g 的 Poisson 括号积. 证明:

(1) $\{f,g\}=-\mathscr{L}_{X_f}g=\mathscr{L}_{X_g}f$;

(2) 设 $\{\varphi_t\}$ 是 X_f 所生成的单参数可微变换群,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g\circ\varphi_t)=\{g\circ\varphi_t,f\};$$

(3) $C^\infty(M)$ 关于 Poisson 括号积 $\{\ ,\ \}$ 构成一个李代数;

(4) M 上的 Hamilton 向量场构成一个李代数.

21.　在 $\mathbf{R}^3\backslash\{0\}$ 中定义

$$\omega = \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 记 $S^2(r_0)$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中以原点 O 为中心，以 r_0 为半径的球面. 证明：

$$\int_{S^2(r_0)} \omega = 4\pi.$$

22.　定义映射 $f: D \to \mathbf{R}^3$ 为

$$f(u,v) = (u,v,u^2 + v^2 + 1),$$

其中 $D = [0,1] \times [0,1]$，设

$$\omega = y\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + xz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$$

是 $\mathbf{R}^3$ 上的 2 次微分式. 求积分 $\int_D f^* \omega$.

23.　设 M 是 $\mathbf{R}^n$ 中 $k + l + 1$ 维有向无边嵌入子流形，ω, η 分别是定义在 $\mathbf{R}^n$ 中包含 M 在内的一个开子集上的 k 次和 l 次外微分式. 证明：存在某个实数 a，使得

$$\int_M \omega \wedge \mathrm{d}\eta = a\int_M \mathrm{d}\omega \wedge \eta,$$

并确定 a 的值.

24.　设

$$\omega = A\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + C\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

是 $\mathbf{R}^3$ 中的 2 次外微分式，且 $\mathrm{d}\omega = 0$. 令

$$\begin{aligned}\alpha = &\int_0^1 tA(tx,ty,tz)\mathrm{d}t \cdot (y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}y)\\ &+ \int_0^1 tB(tx,ty,tz)\mathrm{d}t \cdot (z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z)\\ &+ \int_0^1 tC(tx,ty,tz)\mathrm{d}t \cdot (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

通过直接计算验证：$\mathrm{d}\alpha = \omega$.

第五章　黎曼流形

在微分流形上，光滑结构的功用能够在流形上定义光滑函数的概念，继而能够借助于光滑函数定义切向量，光滑切向量场，光滑张量场和外微分式. 在光滑流形上，光滑函数 f 关于切向量 $v \in T_xM$ 的方向导数 $v(f)$ 是有意义的，通常记为

$$D_v f = v(f), \ \forall \ v \in T_xM, \ f \in C_x^\infty.$$

自然地要问：光滑切向量场和光滑张量场能否关于切向量 $v \in T_xM$ 求导数？这是一个十分深刻的问题. 答案是：在光滑流形上，要定义光滑切向量场关于切向量 $v \in T_xM$ 的导数只有流形的光滑结构是不够的，还需要在流形上给定另外的结构. 最简单的一种“另外的结构”就是光滑流形上的黎曼结构（参看第三章，定义 5.3）. 本章的主要目的就是介绍黎曼流形上光滑切向量场，光滑张量场的协变微商和协变微分的概念，并且由此导出黎曼曲率张量的概念.

§1　切向量场的协变微分

设 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形，g 是 M 上的基本度量张量，假定 $v \in \mathscr{X}(M)$，$(U;x^i)$ 是 M 的一个局部坐标系，则 v 有局部坐标表达式

$$v|_U = v^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 $v^i \in C^\infty(U)$. 若有另一个局部坐标系 $(V;y^i)$，则 v 在 V 上的局部坐标表达式是

$$v|_V = \tilde{v}^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

当 $U \cap V \neq \varnothing$ 时，切向量场 $v|_{U\cap V}$ 在两个局部坐标系下分别有分量 v^i 和 $\tilde{v}^i$，它们之间有关系式

$$\tilde{v}^i = v^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \tag{1.1}$$

即切向量场 v 的分量 v^i 在坐标变换时遵循反变向量的变换规律.

对(1.1)式进行微分，得到

$$\mathrm{d}\tilde{v}^i = \mathrm{d}v^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} + v^j \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k} dx^k. \tag{1.2}$$

一般来说，$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k} \neq 0$，所以分量 v^i 的微分 $\mathrm{d}v^i$ 不再遵循反变向量的变换规律. 下面我们设法用黎曼张量的分量把 $\frac{\partial^2 y^2}{\partial x^j \partial x^k}$ 表示出来.

引理 1.1 设(M,g)是一个m维黎曼流形，$(U;x^i)$和$(V;y^i)$是M的两个局部坐标系，$U\cap V\neq\varnothing$. 命

$$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

$$\widetilde{g}_{pq}=g\left(\frac{\partial}{\partial y^p},\frac{\partial}{\partial y^q}\right),\tag{1.3}$$

则在$U\cap V$上有

$$\frac{\partial^2 y^r}{\partial x^i\partial x^j}=\Gamma_{ij}^k\frac{\partial y^r}{\partial x^k}-\widetilde{\Gamma}_{pq}^r\frac{\partial y^p}{\partial x^i}\frac{\partial y^q}{\partial x^j},\tag{1.4}$$

其中Γ_{ij}^k，$\widetilde{\Gamma}_{ij}^\gamma$是对应于$g_{ij}$和$\widetilde{g}_{pq}$的 Christoffel 记号，即

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right),$$

$$\widetilde{\Gamma}_{pq}^r=\frac{1}{2}\widetilde{g}^{rs}\left(\frac{\partial\widetilde{g}_{sq}}{\partial y^p}+\frac{\partial\widetilde{g}_{ps}}{\partial y^q}-\frac{\partial\widetilde{g}_{pq}}{\partial y^s}\right).\tag{1.5}$$

证明 在$U\cap V$上有

$$\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial y^p}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^p},$$

故由(1.3)式得到

$$g_{ij}=\widetilde{g}_{pq}\frac{\partial y^p}{\partial x^i}\frac{\partial y^q}{\partial x^j}.\tag{1.6}$$

将上式两边对x^k求偏微商得到

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\frac{\partial\widetilde{g}_{pq}}{\partial y^r}\frac{\partial y^r}{\partial x^k}\frac{\partial y^p}{\partial x^i}\frac{\partial y^q}{\partial x^j}+\widetilde{g}_{pq}\frac{\partial^2 y^p}{\partial x^i\partial x^k}\frac{\partial y^q}{\partial x^j}+\widetilde{g}_{pq}\frac{\partial y^p}{\partial x^i}\frac{\partial^2 y^q}{\partial x^j\partial x^k}.\tag{1.7}$$

将(1.7)式中的指标i,j,k作轮换，然后作适当的加减，并且利用$\frac{\partial^2 y^p}{\partial x^i\partial x^k}$对于下指标$i,k$的对称性，我们便得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\\&=\left(\frac{\partial\widetilde{g}_{rq}}{\partial y^p}+\frac{\partial\widetilde{g}_{pr}}{\partial y^q}-\frac{\partial\widetilde{g}_{pq}}{\partial y^r}\right)\frac{\partial y^p}{\partial x^i}\frac{\partial y^q}{\partial x^j}\frac{\partial y^r}{\partial x^k}+2\widetilde{g}_{pq}\frac{\partial^2 y^p}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial y^q}{\partial x^k}.\end{aligned}$$

把(1.5)式代入上式得到

$$g_{lk}\Gamma_{ij}^l=\widetilde{g}_{sr}\widetilde{\Gamma}_{pq}^s\frac{\partial y^p}{\partial x^i}\frac{\partial y^q}{\partial x^j}\frac{\partial y^r}{\partial x^k}+\widetilde{g}_{pq}\frac{\partial^2 y^p}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial y^q}{\partial x^k},$$

此即(1.4)式.

引理 1.2 设(M,g)是一个m维黎曼流形，$v\in\mathscr{X}(M)$. 在局部坐标系$(U;x^i)$下，设

$$v|_U=v^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

命

$$Dv^i = \mathrm{d}v^i + \Gamma^i_{jk}v^j\mathrm{d}x^k, \tag{1.8}$$

其中 Γ^i_{jk} 是关于 $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ 的Christoffel记号，则 Dv^i 在局部坐标变换下遵循反变向量的变换规律.

证明 将(1.4)式代入(1.2)式得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{v}^i &= \mathrm{d}v^j\frac{\partial y^i}{\partial x^j} + v^j\mathrm{d}x^k\left(\Gamma^r_{jk}\frac{\partial y^i}{\partial x^r} - \tilde{\Gamma}^i_{pq}\frac{\partial y^p}{\partial x^j}\frac{\partial y^q}{\partial x^k}\right)\\ &= \mathrm{d}v^j\frac{\partial y^i}{\partial x^j} + v^l\Gamma^j_{lk}\mathrm{d}x^k\frac{\partial y^i}{\partial x^j} - \tilde{\Gamma}^i_{pq}\tilde{v}^p\mathrm{d}y^q,\end{aligned}$$

即

$$D\tilde{v}^i = Dv^j\frac{\partial y^i}{\partial x^j},$$

因此 Dv^j 在局部坐标变换时遵循反变向量的变换规律.

定义 1.1 设 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形，$v \in \mathscr{X}(M)$. 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，设 $v|_U = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，命

$$Dv|_U = Dv^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + v^j\Gamma^i_{jk}\right)\mathrm{d}x^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{1.9}$$

则 Dv 是在光滑流形 M 上大范围定义的(1,1)型光滑张量场，称为光滑切向量场 v 的**协变微分**. 映射 $D: \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ 称为**协变微分算子**.

(1,1)型光滑张量场 Dv 可以看作以1次微分式为分量的切向量场，于是，对于 $X \in \mathscr{X}(M)$，可以命

$$\begin{aligned}D_X v &= X^k\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + v^j\Gamma^i_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\\ &= C^1_1(X \otimes Dv),\end{aligned} \tag{1.10}$$

这是在 M 上大范围地定义的光滑切向量场. 若命

$$v^i_{,k} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + v^j\Gamma^i_{jk}, \tag{1.11}$$

则

$$D_X v = X^k v^i_{,k}\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{1.12}$$

由此可见，$(D_X v)(p)$ 只线性地依赖于切向量场 X 在点 p 的分量 $X^k(p)$，而与 X 在其它各点的值无关.

定义 1.2 设 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形，$v \in \mathscr{X}(M)$，$X \in T_pM$，则由(1.12)式定义的 $D_X v \in T_pM$ 称为光滑切向量场 v 关于切向量 $X \in T_pM$ 的**协变导数**.

定理 1.3　设(M,g)是m维黎曼流形，$X,Y,Z\in\mathscr{X}(M)$，$f\in C^\infty(M)$，$\lambda\in\mathbf{R}$，则有

(1)$D_X(Y+Z)=D_XY+D_XZ,\quad D_X(\lambda\cdot Y)=\lambda D_XY$；

(2)$D_X(f\cdot Y)=X(f)\cdot Y+f\cdot D_XY$；

(3)$D_{X+Y}Z=D_XZ+D_YZ$；

(4)$D_{fX}Y=f\cdot D_XY$；

(5)$X(g(Y,Z))=g(D_XY,Z)+g(Y,D_XZ)$；

(6)$D_XY-D_YX=[X,Y]$.

证明　性质(1),(2),(3),(4)是定义式(1.12)的直接推论.

(5) 取局部坐标系$(U;x^i)$，设$Y=Y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$Z=Z^j\dfrac{\partial}{\partial x^j}$，$X=X^k\dfrac{\partial}{\partial x^k}$，则

$$g(Y,Z)=Y^iZ^ig_{ij},$$

其中

$$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

因此

$$\begin{aligned}X(g(Y,Z))&=X^k\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}Y^iZ^j)\\&=X^k\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}Y^iZ^j+g_{ij}\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}Z^j+g_{ij}Y^i\frac{\partial Z^j}{\partial x^k}\right)\\&=X^k\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}Y^iZ^j+g_{ij}(Y^i_{,k}-Y^l\Gamma^i_{lk})Z^j+g_{ij}Y^i(Z^j_{,k}-Z^l\Gamma^j_{lk})\right)\\&=g_{ij}X^kY^i_{,k}Z^j+g_{ij}Y^iX^kZ^j_{,k}+X^k\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-g_{lj}\Gamma^l_{ik}-g_{il}\Gamma^l_{jk}\right)Y^iZ^j.\end{aligned}$$

由(1.5)式得到

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-g_{lj}\Gamma^l_{ik}-g_{il}\Gamma^l_{jk}=0,\tag{1.13}$$

故

$$\begin{aligned}&X(g(Y,Z))\\&=g_{ij}X^kY^i_{,k}Z^j+g_{ij}Y^iX^kZ^i_{,k}\\&=g\left(X^kY^i_{,k}\frac{\partial}{\partial x^i},Z^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)+g\left(Y^i\frac{\partial}{\partial x^i},X^kZ^j_{,k}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\&=g(D_XY,Z)+g(Y,D_XZ).\end{aligned}$$

(6) 在(5)的假设下，由于$\Gamma^i_{kl}=\Gamma^i_{lk}$，故有

$$D_XY-D_YX=X^kY^i_{,k}\frac{\partial}{\partial x^i}-Y^kX^i_{,k}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$= \left(X^k \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + Y^l \Gamma^i_{lk} \right) - Y^k \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^k} + X^l \Gamma^i_{lk} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$= \left(X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$= [X, Y].$$

例 1　曲面上切向量场的协变微分

设 $r = r(u^1, u^2)$ 是 3 维欧氏空间 E^3 中的一张正则曲面，沿该曲面有自然标架场 $\{r; r_1, r_2, n\}$，其中

$$r_\alpha = \frac{\partial r}{\partial u^\alpha}, \quad \alpha = 1,2; \quad n = \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|}.$$

曲面论的基本公式，即自然标架场 $\{r; r_1, r_2, n\}$ 的运动方程是(参看第四章，(4.26) 式)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial u^\alpha} = r_\alpha, \\ \dfrac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} r_\gamma + b_{\alpha\beta} n, \\ \dfrac{\partial n}{\partial u^\beta} = - b^\gamma_\beta r_\gamma, \end{cases}$$

其中 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ 是关于 $g_{\alpha\beta} = r_\alpha \cdot r_\beta$ 的 Christoffel 记号(参看第四章，(4.26) 式)，$b_{\gamma\beta} = \dfrac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot n$，$b^\gamma_\beta = g^{\gamma\alpha} b_{\alpha\beta}$.

设 v 是定义在曲面上的切向量场，故

$$v = v^\alpha r_\alpha,$$

因此，

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}v^\alpha r_\alpha + v^\alpha \frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta} \mathrm{d}u^\beta$$

$$= \left(\mathrm{d}v^\alpha + v^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \mathrm{d}u^\beta \right) r_\alpha + v^\alpha b_{\alpha\beta} \mathrm{d}u^\beta n.$$

为了重新得到定义在曲面上的切向量场，作 $\mathrm{d}v$ 在曲面的切平面上的正交投影得到

$$(\mathrm{d}v)^T = (\mathrm{d}v^\alpha + v^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \mathrm{d}u^\beta) r_\alpha.$$

和(1.8) 式相对照得到

$$(\mathrm{d}v)^T = Dv^\alpha \cdot r_\alpha \equiv Dv, \tag{1.14}$$

即 $(\mathrm{d}v)^T$ 恰好是曲面上的切向量场 v 的协变微分 Dv. 这种概念最早是由 Levi-Civita 给出的.

例 2　在欧氏空间中切向量场的协变微分就是它的普通微分.

参看第一章 §3，在 E^n 的区域 V 内取曲纹坐标系 $(u^1, \cdots, u^n)$，则在 V 上有

自然标架场$\{r;r_i,1\leqslant i\leqslant n\}$，其中$r_i=\dfrac{\partial r}{\partial u^i}$. 该标架场的度量系数是

$$g_{ij}=r_i\cdot r_j.$$

那么

$$\frac{\partial r_i}{\partial u^l}=\Gamma_{il}^k r_k,$$

其中Γ_{il}^k是关于g_{ij}的Christoffel记号(参看第一章的(3.16)式和(3.17)式).

设$v\in\mathscr{X}(E^n)$，则v可以表示为

$$v=v^i r_i,$$

故由第一章的(3.19)式得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= \mathrm{d}v^i\cdot r_i+v^i\cdot \mathrm{d}r_i\\ &=(\mathrm{d}v^i+v^j\Gamma_{jk}^i\mathrm{d}u^k)r_i\\ &=Dv^i\cdot r_i. \end{aligned}\tag{1.15}$$

由此可见，在欧氏空间中采用曲纹坐标系的情况下，切向量场v的微分$\mathrm{d}v$关于自然标架场的分量恰好是其分量v^i的协变微分Dv^i.

定义 1.3　设(M,g)是一个m维黎曼流形，$\gamma:[0,l]\to M$是M中任意一条光滑曲线，$X\in\mathscr{X}(M)$. 如果

$$D_{\gamma'(t)}X=0,\quad \forall\, t\in[0,l],\tag{1.16}$$

则称切向量场X沿曲线γ是**平行的**.

设$\gamma:[0,l]\to M$是M中一条分段光滑曲线，X是沿曲线γ定义的分段光滑的切向量场，如果X沿γ的每一个光滑曲线段是平行的，则称X沿分段光滑曲线γ是平行的.

定理 1.4　设(M,g)是一个m维黎曼流形，$\gamma:[0,l]\to M$是M中任意一条分段光滑曲线，任意指定一个切向量$v_0\in T_{\gamma(0)}M$，则有唯一的一个沿曲线γ平行的切向量场$v(t)$，使得

$$v(0)=v_0,$$

而且沿曲线γ平行的切向量场的集合是一个与$T_{\gamma(0)}M$同构的向量空间.

证明　设$[0,l]$有一个分划$0=t_0<t_1<\cdots<t_r=l$，使得曲线γ在每一个区间$[t_{\alpha-1},t_\alpha](1\leqslant\alpha\leqslant r)$上的限制是光滑曲线. 不妨设$p=\gamma(0)$有一个局部坐标系$(U;x^i)$使得$\gamma([t_0,t_1])\subset U$，这样$\gamma|_{[t_0,t_1]}$有参数方程

$$x^i(t)=x^i(\gamma(t)),\quad t\in[t_0,t_1].$$

假定

$$X|_U=X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad X^i(t)=X^i(\gamma(t)),$$

那么X沿曲线$\gamma|_{[t_0,t_1]}$平行的条件(1.16)成为

$$0 = D_{\gamma'(t)}X = D_{\gamma'(t)}\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$
$$= \left(\frac{\mathrm{d}X^i(t)}{\mathrm{d}t} + X^j(t)\frac{\mathrm{d}x^k(t)}{\mathrm{d}t}\Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\right)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

所以 $X^i(t)$ 是下列齐次线性常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}X^i(t)}{\mathrm{d}t} + X^j(t)\frac{\mathrm{d}x^k(t)}{\mathrm{d}t}\Gamma^i_{jk}(\gamma(t)) = 0 \tag{1.17}$$

的解. 根据常微分方程组理论，方程组(1.17)在任意给定的初始值 $X^i(0)$ 下在区间 $[t_0, t_1]$ 上有唯一解. 并且方程组(1.17)的解的集合成为一个 m 维向量空间，它与 $T_{\gamma(0)}M$ 是同构的. 在分段光滑曲线 γ 上逐段进行讨论，便得我们所要的定理.

通常，我们把沿 γ 平行的向量场 $v(t)$ 称为 $v_0 = v(0)$ 沿 γ 的**平行移动**. 根据定理 1.4，沿曲线 γ 的平行移动建立了切空间 $T_{\gamma(0)}M$ 和 $T_{\gamma(l)}M$ 的线性同构. 值得指出的是，在光滑流形 M 上每一点 p 都有切空间 T_pM. 从代数的角度看，这些切空间都是彼此同构的，但是并没有一种自然的方式给出光滑流形 M 在任意两个不同点 p, q 处的切空间 T_pM 和 T_qM 的同构的关系. 正因为如此，在光滑流形 M 上只有光滑结构的情况下不能够求切向量场 X 的微分(在无限接近的两点处的切向量不能够相减). 然而，在光滑流形 M 上给定一个黎曼度量 g 之后，情况发生了变化. 如果任意给定一条连结 $p, q \in M$ 的分段光滑曲线 γ，则在 T_pM 和 T_qM 之间借助于沿曲线 γ 的平行移动建立了同构关系，这种同构当然与曲线 γ 有关，但是与局部坐标系是无关的，这恰好是把协变微分(或协变导数)称为联络的原因(见下一节).

定理 1.5 设 (M, g) 是一个 m 维黎曼流形，$\gamma: [0, l] \to M$ 是 M 上的一条光滑曲线，对于 $t_1, t_2 \in [0, l]$，用 $P^{t_2}_{t_1}: T_{\gamma(t_1)}M \to T_{\gamma(t_2)}M$ 表示沿曲线 γ 从 $\gamma(t_1)$ 到 $\gamma(t_2)$ 的平行移动. 则对于任意的 $X \in \mathscr{X}(M)$，

$$D_{\gamma'(t)}X = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{P^t_{t+\Delta t}(X(t+\Delta t)) - X(t)}{\Delta t}. \tag{1.18}$$

证明 在 $T_{\gamma(0)}M$ 中任意取定一个基底 $\{e_i\}$，命 $e_i(t) = P^t_0(e_i)$，即 $e_i(t)$ 是 e_i 沿 γ 的平行移动，由于 $P^t_0: T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(t)}M$ 是同构，故 $\{e_i(t)\}$ 是 $T_{\gamma(t)}M$ 的基底. 设 $X \in \mathscr{X}(M)$，则可以把 X 在曲线 γ 上的限制表示为 $X(\gamma(t)) = X^i(t)e_i(t)$，于是

$$D_{\gamma'(t)}X = \gamma'(t)(X^i) \cdot e_i(t) + X^i \cdot D_{\gamma'(t)}e_i(t)$$
$$= \frac{\mathrm{d}X^i(t)}{\mathrm{d}t} \cdot e_i(t)$$

在另一方面，

$$P^t_{t+\Delta t}(X(t+\Delta t))$$

$$= P^t_{t+\Delta t}(X^i(t+\Delta t)e_i(t+\Delta t))$$
$$= X^i(t+\Delta t)e_i(t),$$

因此

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P^t_{t+\Delta t}(X(t+\Delta t))-X(t)}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X^i(t+\Delta t)-X^i(t)}{\Delta t}\cdot e_i(t)$$
$$=\frac{\mathrm{d}X^i(t)}{\mathrm{d}t}\cdot e_i(t)=D_{\gamma'(t)}X.$$

定理 1.6 设(M,g)是一个m维黎曼流形,$\gamma:[0,l]\to M$是M上的一条分段光滑曲线,$X(t),Y(t)$是沿γ平行的切向量,则$g(X(t),Y(t))=\mathrm{const}.$

证明 根据定理 1.3(5),我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(X(t),Y(t)))$$
$$=\gamma'(t)(g(X(t),Y(t)))$$
$$=g(D_{\gamma'(t)}X,Y)+g(X,D_{\gamma'(t)}Y).$$

由于$D_{\gamma'}X=0,D_{\gamma'}Y=0$,故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(X(t),Y(t)))=0,$$

即

$$g(X(t),Y(t))=\mathrm{const}.$$

§ 2 黎曼联络

在 § 1 利用黎曼流形(M,g)上的度量张量g构造了作用在光滑切向量场上的协变微分算子D,它具有定理 1.3 所说的性质,特别是性质(1)－(4)是微分算子的特征. 具有这些特性的算子D本身可以看作附加在光滑流形上的一种结构,而不必要求这种结构是从度量张量g诱导出来的.

定义 2.1 设M是一个m维光滑流形. 若有一个映射$D:\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$,并对于任意的$X,Y\in\mathscr{X}(M)$记$D(Y,X)=D_XY\in\mathscr{X}(M)$,它满足下列条件:

(1)$D_X(Y+Z)=D_XY+D_XZ,\quad D_X(\lambda\cdot Y)=\lambda D_XY$;

(2)$D_X(f\cdot Y)=X(f)\cdot Y+f\cdot D_XY$;

(3)$D_{X+Y}Z=D_XZ+D_YZ$;

(4)$D_{fX}Y=f\cdot D_XY$,

其中$X,Y,Z\in\mathscr{X}(M),\lambda\in\mathbf{R},f\in C^\infty(M)$,则称$D$是光滑流形$M$上的一个**联络**.

若在光滑流形 M 上指定一个联络 D,则称 (M,D) 是一个**仿射联络空间**.

定理1.3说明,黎曼度量 g 在光滑流形 M 上诱导出一个联络 D,使 (M,D) 成为一个仿射联络空间. 在满足第2可数公理的光滑流形 M 上,联络结构是很丰富的. 为说明这一点,我们需要导出联络的局部坐标表达式.

引理 2.1 设 D 是光滑流形 M 上的一个联络,则 D 具有下列局部性:设 $X_1,X_2,Y_1,Y_2 \in \mathscr{X}(M)$,且有 M 的开子集 U 使得

$$X_1|_U = X_2|_U, \quad Y_1|_U = Y_2|_U,$$

则

$$D_{X_1}Y_1|_U = D_{X_2}Y_2|_U.$$

证明 很明显,只要证明 $D_{X_1}Y_1|_U = D_{X_1}Y_2|_U$ 以及 $D_{X_1}Y_1|_U = D_{X_2}Y_1|_U$ 就行了;而且这两者的证明是类似的. 在此只证明其中之一,另一个由读者自己完成.

任取 $p \in U$,则有 p 的邻域 V,使得 $\overline{V}$ 是紧致的,并且 $\overline{V} \subset U$. 根据第二章的引理2.2,存在 $f \in C^\infty(M)$,使得 $f|_V \equiv 1, f|_{M\setminus U} \equiv 0$. 因此 $f\cdot(Y_1 - Y_2) \equiv 0$.

由联络 D 所满足的条件(1)得知 D_{X_1} 在零向量场上的作用为零,故

$$\begin{aligned} 0 &= D_{X_1}(f\cdot(Y_1 - Y_2)) \\ &= X_1(f)\cdot(Y_1 - Y_2) + f\cdot(D_{X_1}Y_1 - D_{X_1}Y_2). \end{aligned}$$

将上式限制在点 $p \in V$ 得到

$$(D_{X_1}Y_1)(p) = (D_{X_1}Y_2)(p).$$

由于 p 在 U 中的任意性,故有

$$D_{X_1}Y_1|_U = D_{X_1}Y_2|_U.$$

引理2.1的直接推论是:光滑流形 M 上的联络 D 必在 M 的任意一个开子集 U 上诱导出一个联络 $D: \mathscr{X}(U) \times \mathscr{X}(U) \to \mathscr{X}(U)$. 实际上,若 $X,Y \in \mathscr{X}(U)$,则由第三章定理2.5,对于每一点 $p \in U$,存在 p 的邻域 $V \subset U$,以及 $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathscr{X}(M)$,使得 $\widetilde{X}|_V = X|_V, \widetilde{Y}|_V = Y|_V$,于是可以命

$$(D_XY)(p) = (D_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})(p). \tag{2.1}$$

引理2.1说明(2.1)式的右端与 $\widetilde{X},\widetilde{Y}$ 的取法无关. 显然,由(2.1)式定义的 $D_XY \in \mathscr{X}(U)$ 满足定义2.1的条件(1)-(4).

现在假设 $(U;x^i)$ 是 M 的一个局部坐标系,于是 $D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\dfrac{\partial}{\partial x^i} \in \mathscr{X}(U)$,故可设

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{2.2}$$

其中 $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$,称为联络 D 在自然标架场 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 下的**系数**. 设 $X,Y \in$

$\mathscr{X}(M)$，且 $X|_U = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$，$Y|_U = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$，则由联络 D 满足的条件和(2.2)式得到

$$
\begin{aligned}
D_X Y|_U &= D_{X|_U}(Y|_U) = X^j D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}) \\
&= X^j \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + Y^k \Gamma^i_{kj} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

对于由黎曼度量 g 所诱导的协变微分算子，Γ^k_{ij} 恰好是对应于 $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ 的 Christoffel 记号；而对于仿射联络空间 (M,D) 来说，Γ^k_{ij} 是由结构 D 给出的. 反过来，在局部坐标变换下满足一定的坐标变换规律的函数组 Γ^k_{ij} 在光滑流形 M 上给出了联络.

定理 2.2　设 M 是一个 m 维光滑流形，D 是 M 上的一个联络. 设 $(U_\alpha; x^i_\alpha)$，$(U_\beta; x^i_\beta)$ 是 M 的两个局部坐标系，且 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，则对应的联络系数 $\Gamma^{(\alpha)k}_{ij}$ 和 $\Gamma^{(\beta)r}_{pq}$ 满足下列坐标变换公式：

$$
\Gamma^{(\alpha)k}_{ij} \frac{\partial x^r_\beta}{\partial x^k_\alpha} = \Gamma^{(\beta)r}_{pq} \frac{\partial x^p_\beta}{\partial x^i_\alpha} \frac{\partial x^q_\beta}{\partial x^j_\alpha} + \frac{\partial^2 x^r_\beta}{\partial x^i_\alpha \partial x^j_\alpha}. \tag{2.4}
$$

反过来，设 $\{(U_\alpha; x^i_\alpha): \alpha \in I\}$ 是 M 的一个坐标覆盖. 如果对每一个 $\alpha \in I$，都指定了 m^3 个光滑函数 $\Gamma^{(\alpha)k}_{ij} \in C^\infty(U_\alpha)$，并且当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时，函数组 $\Gamma^{(\alpha)k}_{ij}$ 和 $\Gamma^{(\beta)r}_{pq}$ 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上满足关系式(2.4)，则在 M 上存在唯一的一个联络 D，使得 $\Gamma^{(\alpha)k}_{ij}$ 是 D 在自然标架场 $\{\frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}\}$ 下的联络系数.

证明　设 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，则在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上有

$$
\frac{\partial}{\partial x^i_\alpha} = \frac{\partial x^p_\beta}{\partial x^i_\alpha} \frac{\partial}{\partial x^p_\beta},
$$

因此

$$
\begin{aligned}
D_{\frac{\partial}{\partial x^j_\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha} &= \Gamma^{(\alpha)k}_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k_\alpha} = \Gamma^{(\alpha)k}_{ij} \frac{\partial x^r_\beta}{\partial x^k_\alpha} \frac{\partial}{\partial x^r_\beta} \\
&= D_{\frac{\partial}{\partial x^j_\alpha}} \left(\frac{\partial x^p_\beta}{\partial x^i_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x^p_\alpha} \right) \\
&= \frac{\partial^2 x^p_\beta}{\partial x^i_\alpha \partial x^j_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x^p_\beta} + \frac{\partial x^p_\beta}{\partial x^i_\alpha} \frac{\partial x^q_\beta}{\partial x^j_\alpha} D_{\frac{\partial}{\partial x^q_\beta}} \frac{\partial}{\partial x^p_\beta} \\
&= \left(\frac{\partial x^p_\beta}{\partial x^i_\alpha} \frac{\partial x^q_\beta}{\partial x^j_\beta} \Gamma^{(\beta)r}_{pq} + \frac{\partial^2 x^r_\beta}{\partial x^i_\alpha \partial x^j_\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x^r_\beta}.
\end{aligned}
$$

比较上式中基底向量 $\frac{\partial}{\partial x^r_\beta}$ 前的系数便得到(2.4)式.

反过来，若在每一个坐标系 $(U_\alpha; x^i_\alpha)$ 下指定了 m^3 个光滑函数 $\Gamma^{(\alpha)k}_{ij} \in$

$C^\infty(U_\alpha)$，它们在局部坐标变换时满足(2.3)式. 则对每一个光滑切向量场 $v \in \mathscr{X}(M)$，设 $v|_{U_\alpha} = v_\alpha^i \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$，并且命

$$Dv|_{U_\alpha} = \left(\mathrm{d}v_\alpha^k + v_\alpha^i \Gamma_{ij}^{(\alpha)k}\mathrm{d}x_\alpha^j\right)\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}, \tag{2.5}$$

则根据引理 1.2 的证明过程可知由(2.5)式定义的 $Dv|_{U_\alpha}$ 与局部坐标系$(U_\alpha; x_\alpha^i)$ 无关，即在 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时有

$$\left(Dv|_{U_\alpha}\right)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \left(Dv|_{U_\beta}\right)|_{U_\alpha \cap U_\beta}.$$

于是，由(2.5)式给出了映射 $D: \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \boldsymbol{X}(M)$，使得 $D_X v = C_1^1(X \otimes Dv)$. 很明显，$D$ 满足联络的条件(1) － (4).

定理 2.3　设 M 是具有第 2 可数公理的 m 维光滑流形，则在 M 上联络总是存在的.

证明　在局部上，指定联络相当于给出 m^3 个光滑函数 Γ_{ij}^k. 所以，问题是设法将局部上定义的联络拼接成大范围地定义在光滑流形 M 上的联络，其做法和黎曼度量存在性的证明相仿.

设$\{(U_\alpha; x_\alpha^i): \alpha \in I\}$ 是 M 的一个局部有限的坐标覆盖，$\{h_\alpha\}$ 是从属于它的单位分解，即 $h_\alpha \in C^\infty(M)$，$h_\alpha \geqslant 0$，$\sum_\alpha h_\alpha = 1$，$\mathrm{Supp}h_\alpha \subset U_\alpha$. 对每一个 $\alpha \in I$，在 U_α 上指定一个联络 $D^{(\alpha)}: \mathscr{X}(U_\alpha) \times \mathscr{X}(U_\alpha) \to \mathscr{X}(U_\alpha)$.

对于任意的 $X, Y \in \mathscr{X}(M)$，命

$$D_X Y = \sum_\alpha h_\alpha \cdot D^{(\alpha)}_{X|_{U_\alpha}}(Y|_{U_\alpha}), \tag{2.6}$$

其中

$$\begin{aligned} &\left(h_\alpha \cdot D^{(\alpha)}_{X|_{U_\alpha}}(Y|_{U_\alpha})\right)(p) \\ &= \begin{cases} h_\alpha(p) \cdot \left(D^{(\alpha)}_{X|_{U_\alpha}}(Y|_{U_\alpha})\right)(P), & \forall\, p \in U_\alpha, \\ 0, & \forall\, p \notin U_\alpha, \end{cases} \end{aligned} \tag{2.6}$$

显然 $h_\alpha \cdot D^{(\alpha)}_{X|_{U_\alpha}}(Y|_{U_\alpha}) \in \mathscr{X}(M)$. 容易证明，由(2.6)式定义的 $D_X Y$ 满足联络的条件.

定理 2.4　设(M,D) 是一个 m 维仿射联络空间，对于任意的 $X, Y \in \mathscr{X}(M)$，命

$$T(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X,Y], \tag{2.8}$$

则 $T: \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ 是 M 上的一个光滑的(1,2)型张量场，称为(M,D) 上的**挠率张量**.

证明　从定义式(2.8)可知 $T: \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ 是 2 重线性映射，并且 $T(X,Y) = -T(Y,X)$. 根据第三章定理 5.1，只要证明映射 T 对于

每一个自变量是 $C^\infty(M)$- 线性映射，则便得知 T 是 M 上光滑的(1,2) 型张量场. 为此，设 $f \in C^\infty(M)$，则

$$\begin{aligned}
&T(f\cdot X,Y)\\
&= D_{f\cdot X}Y - D_Y(f\cdot X) - [f\cdot X,Y]\\
&= f\cdot D_XY - Y(f)\cdot X - f\cdot D_YX + Y(f)\cdot X - f\cdot[X,Y]\\
&= f\cdot T(X,Y).
\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}
T(X,f\cdot Y) &= -T(f\cdot Y,X) = -f\cdot T(Y,X)\\
&= f\cdot T(X,Y).
\end{aligned}$$

证毕.

定义 2.2 设 (M,D) 是一个 m 维仿射联络空间，如果 D 的挠率张量 T 为零，则称联络 D 是**无挠**的.

在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，挠率张量 T 的分量是

$$\begin{aligned}
T^k_{ij} &= \mathrm{d}x^k\left(T\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)\\
&= \mathrm{d}x^k\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} - D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\\
&= \mathrm{d}x^k\left(\Gamma^l_{ji}\frac{\partial}{\partial x^l} - \Gamma^l_{ij}\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\\
&= \Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij},
\end{aligned}$$

因此

$$T = (\Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij})\frac{\partial}{\partial x^k}\otimes \mathrm{d}x^i\otimes \mathrm{d}x^j. \tag{2.9}$$

由此可见，联络 D 无挠的充分必要条件是 D 在任意一个自然标架场 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 下的联络系数 Γ^k_{ij} 关于下指标 i,j 是对称的.

在仿射联络空间 (M,D) 中，联络 D 不仅用来求光滑切向量场的协变导数，而且能够用来定义 M 上任意的光滑张量场的协变导数. 事实上，对于 $X \in \mathscr{X}(M)$，我们已有映射 $X: C^\infty(M)\to C^\infty(M)$，和 $D_X: \mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$. 为方便起见，我们把前一个映射也记为 $D_X: C^\infty(M)\to C^\infty(M)$. 为了获得 D_X 在 M 上任意的光滑张量场上的作用，只要约定：

(1) D_X 在 (r,s) 型光滑张量场上的作用所得结果仍然是一个 (r,s) 型光滑张量场，即 D_X 的作用保持张量场的类型不变；

(2) D_X 在张量积上的作用遵循 Leibniz 法则，即对于 M 上的光滑张量场 K,L 有

$$D_X(K\otimes L) = D_XK\otimes L + K\otimes D_XL;$$

(3)D_X 与张量的缩并运算 C 可交换，即对于 M 上的光滑张量场 K 有

$$D_X(C(K)) = C(D_X K).$$

按照上述约定不难得到 M 上任意的光滑张量场的协变导数. 首先，设 $\alpha \in A^1(M)$，则对于 $X \in \mathscr{X}(M)$，$D_X\alpha$ 仍是 M 上的一次微分式；于是，对于任意的 $Y \in \mathscr{X}(M)$ 有

$$\begin{aligned} D_X(\alpha(Y)) &= D_X(C_1^1(Y \otimes \alpha)) \\ &= C_1^1(D_X(Y \otimes \alpha)) \\ &= C_1^1(D_X Y \otimes \alpha + Y \otimes D_X\alpha), \end{aligned}$$

即

$$(D_X\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(D_X Y). \tag{2.10}$$

容易验证：上述右端关于自变量 Y 具有 $C^\infty(M)$ − 线性性质，故 $D_X\alpha$ 确实是 M 上的一次微分式.

一般地，设 τ 是 M 上的 (r,s) 型光滑张量场，于是 τ：$\underbrace{A^1(M) \times \cdots \times A^1(M)}_{r\text{个}} \times \underbrace{\mathscr{X}(M) \times \cdots \times \mathscr{X}(M)}_{s\text{个}} \to C^\infty(M)$ 是 $(r+s)$ 重的 $C^\infty(M)$- 线性映射. 任取 $\alpha^1, \cdots, \alpha^r \in A^1(M)$，$Y_1, \cdots, Y_s \in \mathscr{X}(M)$，则 $\tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^r, Y_1, \cdots, Y_s) \in C^\infty(M)$ 可以看作张量积

$$\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_s \otimes \tau$$

做累次缩并的结果，因此

$$\begin{aligned} & X(\tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^r, Y_1, \cdots, Y_s)) \\ &= \sum_{a=1}^{r} \tau(\alpha^1, \cdots, D_X\alpha^a, \cdots, \alpha^r, Y_1, \cdots, Y_s) \\ &+ \sum_{b=1}^{s} \tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^r, Y_1, \cdots, D_X Y_b, \cdots, Y_s) \\ &+ D_X\tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^r, Y_1, \cdots, Y_s), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & D_X\tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^r, Y_1, \cdots, Y_s) \\ &= X(\tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^r, Y_1, \cdots, Y_s)) \\ &- \sum_{a=1}^{r} \tau(\alpha^1, \cdots, D_X\alpha^a, \cdots, \alpha^r, Y_1, \cdots, Y_s) \\ &- \sum_{b=1}^{s} \tau(\alpha^1, \cdots, \alpha^r, Y_1, \cdots, D_X Y_b, \cdots, Y_s). \end{aligned} \tag{2.11}$$

同样，容易验证：上式右端关于每一个自变量 $\alpha^1, \cdots, \alpha^r, Y_1, \cdots, Y_s$ 都具有 $C^\infty(M)$- 线性性质.

定理 2.5　设(M,D)是一个m维仿射联络空间,则由(2.11)式定义的映射$D:\mathscr{T}^r_s(M)\times\mathscr{X}(M)\to\mathscr{T}^r_s(M)$,$D(\tau,X)=D_X\tau$,具有以下性质:

(1) $D_X(\tau+\mu)=D_X\tau+D_X\mu,\quad D_X(\lambda\cdot\tau)=\lambda\cdot D_X\tau$;

(2) $D_X(f\cdot\tau)=X(f)\tau+f\cdot D_X\tau$;

(3) $D_{X+Y}\tau=D_X\tau+D_Y\tau$;

(4) $D_{f\cdot X}\tau=f\cdot D_X\tau$,

其中$\tau,\mu\in\mathscr{T}^r_s(M)$,$X,Y\in\mathscr{X}(M)$,$\lambda\in\mathbf{R}$,$f\in C^\infty(M)$.

定理的证明可直接从(2.11)式得到,在此略去.

设$(U;x^i)$是M的一个局部坐标系,联络D在自然标架$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$下的系数是$\Gamma^k_{ij}$,那么

$$\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathrm{d}x^k\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=-\,\mathrm{d}x^k\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

$$=-\,\mathrm{d}x^k\left(\Gamma^l_{ij}\frac{\partial}{\partial x^l}\right)=-\,\Gamma^k_{ij},$$

因此

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\mathrm{d}x^k=-\,\Gamma^k_{ij}\mathrm{d}x^i.\tag{2.12}$$

由此可见,若$\alpha\in A^1(M)$,$\alpha|_U=\alpha_i\mathrm{d}x^i$,则

$$D_X\alpha|_U=X^i\left(\frac{\partial\alpha_j}{\partial x^i}-\alpha_k\Gamma^k_{ji}\right)\mathrm{d}x^j=X^i\alpha_{j,i}\mathrm{d}x^j,\tag{2.13}$$

其中

$$\alpha_{j,i}=\frac{\partial\alpha_j}{\partial x^i}-\alpha_k\Gamma^k_{ji}.$$

同理,对于$\tau\in\mathscr{T}^r_s(M)$,设

$$\tau|_U=\tau^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_s},$$

则

$$D_X\tau|_U=X^k\tau^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s},\tag{2.14}$$

其中

$$\begin{aligned}&\tau^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}\\&=\frac{\partial\tau^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}}{\partial x^k}+\sum_{a=1}^r\Gamma^{i_a}_{lk}\tau^{i_1\cdots l\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\\&-\sum_{b=1}^s\Gamma^l_{j_bk}\tau^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots l\cdots j_s}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

现在,假定(M,g)是一个m维黎曼流形,D是M上的一个联络(不是由g

诱导的联络)，则对于任意的 $X,Y,Z \in \mathscr{X}(M)$ 有

$$X(g(Y,Z)) = D_X g(Y,Z) + g(D_X Y,Z) + g(Y,D_X Z),$$

即

$$D_X g(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g(D_X Y,Z) - g(Y,D_X Z). \tag{2.16}$$

在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，设 $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$，则

$$D_X g = X^k g_{ij,k} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j, \tag{2.17}$$

其中

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} g_{lj} - \Gamma^l_{jk} g_{il}. \tag{2.18}$$

定义 2.3　设 D 是黎曼流形 (M,g) 上的一个联络. 如果 $Dg = 0$，则称联络 D 和黎曼度量 g 是**相容的**.

现在回过头去看黎曼度量 g 所诱导的联络 D，根据定理 1.3 的(5)和(6)，该联络 D 和黎曼度量 g 是相容的，并且是无挠的. 重要的是，在黎曼流形上具有这些性质的联络是唯一的.

定理 2.6　在黎曼流形 (M,g) 上存在唯一的一个与度量 g 相容的无挠联络 D. 通常称该联络为 (M,g) 上的**黎曼联络**，或 **Levi-Civita 联络**.

证明　在 §1 的定理 1.3 已经证明由 g_{ij} 的 Christoffel 记号给出的协变微分算子 D 是 (M,g) 上的与度量 g 相容的无挠联络，下面证明定理的唯一性部分.

假定 $\widetilde{D}$ 是 (M,g) 上任意一个与度量 g 相容的无挠联络. 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，设

$$\widetilde{D}_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \widetilde{\Gamma}^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

根据 $\widetilde{D}$ 与 g 的相容性和无挠性，由(2.18)式和(2.9)式得到

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \widetilde{\Gamma}^l_{ik} g_{lj} + \widetilde{\Gamma}^l_{jk} g_{il},$$

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \widetilde{\Gamma}^k_{ji}.$$

由此不难得到

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 2\widetilde{\Gamma}^l_{ij} g_{lk},$$

因此 $\widetilde{\Gamma}^l_{ij}$ 恰好是由 g_{ij} 所决定的 Christoffel 记号. 证毕.

§3　曲率张量

在黎曼流形 (M,g) 上利用黎曼联络可以构造出曲率张量场，它反映了该黎曼流形的内在性质.

定理 3.1　设 D 是黎曼流形 (M,g) 上的黎曼联络，对于任意的 $X,Y,Z\in\mathscr{X}(M)$，命

$$R(X,Y)Z=D_XD_YZ-D_YD_XZ-D_{[X,Y]}Z \tag{3.1}$$

则由上式定义的映射 $R:\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M),(Z,X,Y)\longmapsto R(X,Y)Z$ 是光滑流形 M 上的 $(1,3)$ 型光滑张量场，称为 (M,g) 的**曲率张量场**.

证明　很明显，由(3.1)式定义的映射 R 是 3 重线性映射. 为了证明 R 是 $(1,3)$ 型张量场，只要证明 $R(X,Y)Z$ 关于每一个自变量是 $C^\infty(M)$- 线性的.

设 $f\in C^\infty(M)$，于是

$$\begin{aligned}R(f\cdot X,Y)Z&=D_{f\cdot X}D_YZ-D_YD_{f\cdot X}Z-D_{[fX,Y]}Z\\&=f\cdot D_XD_YZ-D_Y(f\cdot D_XZ)-D_{f\cdot[X,Y]-Y(f)X}Z\\&=f\cdot D_XD_YZ-Y(f)\cdot D_XZ\\&\quad-f\cdot D_YD_XZ-f\cdot D_{[X,Y]}Z+Y(f)D_XZ\\&=f\cdot(D_XD_YZ-D_YD_XZ-D_{[X,Y]}Z)\\&=f\cdot R(X,Y)Z.\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}R(X,f\cdot Y)Z&=-R(f\cdot Y,X)Z\\&=-f\cdot R(Y,X)Z=f\cdot R(X,Y)Z.\end{aligned}$$

另外，$R(X,Y)(f\cdot Z)$

$$\begin{aligned}&=D_XD_Y(f\cdot Z)-D_YD_X(f\cdot Z)-D_{[X,Y]}(f\cdot Z)\\&=D_X(Y(f)Z+f\cdot D_YZ)-D_Y(X(f)Z+f\cdot D_XZ)\\&\quad-[X,Y](f)\cdot Z-f\cdot D_{[X,Y]}Z\\&=X(Y(f))\cdot Z+Y(f)\cdot D_XZ+X(f)\cdot D_YZ+f\cdot D_XD_YZ\\&\quad-Y(X(f))\cdot Z-X(f)\cdot D_YZ-Y(f)\cdot D_XZ\\&\quad-fD_YD_XZ-[X,Y](f)\cdot Z-f\cdot D_{[X,Y]}Z\\&=f\cdot(D_XD_YZ-D_YD_XZ-D_{[X,Y]}Z)\\&=f\cdot R(X,Y)Z.\end{aligned}$$

根据第三章定理 5.1，$R:\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\longrightarrow\mathscr{X}(M),(Z,X,Y)\longmapsto R(X,Y)Z$ 是 M 上的 $(1,3)$ 型光滑张量场.

在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，曲率张量 R 的分量是

$$\begin{aligned}R^l_{kij}&=\mathrm{d}x^l\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\\&=\mathrm{d}x^l\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k}-D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k}\right.\end{aligned}$$

$$= dx^l\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\Gamma^h_{kj}\frac{\partial}{\partial x^h}\right)-D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\Gamma^h_{ki}\frac{\partial}{\partial x^h}\right)\right)$$

$$= dx^l\left(\frac{\partial\Gamma^h_{kj}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^h}+\Gamma^h_{kj}\Gamma^p_{hi}\frac{\partial}{\partial x^p}-\frac{\partial\Gamma^h_{ki}}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial}{\partial x^h}-\Gamma^h_{ki}\Gamma^p_{hj}\frac{\partial}{\partial x^p}\right)$$

$$= \frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j}+\Gamma^h_{kj}\Gamma^l_{hi}-\Gamma^h_{ki}\Gamma^l_{hj}, \tag{3.2}$$

因此

$$R = R^l_{kij}dx^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^l}\otimes dx^i\otimes dx^j. \tag{3.3}$$

若给定 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$，则 $R(X,Y):\mathscr{X}(M)\longrightarrow\mathscr{X}(M)$ 成为 M 上的 (1,1) 型张量场，即

$$R(X,Y) = X^iY^jR^l_{kij}dx^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^l}. \tag{3.4}$$

通常称 $R(X,Y)$ 为**曲率算子**.

定义 3.1 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形. 对于任意的 $X,Y,Z,W\in\mathscr{X}(M)$，命

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(Z,W)X,Y) \tag{3.5}$$

则 $R:\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\longrightarrow C^\infty(M)$ 是 M 上的 4 阶协变张量场，称为 (M,g) 的**黎曼曲率张量场**.

这里，无论是(1,3) 型的曲率张量场和 4 阶协变的黎曼曲率张量场，用的是同一个记号 R. 首先，从上、下文来看意义是明确的，不会引起混淆. 其次，从第一章定理 4.5 的角度来看，它们是同一个张量场的不同表现形式. 实际上，

$$\begin{aligned}R_{klij} &= R\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l},\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\ &= g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\\ &= g\left(R^h_{kij}\frac{\partial}{\partial x^h},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\\ &= g_{lh}R^h_{kij},\end{aligned} \tag{3.6}$$

反过来

$$R^l_{kij} = g^{lh}R_{khij}. \tag{3.7}$$

定理 3.2 设 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形，则它的黎曼曲率张量有下列性质：

(1) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$；

(2) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$；

(3) $R(X,Y,Z,W)+R(X,Z,W,Y)+R(X,W,Y,Z)=0$.

其中 $X,Y,Z,W \in \mathscr{X}(M)$. 性质(3) 称为 **Bianchi 恒等式**.

证明　(1) 由于 $R(Z,W) = -R(W,Z)$,故由(3.5) 式得到

$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z).$$

另外,由(3.1)、(3.5) 式得到

$$R(X,Y,Z,W) = g(D_Z D_W X - D_W D_Z X - D_{[Z,W]}X, Y).$$

然而

$$\begin{aligned} & g(D_Z D_W X, Y) = Z(g(D_W X, Y)) - g(D_W X, D_Z Y) \\ = & Z(W(g(X,Y)) - g(X, D_W Y)) - W(g(X, D_Z Y)) + g(X, D_W D_Z Y) \\ = & Z(W(g(X,Y))) - Z(g(X, D_W Y)) - W(g(X, D_Z Y)) + g(X, D_W D_Z Y), \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} g(D_W D_Z X, Y) = & W(Z(g(X,Y))) - W(g(X, D_Z Y)) \\ & - Z(g(X, D_W Y)) + g(X, D_Z D_W Y), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & g(D_Z D_W X, Y) - g(D_W D_Z X, Y) \\ = & Z(W(g(X,Y))) - W(Z(g(X,Y))) + g(X, D_W D_Z Y) - g(X, D_Z D_W Y) \\ = & [Z,W](g(X,Y)) + g(X, D_W D_Z Y) - g(X, D_Z D_W Y), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} g(R(Z,W)X, Y) = & g(R(W,Z)Y, X) \\ = & -g(R(Z,W)Y, X), \end{aligned}$$

故 $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$.

(3) 直接计算得到

$$\begin{aligned} & R(Z,W)X + R(W,X)Z + R(X,Z)W \\ = & D_Z D_W X - D_W D_Z X - D_{[Z,W]}X + D_W D_X Z - D_X D_W Z \\ & - D_{[W,X]}Z + D_X D_Z W - D_Z D_X W - D_{[X,Z]}W \\ = & D_Z[W,X] - D_{[W,X]}Z + D_W[X,Z] - D_{[X,Z]}W + D_X[Z,W] - D_{[Z,W]}X \\ = & [Z,[W,X]] + [W,[X,Z]] + [X,[Z,W]], \end{aligned}$$

于是由 Jacobi 恒等式得到

$$R(Z,W)X + R(W,X)Z + R(X,Z)W = 0. \tag{3.8}$$

因此

$$\begin{aligned} & g(X,Y,Z,W) + g(Z,Y,W,X) + g(W,Y,X,Z) \\ = & g(R(Z,W)X + R(W,X)Z + R(X,Z)W, Y) = 0. \end{aligned}$$

再利用(1),便得到(3).

(2) 从(3) 式得到

$$R(X,Y,Z,W) + R(X,Z,W,Y) + R(X,W,Y,Z) = 0,$$

$$R(Y,Z,W,X)+R(Y,W,X,Z)+R(Y,X,Z,W)=0,$$
$$R(Z,W,X,Y)+R(Z,X,Y,W)+R(Z,Y,W,X)=0,$$
$$R(W,X,Y,Z)+R(W,Y,Z,X)+R(W,Z,X,Y)=0.$$

将上面四个式子适当地加、减，则得

$$2R(X,Y,Z,W)-2R(Z,W,X,Y)=0,$$

即

$$R(X,Y,Z,W)=R(Z,W,X,Y).$$

证毕.

下面，我们用活动标架法来讨论光滑流形 M 上的联络. 设 $\{e_i\}$ 是在开集 U 上定义的局部标架场，对偶的余标架场记为 $\{\omega^i\}$. 设

$$D_{e_j}e_i=\Gamma^k_{ij}e_k, \tag{3.9}$$

$$\omega^k_i=\Gamma^k_{ij}\omega^j, \tag{3.10}$$

则

$$De_i=\omega^k_i e_k. \tag{3.11}$$

通常把 ω^k_i 称为**联络形式**.

定理 3.3 设 (M,D) 是一个 m 维仿射联络空间，$\{e_i\}$ 是定义在 M 的开子集 U 上的局部标架场，对偶的余标架场是 $\{\omega^i\}$，联络形式是 ω^j_i，则

$$\Omega^i\equiv \mathrm{d}\omega^i-\omega^j\wedge\omega^i_j=\frac{1}{2}T^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k, \tag{3.12}$$

其中 T^i_{jk} 是 D 的挠率张量 T 在局部标架场 $\{e_i\}$ 下的分量. 2 次外微分式 Ω^i 称为在局部标架场 $\{e_i\}$ 下的**挠率形式**，且

$$T|_U=e_i\otimes\Omega^i. \tag{3.13}$$

证明 Ω^i 是 U 上的 2 次外微分式，故由第四章推论 2.3 得

$$\begin{aligned}\Omega^i(e_j,e_k)&=(\mathrm{d}\omega^i-\omega^l\wedge\omega^i_l)(e_j,e_k)\\&=e_j(\omega^i(e_k))-e_k(\omega^i(e_j))-\omega^i([e_j,e_k])\\&\quad-\omega^l(e_j)\omega^i_l(e_k)+\omega^l(e_k)\omega^i_l(e_j)\\&=-\Gamma^i_{jk}+\Gamma^i_{kj}-\omega^i([e_j,e_k])\\&=\omega^i(D_{e_j}e_k-D_{e_k}e_j-[e_j,e_k])\\&=\omega^i(T(e_j,e_k))=T^i_{jk},\end{aligned}$$

因此

$$\Omega^i=\frac{1}{2}\Omega^i(e_j,e_k)\omega^j\wedge\omega^k=\frac{1}{2}T^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k.$$

在另一方面，

$$T=T^i_{jk}e_i\otimes\omega^j\otimes\omega^k$$

$$= \Omega^i(e_j, e_k) e_i \otimes \omega^j \otimes \omega^k$$
$$= e_i \otimes (\Omega^i(e_j, e_k) \omega^j \otimes \omega^k)$$
$$= e_i \otimes \frac{1}{2} \Omega^i(e_j, e_k)(\omega^j \otimes \omega^k - \omega^k \otimes \omega^j)$$
$$= e_i \otimes \frac{1}{2} \Omega^i(e_j, e_k)(\omega^j \wedge \omega^k) = e_i \otimes \Omega^i.$$

推论 3.4　设(M,D)是一个m维仿射联络空间，则D是无挠联络的充分必要条件是联络形式ω_j^i满足结构方程

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i. \tag{3.14}$$

定理 3.5　设(M,g)是一个m维黎曼流形，D是黎曼联络．设$\{e_i\}$是定义在M的开子集U上的局部标架场，对偶的余标架场是$\{\omega^i\}$，联络形式是ω_i^j，则

$$\Omega_j^i \equiv d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \tag{3.15}$$

其中R_{jkl}^i是曲率张量R在局部标架场$\{e_i\}$下的分量．2 次外微分式Ω_j^i称为在局部标架场$\{e_i\}$下的**曲率形式**，并且

$$R|_U = \omega^j \otimes e_i \otimes \Omega_j^i. \tag{3.16}$$

证明　Ω_j^i是U上的 2 次外微分式，故由第四章推论 2.3 得

$$\begin{aligned}
\Omega_j^i(e_k, e_l) &= (d\omega_j^i - \omega_j^h \wedge \omega_h^i)(e_k, e_l) \\
&= e_k(\omega_j^i(e_l)) - e_l(\omega_j^i(e_k)) - \omega_j^i([e_k, e_l]) - \omega_j^h(e_k)\omega_h^i(e_l) + \omega_j^h(e_l)\omega_h^i(e_k) \\
&= e_k(\Gamma_{jl}^i) - e_l(\Gamma_{jk}^i) - \omega^h([e_k, e_l])\Gamma_{jh}^i - \Gamma_{jk}^h \Gamma_{hl}^i + \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

在另一方面，

$$\begin{aligned}
R(e_k, e_l) e_j &= D_{e_k} D_{e_l} e_j - D_{e_l} D_{e_k} e_j - D_{[e_k, e_l]} e_j \\
&= D_{e_k}(\Gamma_{jl}^h e_h) - D_{e_l}(\Gamma_{jk}^h e_h) - \omega^h([e_k, e_l]) D_{e_h} e_j \\
&= (e_k(\Gamma_{jl}^i) - e_l(\Gamma_{jk}^i) + \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i - \Gamma_{jk}^h \Gamma_{hl}^i - \omega^h([e_k, e_l])\Gamma_{jh}^i) e_i \\
&= R_{jkl}^i e_i,
\end{aligned}$$

因此

$$\Omega_j^i(e_k, e_l) = R_{jkl}^i, \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_j^i &= \frac{1}{2} \Omega_j^i(e_k, e_l) \omega^k \wedge \omega^l \\
&= \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l.
\end{aligned}$$

另外，

$$\begin{aligned}
R &= R_{jkl}^i \omega^j \otimes e_i \otimes \omega^k \otimes \omega^l \\
&= \omega^j \otimes e_i \otimes \frac{1}{2} R_{jkl}^i (\omega^k \otimes \omega^l - \omega^l \otimes \omega^k) = \omega^j \otimes e_i \otimes \Omega_j^i.
\end{aligned}$$

注记　对于仿射联络空间(M,D)，曲率张量$R: \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \times$

$\mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ 能够按照(3.1)式同样定义.但是(3.5)式无法定义.此时,(3.15)式和(3.16)式是成立的.

定理 3.6 设(M,g)是m维黎曼流形.如果它的曲率张量为零,则在每一点$x \in M$都存在一个局部坐标系$(U;x^i)$,使得

$$g|_U = \sum_{i=1}^m dx^i \otimes dx^i. \tag{3.19}$$

曲率张量为零的黎曼流形称为**局部欧氏空间**.

证明 设$x_0 \in M$,$(U;x^i)$是x_0的一个局部坐标系.在U上任意取定一个单位正交标架场$\{e_i\}$,设对偶的余标架场为$\{\omega^i\}$,联络形式为$\{\omega_i^j\}$,则ω^i,ω_i^j都是U上的坐标$x^1,\cdots,x^m$的1次微分式,并且

$$g = \sum_{i=1}^m \omega^i \otimes \omega^i. \tag{3.20}$$

由于D是无挠的,故

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i; \tag{3.21}$$

由于D和度量g的相容性,故

$$0 = d(g(e_i,e_j)) = g(De_i,e_j) + g(e_i,De_j),$$

即

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{3.22}$$

现在假定D的曲率张量为零,故

$$d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{3.23}$$

考虑E^m上的标架空间$\widetilde{\mathscr{P}}$,其中点的坐标记为$a^i,a_i^j,\det(a_i^j) \neq 0$(参看第一章§1和第四章§4,(4.7)式),则$E^m$中活动标架的相对分量为

$$\tilde{\omega}^i = b_k^i da^k, \quad \tilde{\omega}_i^j = b_k^j da_i^k, \tag{3.24}$$

其中(b_j^i)是(a_j^i)的逆矩阵.

在空间$U \times \widetilde{\mathscr{P}}$上考虑Pfaff方程组

$$\begin{cases} \theta^i \equiv da^i - a_j^i \omega^j = 0, \\ \theta_i^j \equiv da_i^j - a_k^j \omega_i^k = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

对θ^i,θ_i^j求外微分,并且利用(3.21),(3.23)式得到

$$\begin{aligned} d\theta^i &= -da_j^i \wedge \omega^j - a_j^i d\omega^j \\ &= -(\theta_j^i + a_k^i \omega_j^k) \wedge \omega^j - a_j^i \omega^k \wedge \omega_k^j \\ &= \omega^j \wedge \theta_j^i, \\ d\theta_i^j &= -da_k^j \wedge \omega_i^k - a_k^j d\omega_i^k \\ &= -(\theta_k^j + a_l^j \omega_k^l) \wedge \omega_i^k - a_k^j \cdot \omega_i^l \wedge \omega_l^k \\ &= \omega_i^k \wedge \theta_k^j, \end{aligned}$$

由此可见 Pfaff 方程组(3.25) 满足 Frobenius 条件,故该方程组完全可积. 于是,根据第四章定理 3.2 的充分性的直接证明可知:对于任意给定的初始值 (x_0^i, a_0^i, a_{0i}^j),其中$(x_0^i) \in U$,且

$$\sum_{k=1}^{m} a_{0i}^k a_{0j}^k = \delta_{ij}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant m, \tag{3.26}$$

则方程组(3.25) 有唯一的一组解 $a^i = a^i(x^1, \cdots, x^m)$, $a_i^j = a_i^j(x^1, \cdots, x^m)$ 满足初条件

$$\begin{cases} a^i(x_0^1, \cdots, x_0^m) = a_0^i, \\ a_i^j(x_0^1, \cdots, x_0^m) = a_{0i}^j. \end{cases} \tag{3.27}$$

我们断言:这组解在 U 上满足条件

$$\sum_{k=1}^{m} a_i^k(x) a_j^k(x) = \delta_{ij}. \tag{3.28}$$

事实上,令

$$h_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{m} a_i^k(x) a_j^k(x) - \delta_{ij}, \tag{3.29}$$

则由条件(3.26) 得到 $h_{ij}(x_0^1, \cdots, x_0^m) = 0$. 对 $h_{ij}(x)$ 求微分得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}h_{ij}(x) &= \sum_k (\mathrm{d}a_i^k(x) \cdot a_j^k(x) + a_i^k(x) \cdot \mathrm{d}a_j^k(x)) \\ &= \sum_{k,l} (a_l^k(x)\omega_i^l a_j^k(x) + a_i^k(x) a_l^k(x)\omega_j^l) \\ &= \sum_l ((h_{lj}(x) + \delta_{lj})\omega_i^l + (h_{il}(x) + \delta_{il})\omega_j^l) \\ &= \sum_k (\omega_i^k \cdot h_{kj}(x) + \omega_j^k \cdot h_{ik}(x)), \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant m, \end{aligned} \tag{3.30}$$

其中最后一个等号用到了条件(3.22). 所以,$h_{ij}(x)$ 满足线性齐次方程组(3.30),以及初条件 $h_{ij}(x_0) = 0$. 由方程组(3.30) 在初条件下解的唯一性得到

$$h_{ij}(x) \equiv 0,$$

即(3.28) 成立,这说明$(a_i^j(x))$是正交矩阵.

由 Pfaff 方程组的第一组方程得到

$$\mathrm{d}a^1(x) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a^m(x) = \det(a_i^j(x)) \cdot \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^m \neq 0.$$

因此 $a^i = a^i(x^1, \cdots, x^m)$, $1 \leqslant i \leqslant m$ 在点 x_0 的一个开邻域 V 内给出了一个新的局部坐标系,在此坐标系下

$$\begin{aligned} g|_V &= \sum_{i=1}^{m} \omega^i \otimes \omega^i \\ &= \sum_{k,l} \delta_{kl} \omega^k \otimes \omega^l \\ &= \sum_{i,k,l} a_k^i a_l^i \omega^k \otimes \omega^l \end{aligned}$$

$$= \sum_i \mathrm{d}a^i \otimes \mathrm{d}a^i.$$

证毕.

注记　定理 3.6 说明曲率张量衡量了黎曼度量偏离欧氏度量的程度.

§4　黎曼流形上的若干微分算子

至此我们已经熟悉了微分流形的基本概念，以及在微分结构的基础上能够定义的一些对象，如光滑函数，光滑切向量场，光滑张量场和外微分式等等．但是，微分流形作为大范围分析的舞台，往往需要在微分流形上指定一个基本的度量张量场. 换言之，在实际应用中常常是以黎曼流形作为舞台的. 究其原因，首先，客观世界是有度量的，作为欧氏空间的推广应该是黎曼流形，它在每一点的切空间上有欧氏度量. 其次，从技术上来讲由于指定了基本度量张量，切向量场可以转化为对偶的一次微分式(余切向量场)，张量场的协变指标与反变指标可以互相转换，线性算子可以转换成对偶的线性算子. 总之，基本度量张量场可用以建立某些对象与其对偶的对象的联系，为构造流形上的不变量提供了有力的手段. 另外，基本度量张量场的存在使人们能够对 M 上的光滑张量场求协变微分，得到协变阶数增加 1 的张量场，从而能对张量场继续求微分，获得张量场的高阶协变微分. 若只考虑流形的微分结构，而没有流形上的黎曼结构，这一切是做不到的.

以下我们总是假设(M,g)是有向的 m 维黎曼流形，其中 g 是基本度量张量场. 本节的目的是介绍黎曼流形上若干重要的微分算子，它们在许多分支学科中扮演重要的角色. 在这个初等的课程中，我们只限于对它们的定义及性质有一个初步的了解. 进一步的学习可以参看[2]，[8].

用 D 表示黎曼流形(M,g)上的协变微分算子. 设 $X\in\mathscr{X}(M)$，则 DX 是 M 上光滑的$(1,1)$型张量场. 将 DX 作缩并，便得到 M 上的一个光滑函数，记为

$$\mathrm{div}X = C_1^1(DX). \tag{4.1}$$

其中 C_1^1 表示张量场关于第一个反变指标和第一个协变指标的缩并(参看第一章 §4).

很明显，div 作为从 $\mathscr{X}(M)$ 到 $C^\infty(M)$ 的映射是线性的.

定义 4.1　线性映射 $\mathrm{div}:\mathscr{X}(M)\to C^\infty(M)$ 称为黎曼流形(M,g)上的**散度算子**. 设 $X\in\mathscr{X}(M)$，则称 $\mathrm{div}X$ 为切向量场 X 的**散度**.

我们来求散度算子 div 的局部坐标表达式. 设$(U;x^i)$是 M 的一个局部坐标系，令

$$X|_U = X^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

则

$$X^i_{,j} = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma^i_{kj},$$

其中 Γ^i_{kj} 是度量张量 $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ 的 Christoffel 记号. 因此

$$\mathrm{div} X = X^i_{,i} = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^k \Gamma^i_{ki}. \tag{4.2}$$

对于切向量场 X 的分量而言,散度算子 div 是一阶微分算子

由 Christoffel 记号的表达式(1.5) 式可知

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^k}, \tag{4.3}$$

其中 $G = \det(g_{ij})$. 注意,函数 G 本身在坐标变换下不是不变量,故它不是在 M 上大范围定义的光滑函数. 这样,(4.2) 式成为

$$\begin{aligned} \mathrm{div} X &= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{X^k}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{G} X^i). \end{aligned} \tag{4.4}$$

现设 $f \in C^\infty(M)$,则 $\mathrm{d}f$ 是 M 上的 1 次微分式. 利用基本度量张量 g,可以得到与 $\mathrm{d}f$ 对偶的光滑切向量场 ∇f(参看第三章 §5,例 6),称为函数 f 的**梯度**. 将散度算子 div 用于切向量场 ∇f,便得到从 $C^\infty(M)$ 到 $C^\infty(M)$ 的线性映射,记作 $\tilde{\Delta}: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$,即:对于任意的 $f \in C^\infty(M)$,

$$\tilde{\Delta} f = \mathrm{div}(\nabla f). \tag{4.5}$$

定义 4.2 线性映射 $\tilde{\Delta}: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 称为黎曼流形 (M,g) 上的 Beltrami-Laplace **算子**.

在下面我们还要介绍 Hodge-Laplace 算子,记为 Δ. 这两个算子作用在光滑函数上时只差一个符号. 为了区分这两个算子,所以我们把 Beltrami-Laplace 算子记为 $\tilde{\Delta}$. 从定义式(4.5) 可知,Beltrami-Laplace 算子 $\tilde{\Delta}$ 是作用在光滑函数 f 上的 2 阶微分算子.

在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下,我们有

$$\mathrm{d}f|_U = \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i,$$

所以

$$\nabla f|_U = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{4.6}$$

其中

$$v^i = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}. \tag{4.7}$$

代入(4.4)式得到

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta} f &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{G}v^i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Beltrami-Laplace 算子还有另一个来源. 设 $f \in C^\infty(M)$，则 $\mathrm{d}f \in A^1(M) = \mathscr{T}^0_1(M)$. 对 1 阶协变张量场 $\mathrm{d}f$ 再作一次协变微分得到 2 阶协变张量场，记为 $H(f) = D(\mathrm{d}f) \in \mathscr{T}^0_2(M)$.

在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，设

$$\mathrm{d}f = f_i \mathrm{d}x^i,$$

其中 $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$，则

$$f_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} - f_k\Gamma^k_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}. \tag{4.9}$$

由此可见

$$f_{i,j} = f_{j,i},$$

故 2 阶协变张量 $H(f)$ 是对称的，其表达式是

$$H(f)|_U = f_{i,j}\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^i. \tag{4.10}$$

定义 4.3　线性映射 $H: C^\infty(M) \to \mathscr{T}_2{}^0(M)$ 称为黎曼流形 (M,g) 上的 Hessian **算子**. 对于任意的 $f \in C^\infty(M)$，$H(f)$ 是 M 上对称的 2 阶协变张量场，称为 f 的 Hessian.

容易证明

$$\tilde{\Delta} f = g^{ij}f_{i,j}, \tag{4.11}$$

即 $\tilde{\Delta} f$ 是度量张量 g^{ij} 与 f 的 Hessian，$(H(f))_{ij} = f_{i,j}$ 作缩并的结果.

顺便提一句，微分式 $\mathrm{d}f$ 的零点(称为光滑函数 f 的临界点)与对偶切向量场 ∇f 的零点(称为切向量场 ∇f 的奇点)是一致的. 若在点 $p \in M$，$\mathrm{d}f(p) = 0$，但是 $(H(f))(p) \neq 0$，则称 p 是 f 的非退化临界点. 此时，$(H(f))_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ 正好是函数 f 关于局部坐标的 2 次偏微商. 在作适当的坐标变换之后，f 在点 p 附近可以写成标准的形式

$$f = f(p) - (x^1)^2 - \cdots - (x^r)^2 + (x^{r+1})^2 + \cdots + (x^n)^2.$$

这里的 r 与坐标系的选取是无关的，称为 f 在非退化临界点 p 的指标. f 的非退化临界点必定是孤立的. 在紧致的光滑流形上存在只有非退化临界点的光

滑函数，这种函数称为Morse函数. 微分流形上Morse函数的临界点理论是研究微分流形拓扑的一个重要方面，在非线性分析中也有重要的应用. 读者可阅读Milnor的有名的专著[6]. 根据紧致光滑流形上有孤立奇点的光滑切向量场的Hopf定理(第三章 §2)，M上的Morse函数的临界点的性状与流形本身的拓扑有密切的联系，这在Milnor的书中有详细的叙述.

定义 4.4　设 $f \in C^\infty(M)$ 若函数 f 满足方程

$$\tilde{\Delta} f = 0, \tag{4.12}$$

则称 f 是黎曼流形(M,g)上的**调和函数**. 一般地，若有常数 λ 使得 f 满足方程

$$\tilde{\Delta} f = -\lambda f, \tag{4.13}$$

则称 λ 是黎曼流形(M,g)的一个**特征值**，函数 f 称为对应于特征值 λ 的**特征函数**.

当(M,g)是紧致黎曼流形时，它的特征值是离散的：

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \to \infty$$

称为黎曼流形(M,g)的谱. M上的调和函数恰好是对应于 $\lambda_1 = 0$ 的特征函数. 黎曼流形(M,g)的谱，各个特征值的重数是黎曼流形的重要的不变量. 谱问题的研究，及有关的热方程的研究是大范围黎曼几何在当前的研究课题. 这方面的基本文献是[18]和[20].

在有向的黎曼流形(M,g)上有体积元素，这是一个 m 次外微分式 Ω，它在定向相符的局部坐标系$(U;x^i)$下的表达式是

$$\Omega|_U = \sqrt{G}\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m, \tag{4.14}$$

其中 $G = \det(g_{ij})$. 上式右端的表达式在保持定向的坐标变换下是不变的. 因此，M上任意一个有紧致支撑集的光滑函数 f 能够在 M 上积分，它就是 m 次外微分式 $f\Omega$ 在 M 上的积分 $\int_M f\Omega$.

作为Stokes定理的推论，我们有

定理 4.1　设(M,g)是 m 维有向的紧致无边黎曼流形，则对于 M 上任意一个光滑的切向量场 X 有

$$\int_M (\mathrm{div}X)\Omega = 0. \tag{4.15}$$

证明　由(4.4)式得到

$$\begin{aligned}&(\mathrm{div}X)\Omega \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{G}X^i)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \\ &= d\Big(\sum_{i=1}^m (-1)^{i+1}\sqrt{G}X^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m\Big).\end{aligned} \tag{4.16}$$

令

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \sqrt{G} X^i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m. \tag{4.17}$$

容易验证 ω 的表达式(4.17) 与 M 上定向相符的局部坐标系的选取无关,因而 ω 是在 M 上大范围定义的 $m-1$ 次外微分式. (4.16) 式成为

$$(\mathrm{div}X)\Omega = \mathrm{d}\omega. \tag{4.18}$$

由 Stokes 定理,我们得到

$$\int_M (\mathrm{div}X)\Omega = \int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega = 0.$$

若定理 4.1 中的黎曼流形是带边流形,则我们能得到更精细的结果:

定理 4.2 设 (M,g) 是 m 维有向的紧致带边黎曼流形,则对于 M 上任意一个光滑切向量场 X 有

$$\int_M (\mathrm{div}X)\Omega = -\int_{\partial M} g(N,X)\tilde{\Omega}, \tag{4.19}$$

其中 N 是 ∂M 上指向内的单位法向量,∂M 有从 M 诱导的定向,$\tilde{\Omega}$ 是 ∂M 的体积元素.

证明 如定理 4.1 的证明所述,

$$(\mathrm{div}X)\Omega = \mathrm{d}\omega,$$

其中 ω 是(4.17) 式给出的 $m-1$ 次外微分式. 由 Stokes 定理得到

$$\int_M (\mathrm{div}X)\Omega = \int_{\partial M} \omega, \tag{4.20}$$

其中 ∂M 具有从 M 诱导的定向.

为了把 $\omega|_{\partial M}$ 表示出来,取定向相符的局部坐标系 $(U;x^i)$,使得 $U \cap \partial M \neq \varnothing$,

$$U \cap \partial M = \{p \in U : x^m(p) = 0\},$$

且在 U 内有 $x^m \geqslant 0$. 这样,在 $U \cap \partial M$ 上有诱导定向的局部坐标系是由 $(-1)^m \cdot x^1, x^2, \cdots, x^{m-1}$ 给出的,于是在 $U \cap \partial M$ 上诱导的体积元素是

$$\tilde{\Omega} = (-1)^m \sqrt{\tilde{G}} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{m-1}, \tag{4.21}$$

其中 $\tilde{G} = \det(g_{\alpha\beta}), 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant m-1$. 由 ω 的表达式(6.17) 得到

$$\omega|_{U\cap\partial M} = (-1)^{m+1} \sqrt{G} X^m \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{m-1}. \tag{4.22}$$

现在,$(-1)^m \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{m-1}}$ 构成 $\partial M \cap U$ 上定向相符的标架场. 假设 N 是在 ∂M 上指向内的单位法向量场,故可令

$$N = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a^m > 0. \tag{4.23}$$

由假设得到

$$\begin{cases} g\left(N, \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = a^i g_{i\alpha} = 0, \\ g(N,N) = a^m a^i g_{im} = 1, \end{cases} \tag{4.24}$$

因此

$$a^m a^i = g^{mi},$$

$$a^i = \frac{g^{mi}}{\sqrt{g^{mm}}}. \tag{4.25}$$

由(4.24),(4.25) 两式得到

$$g_{\alpha m} = -\frac{a^\gamma}{a^m} g_{\alpha\gamma} = -\frac{g^{\gamma m}}{g^{mm}} g_{\alpha\gamma}, \tag{4.26}$$

因此

$$G = \det\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m-1} & g_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{m-11} & \cdots & g_{m-1m-1} & g_{m-1m} \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm-1} & g_{mm} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ * & g_{mm} + \dfrac{g^{m\gamma}}{g^{mm}} g_{m\gamma} \end{pmatrix}$$

$$= \tilde{G} \cdot \frac{1}{g^{mm}} = \tilde{G} \cdot \frac{1}{(a^m)^2},$$

$$\sqrt{G} = \frac{\sqrt{\tilde{G}}}{a^m}. \tag{4.27}$$

另一方面我们有

$$g(N,X) = X^m a^i g_{im} = \frac{X^m}{a^m}, \tag{4.28}$$

所以

$$\omega|_{U\cap\partial M} = (-1)^{m+1} \sqrt{\tilde{G}} \frac{X^m}{a^m} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{m-1}$$

$$= -g(N,X) \cdot \tilde{\Omega}|_{U\cap\partial M}. \tag{4.29}$$

将上式代入(4.20) 便得到所要的结果.

推论 4.3 设(M,g) 是 m 维有向的紧致带边黎曼流形,则对于任意的 $f \in C^\infty(M)$ 有

$$\int_M (\tilde{\Delta} f)\Omega = -\int_{\partial M} N(f) \cdot \tilde{\Omega}, \tag{4.30}$$

其中 N 是 ∂M 的指向内的单位法向量,∂M 有从 M 诱导的定向. 特别是,当 ∂M

$=\varnothing$ 时

$$\int_M (\tilde{\Delta} f)\Omega = 0. \tag{4.31}$$

证明　这是定理 4.2 的直接推论. 因为由定义

$$\tilde{\Delta} f = \mathrm{div}(\nabla f),$$

故只要将定理 4.2 用于切向量场 ∇f 就可以了. 此时,

$$g(N, \nabla f) = g_{ij} a^i (g^{jk} f_k) = a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = N(f). \tag{4.32}$$

除了对于光滑函数 f 有如上所定义的 Beltrami-Laplace 算子 $\tilde{\Delta}$ 之外, 对于 M 上的任意的外微分式还能定义 Hodge-Laplace 算子. 我们在这个课程中只限于简要地介绍它的定义及其初等的性质.

首先, 对于黎曼流形 (M,g) 上两个 r 次外微分式能够定义它们的内积. 设 $\varphi, \psi \in A^r(M)$, 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下, 它们的表达式为

$$\varphi|_U = \frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r},$$

$$\psi|_U = \frac{1}{r!}\psi_{i_1\cdots i_r} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}.$$

用 g_{ij} 记基本度量张量 g 的分量, $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$, 则令

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{r!} \varphi^{i_1\cdots i_r} \psi_{i_1\cdots i_r} = \sum_{i_1<\cdots<i_r} \varphi^{i_1\cdots i_r} \psi_{i_1\cdots i_r}, \tag{4.33}$$

其中

$$\varphi^{i_1\cdots i_r} = \varphi_{j_1\cdots j_r} g^{j_1 i_1} \cdots g^{j_r i_r}.$$

由于 φ, ψ 都是张量场, 所以 (4.33) 式的右边与坐标系的选择是无关的, 故 $\langle \varphi, \psi \rangle$ 是 M 上大范围定义的光滑函数. 特别是, 外微分式 φ 在每一点的模长平方是

$$|\varphi|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle = \frac{1}{r!} \varphi^{i_1\cdots i_r} \varphi_{i_1\cdots i_r} \geqslant 0. \tag{4.34}$$

以下假定 (M,g) 是 m 维有向的紧致黎曼流形, 于是在 $A^r(M)$ 中可以定义内积如下:

$$(\varphi, \psi) = \int_M \langle \varphi, \psi \rangle \Omega, \tag{4.35}$$

$$\| \varphi \|^2 = \int_M \langle \varphi, \varphi \rangle \Omega. \tag{4.36}$$

我们已经知道外微分 d 是线性映射 $\mathrm{d}: A^r(M) \to A^{r+1}(M)$. $A^r(M)$ 作为内积空间, 自然可以定义 d 的共轭映射 $\delta: A^{r+1}(M) \to A^r(M)$, 使得

$$(d\varphi,\psi) = (\varphi,\delta\psi), \tag{4.37}$$

其中 $\varphi \in A^r(M)$，$\psi \in A^{r+1}(M)$. 我们的目标是求出共轭线性映射 δ 的表达式. 为此，先定义 Hodge 星算子 $*: A^r(M) \to A^{m-r}(M)$.

设 $(U;x^i)$ 是 M 的定向相符的局部坐标系；$\omega \in A^r(M)$，设 ω 的局部坐标表达式是

$$\omega|_U = \frac{1}{r!}\omega_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}.$$

令

$$*\omega|_U = \frac{1}{(m-r)!}\frac{\sqrt{G}}{r!}\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_m}\omega^{i_1\cdots i_r}dx^{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}. \tag{4.38}$$

容易证明，上式的右端在保持定向的坐标变换下是不变的（如对照体积元素 Ω 的表达式（4.14），则上述断言是明显成立的）. 因此，$*\omega$ 是在整个 M 上定义的 $m-r$ 次外微分式.

定义 4.5　线性映射 $*: A^r(M) \to A^{m-r}(M)$ 称为有向黎曼流形 (M,g) 上的 Hodge **星算子**.

下面的命题留给读者自己证明：

命题 4.4　设 (M,g) 是有向紧致的 m 维黎曼流形，则 Hodge 星算子 $*$ 有以下性质：

(1) 对任意的 $\varphi,\psi \in A^r(M)$ 有

$$\varphi \wedge *\psi = \langle\varphi,\psi\rangle\Omega; \tag{4.39}$$

(2) $*\Omega = 1$，　$*1 = \Omega$；

(3) 对任意的 $\varphi \in A^r(M)$ 有

$$*\circ *\varphi = (-1)^{rm+r}\varphi,$$

即

$$*\circ * = (-1)^{rm+r}\cdot \mathrm{id}: A^r(M) \to A^r(M); \tag{4.40}$$

(4) 对任意的 $\varphi,\psi \in A^r(M)$ 有

$$(*\varphi, *\psi) = (\varphi,\psi). \tag{4.41}$$

最后的式子表明，Hodge 星算子 $*$ 是从内积空间 $A^r(M)$ 到 $A^{m-r}(M)$ 的等距同构.

例 1　Hodge 星算子 $*$ 在 $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$ 上的作用.

外微分式 $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$ 的标准表达式为

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} = \frac{1}{r!}\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r},$$

其分量为 $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}$. 由（4.38）式得到

$$*dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

$$= \frac{1}{(m-r)!} \cdot \frac{\sqrt{G}}{r!} \delta^{1\cdots m}_{j_1\cdots j_m} g^{j_1 k_1} \cdots g^{j_r k_r} \delta^{i_1 \cdots i_r}_{k_1 \cdots k_r} \mathrm{d}x^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_m}$$

$$= \frac{\sqrt{G}}{(m-r)!} \cdot \frac{1}{r!} \delta^{1\cdots m}_{j_1\cdots j_m} \cdot \begin{vmatrix} g^{j_1 i_1} & \cdots & g^{j_1 i_r} \\ \vdots & & \vdots \\ g^{j_r i_1} & \cdots & g^{j_r i_r} \end{vmatrix} \mathrm{d}x^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_m}$$

$$= \sqrt{G} \sum_{\substack{j_1 < \cdots < j_r \\ j_{r+1} < \cdots < j_m}} \delta^{1\cdots m}_{j_1\cdots j_m} \begin{vmatrix} g^{i_1 j_1} & \cdots & g^{i_r j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ g^{i_1 j_r} & \cdots & g^{i_r j_r} \end{vmatrix} \mathrm{d}x^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_m}.$$

例 2 设 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中一张正则曲面，它的第一基本形式为

$$I = g_{\alpha\beta} \mathrm{d}u^\alpha \wedge \mathrm{d}u^\beta, \quad 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 2$$

那么由例 1 的公式得到

$$* \mathrm{d}u^1 = \sqrt{G}(g^{11}\mathrm{d}u^2 - g^{12}\mathrm{d}u^1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{G}}(g_{22}\mathrm{d}u^2 + g_{12}\mathrm{d}u^1),$$

$$* \mathrm{d}u^2 = \sqrt{G}(g^{21}\mathrm{d}u^2 - g^{22}\mathrm{d}u^1)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{G}}(g_{21}\mathrm{d}u^2 + g_{11}\mathrm{d}u^1),$$

其中

$$G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

另外，

$$* 1 = \sqrt{G} \mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2,$$

$$* (\mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2) = \frac{1}{\sqrt{G}}.$$

例 3 设 $\{\omega^i\}$ 是有向黎曼流形 (M, g) 上定向相符的单位正交余切标架场，则

$$g = \sum_i \omega^i \otimes \omega^i,$$

体积元素为

$$\Omega = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^m,$$

并且

$$\{\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} : i_1 < \cdots < i_r\}$$

处处是单位正交的．此时，Hodge 星算子的公式比较简单．我们有

$$* (\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^r) = \omega^{r+1} \wedge \cdots \wedge \omega^m,$$

一般地

$$* (\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r}) = \delta^{i_1 \cdots i_m}_{1 \cdots m} \omega^{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_m},$$

其中 $i_1 < \cdots < i_r$，且 $i_{r+1} < \cdots < i_m$ 是 $i_1, \cdots, i_r$ 在 $1, \cdots, m$ 中的互补指标.

特别是，如果 $m = 2$，则

$$*\omega^1 = \omega^2, \quad *\omega^2 = -\omega^1,$$

$$*1 = \omega^1 \wedge \omega^2, \quad *(\omega^1 \wedge \omega^2) = 1.$$

定义 4.6 设 (M,g) 是 m 维有向黎曼流形，线性映射

$$\delta = (-1)^{mr+m+1} * \circ \mathrm{d} \circ * : A^r(M) \to A^{r-1}(M)$$

称为 M 上的**余微分算子**. 显然，$\delta \circ \delta = 0$.

余微分算子的局部表达式是比较复杂的. 在实际应用中，通常是把余微分算子表示成协变微分算子. 我们把外微分 d 和余微分 δ 用协变微分表示的结果列在下面，其证明可参看[8] 的 §12. 但是读者不妨试着自己推导一遍，这是检查自己掌握外微分式理论和协变微分理论的程度的很好的练习.

命题 4.5 设 (M,g) 是有向的 m 维黎曼流形，$(U;x^i)$ 是定向相符的局部坐标系，$\varphi \in A^r(M)$ 的局部坐标表示式是

$$\varphi|_U = \frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r},$$

则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi &= \mathrm{d}x^i \wedge D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\varphi \\ &= \frac{1}{(r+1)!}\left(\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha+1}\varphi_{i_1\cdots\hat{i}_\alpha\cdots i_{r+1},i_\alpha}\right)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_{r+1}},\end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= -g^{ij} \cdot i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\varphi) \\ &= -\frac{1}{(r-1)!}\varphi^{\,i}_{\;i_1\cdots i_{r-1},i}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_{r-1}},\end{aligned} \tag{4.43}$$

其中 $i(X) : A^r(M) \to A^{r-1}(M)$ 称为对切向量场 X 作**内乘**，其定义是：对于任意的 $\omega \in A^r(M)$，及 $V_1, \cdots, V_{r-1} \in \mathscr{X}(M)$，

$$\begin{aligned}&(i(X)\omega)(V_1, \cdots, V_{r-1}) \\ &= \omega(X, V_1, \cdots, V_{r-1}).\end{aligned}$$

命题 4.6 设 (M,g) 是 m 维有向紧致的黎曼流形，则外微分 $\mathrm{d} : A^r(M) \to A^{r+1}(M)$ 和余微分 $\delta : A^{r+1}(M) \to A^r(M)$ 是关于内积 $(\ ,\ )$ 的互为共轭的线性算子.

证明 设 $\varphi \in A^r(M)$，$\psi \in A^{r+1}(M)$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\varphi \wedge *\psi) &= \mathrm{d}\varphi \wedge *\psi + (-1)^r\varphi \wedge \mathrm{d}*\psi \\ &= \mathrm{d}\varphi \wedge *\psi + (-1)^{mr}\varphi \wedge *(*\mathrm{d}*\psi) \\ &= \mathrm{d}\varphi \wedge *\psi - \varphi \wedge *\delta\psi.\end{aligned} \tag{4.44}$$

由 Stokes 定理得到

$$\int_M d\varphi \wedge *\psi = \int_M \varphi \wedge *\delta\psi,$$

即

$$(d\varphi,\psi) = (\varphi,\delta\psi). \tag{4.45}$$

在获得(4.44)式的过程中需要对 δ 的符号规定特别予以关注，这些复杂的规定就是要保证(4.44)式成立，从而保证 d，δ 是互为共轭的线性算子.

定义 4.7　设(M,g)是 m 维有向黎曼流形，$\Delta = d\delta + \delta d : A^r(M) \to A^r(M)$ 称为 Hodge-Laplace **算子**.

我们来考察 Hodge-Laplace 算子对于光滑函数 $f \in A^0(M)$ 的作用. 由定义 4.6 可知$\delta f = 0$. 所以

$$\Delta f = \delta(df) = - * d * df,$$

$$(\Delta f)\Omega = *\Delta f = - d * df.$$

取 M 的定向相符的局部坐标系$(U;x^i)$，则

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i,$$

$$*df|_U = \frac{1}{(m-1)!}\sqrt{G}\,\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_m} g^{i_1 j}\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_m}$$

$$= \sqrt{G}\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\frac{\partial f}{\partial x^j}g^{ji}dx^1\wedge\cdots\wedge \widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^m,$$

所以

$$d * df|_U = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$$

$$= (\tilde{\Delta} f)\Omega|_U.$$

可见

$$\Delta f = - \tilde{\Delta} f. \tag{4.46}$$

因此，Hodge-Laplace 算子作用在光滑函数上时与 Beltrami-Laplace 算子只差一个符号.

定义 4.8　设(M,g)是 m 维有向黎曼流形，若 $\omega \in A^r(M)$ 满足方程

$$\Delta\omega = 0,$$

则称 ω 为**调和形式**.

假定 M 是紧致的，则由 Hodge-Laplace 算子的定义，以及命题 4.6，我们有

$$(\Delta\omega,\omega) = ((d\delta + \delta d)\omega,\omega)$$

$$= (d\delta\omega,\omega) + (\delta d\omega,\omega)$$

$$= (\delta\omega,\delta\omega) + (d\omega,d\omega).$$

由此可见，在有向的紧致黎曼流形上，r 次外微外式 ω 是调和形式的充分必要

条件是：$d\omega = 0$，且 $\delta\omega = 0$，也就是 ω 是闭微分式，同时也是余闭微分式. 调和形式 ω 作为闭微分式，是它所属于的 deRham 上同调类的一个代表. 更要紧的是有下面的关于大范围分析的著名定理：

Hodge **定理**　设 (M,g) 是 m 维有向的紧致黎曼流形，则对每一个 r，$0 \leqslant r \leqslant m$，deRham 上同调群 $H^r(M)$ 是有限维的，并且 $H^r(M)$ 中的每个元素都有 M 上的唯一的一个 r 次调和形式作为它的代表.

如果用更加通俗的语言，Hodge 定理的断言是：对于 M 上的每一个闭微分式 ω，必有 M 上唯一的一个调和形式 $\tilde{\omega}$，使得 $\tilde{\omega} - \omega$ 是恰当微分式，即在 M 上存在外微分式 τ，使得

$$\tilde{\omega} - \omega = d\tau.$$

如果用 $\mathscr{H}^r(M)$ 表示 M 上全体 r 次调和形式构成的集合：

$$\mathscr{H}^r(M) = \{\omega \in A^r(M) : \Delta\omega = 0\}.$$

它自然是一个向量空间. 那么，Hodge 定理说 $\mathscr{H}^r(M)$ 与 M 的第 r 个 deRham 上同调群 $H^r(M)$ 是同构的.

Hodge 定理的证明要用到微分流形上椭圆微分算子的理论，可参看[9]. 在那里有 Hodge 定理的更完整的叙述.

我们希望透过本节的介绍，读者能够体会到在紧致黎曼流形上可以进行深刻的大范围分析的研究. 特别是黎曼流形上的分析研究和流形本身的拓扑性质，度量的曲率性质有密切的联系. 这些内容是当前大范围微分几何、大范围分析的热门研究课题. 如果要涉及这些领域，必须在黎曼几何，函数论，特别是在非线性分析方面打下深厚的基础.

习　题　五

1. 设 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形. 证明：在每一点 $p \in M$ 都有一个邻域 U，使得在 U 上存在光滑的单位正交标架场.

2. 设 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形，$\varphi: N \to M$ 是浸入在 M 中的 n 维子流形，命 $h = \varphi^* g$，即对于任意的 $X, Y \in T_pN$，$p \in N$，

$$h(X,Y) = \varphi^* g(X,Y) = g(\varphi_{*p}X, \varphi_{*p}Y).$$

证明：h 是光滑流形 N 上的一个黎曼度量.

3. 设 S^n 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的单位球面，用 $i: S^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ 记包含映射. 设 $g = \sum_{\alpha=1}^{n+1} dx^\alpha \otimes dx^\alpha$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上的欧氏度量，求 S^n 上的诱导黎曼度量 $i^* g$ 在 S^n 的球极投影（参看第二章习题二中的第 2 题）给出的局部坐标系下的表达式.

4. 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中定义 Lorentz 度量 $g^1 = \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i - dx^{n+1} \otimes dx^{n+1}$. 命

$$H^n=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}:\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2-(x^{n+1})^2=-1,x^{n+1}>0\},$$

用 $i:H^n\to\mathbf{R}^{n+1}$ 记包含映射.

(1) 定义映射 $\varphi:H^n\to\mathbf{R}^n$ 为

$$\varphi(x^1,\cdots,x^{n+1})=\left(\frac{x^1}{1+x^{n+1}},\cdots,\frac{x^n}{1+x^{n+1}}\right).$$

证明：(H^n,φ) 是 H^n 上的坐标卡，且 $\varphi(H^n)=D^n=\{(u^1,\cdots,u^n)\in\mathbf{R}^n:\sum_{i=1}^{n}(u^i)^2<1\}$.

(2) 求 i^*g^1 在 H^n 的坐标系 u^i 下的表达式，它是 H^n 上的黎曼度量.

5. 设 (M,D) 是一个 m 维仿射联络空间，$\alpha\in A^1(M)$，$X\in\mathscr{X}(M)$. 证明：由(2.10)式定义的映射 $D_X\alpha:\mathscr{X}(M)\to C^\infty(M)$ 是定义在 M 上的1次微分式.

6. 设 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形，α 是 M 上的1次微分式，t 是 M 上的光滑的(1,1)型张量场. 假定它们在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下的表达式为

$$\alpha|_U=\alpha_i\mathrm{d}x^i,$$

$$t|_U=t^i_j\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\mathrm{d}x^j.$$

定义

$$\alpha_{i,j}=\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j}-\alpha_l\Gamma^l_{ij},$$

$$t^i_{j,k}=\frac{\partial t^i_j}{\partial x^k}+t^l_j\Gamma^i_{lk}-t^i_l\Gamma^l_{jk},$$

其中 Γ^l_{ij} 是关于 $g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ 的 Christoffel 记号，证明：

(1) 在坐标变换时，$\alpha_{i,j}$ 服从2阶协变张量的变换规律，$t^i_{j,k}$ 服从(1,2)型张量的变换规律；

(2) 设 $\alpha^i=g^{ij}\alpha_j$，则

$$\alpha^i_{,k}\equiv\frac{\partial\alpha^i}{\partial x^k}+\alpha^l\Gamma^i_{lk}=g^{ij}\alpha_{j,k}.$$

7. 证明定理2.5.

8. 证明(2.13)式和(2.14)式.

9. 设 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形，用 g_{ij} 表示度量张量 g 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下的分量. 直接验证：(1) $g_{ij,k}=0$；(2) $g^{ij}_{,k}=0$，其中 $g_{ij,k}$，$g^{ij}_{,k}$ 的定义由(2.15)式给出.

10. 设 $X\in\mathscr{X}(M)$，α 是光滑流形 M 上光滑的 r 阶协变张量场. 证明：

$$(\mathscr{L}_X\alpha)(X_1,\cdots,X_r)=X(\alpha(X_1,\cdots,X_r))-\sum_{i=1}^{r}\alpha(X_1,\cdots,[X,X_i],\cdots,X_r)$$

其中 $X_1,\cdots,X_r \in \mathscr{X}(M)$，$\mathscr{L}_X$ 是李导数(参看第三章定义 5.2).

11. 设 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形，$X \in \mathscr{X}(M)$，$(U;x^i)$ 是 M 的一个局部坐标系. 证明：

(1) 对于任意的 $Y \in \mathscr{X}(M)$ 有

$$(\mathscr{L}_X Y)|_U = (X^j Y^i_{,j} - Y^j X^i_{,j}) \frac{\partial}{\partial x^i};$$

(2) 对于任意的 $\alpha \in A^1(M)$ 有

$$(\mathscr{L}_X \alpha)|_U = (X^j \alpha_{i,j} + \alpha_j X^j_{,i}) \mathrm{d}x^i;$$

(3) 对于 M 上任意的光滑 2 阶协变张量场 t 有

$$(\mathscr{L}_X t)|_U = (X^k t_{ij,k} + t_{ik} X^k_{,j} + t_{kj} X^k_{,i}) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j;$$

(4) 设 $X_i = g_{ij} X^j$，则

$$(\mathscr{L}_X g)|_U = (X_{i,j} + X_{j,i}) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j.$$

12. 设 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形，$\varphi: \mathbf{R} \times M \to M$ 是作用在 M 上的单参数变换群. 证明：单参数变换群 $\varphi_t = \varphi(t, \cdot)$ 是保持黎曼度量 g 不变的，即 $\varphi_t^* g = g$，$\forall\, t$，当且仅当 φ_t 所诱导的切向量场 X 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下的分量满足条件

$$X_{i,j} + X_{j,i} = 0, \qquad \forall\, i,j.$$

在黎曼流形 (M,g) 上满足上述条件的光滑切向量场 X 称为该黎曼流形上的 **Killing 向量场**.

13. 求欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的 Killing 向量场在笛卡儿直角坐标系下的表达式.

14. 在欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中任意给定两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$. 在 $\mathbf{R}^3$ 上定义向量场 X 如下：$\forall\, p \in \mathbf{R}^3$，

$$X(p) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \overrightarrow{Op},$$

其中 O 是 $\mathbf{R}^3$ 的原点，$\boldsymbol{b} \times \overrightarrow{Op}$ 表示向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\overrightarrow{Op}$ 的向量积. 证明：X 是定义在 $\mathbf{R}^3$ 上的 Killing 向量场，并且 $\mathbf{R}^3$ 上任意一个 Killing 向量场都能表示成这种形式.

15. 设 (M,g) 是一个 m 维黎曼流形，设 $f \in C^\infty(M)$，$v \in \mathscr{X}(M)$，$\alpha \in A^1(M)$，且它们在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下分别有表达式

$$v|_U = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \alpha|_U = \alpha_i \mathrm{d}x^i.$$

证明：

(1) $f_{,ij} - f_{,ji} = 0$；

(2) $v^i_{,jk} - v^i_{,kj} = v^l R^i_{lkj}$；

(3) $\alpha_{i,jk} - \alpha_{i,kj} = -\alpha_l R^l_{ikj}$.

16. 设 $(U;x^i)$ 是 m 维光滑流形 M 的一个局部坐标系. 设 ω^i，$1 \leqslant i \leqslant m$，是定义在 U 上处处线性无关的 m 个 1 次微分式. 证明：在 U 上存在唯一的一组 1

次微分式 $\omega_j^i, 1 \leqslant i, j \leqslant m$,满足条件:

$$\begin{cases} \omega_j^i + \omega_i^j = 0, \\ d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i. \end{cases}$$

17. 求第 3 题和第 4 题中的黎曼流形 S^n, H^n 的曲率张量.

18. 设(M,D)是一个 m 维仿射联络空间. 设$\{\omega^i\}$是开子集 $U \subset M$ 上的余标架场,$\{\omega_i^j\}$是联络形式,挠率形式是

$$\Omega^i = d\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i,$$

曲率形式是

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j.$$

证明:(1) $d\Omega^i = \omega^j \wedge \Omega_j^i - \Omega^j \wedge \omega_j^i$;

(2) $d\Omega_i^j = \omega_i^k \wedge \Omega_k^j - \Omega_i^k \wedge \omega_k^j$.

如果 D 是黎曼流形(M,g)的黎曼联络,将上面两个恒等式用曲率张量的分量表示出来.

19. 设(M,g)是一个 m 维有向黎曼流形,$X \in \mathscr{X}(M)$. 在定向相符的局部坐标系$(U;x^i)$下构造 $m-1$ 次外微分式

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \sqrt{G} X^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m,$$

其中 $G = \det(g_{ij}), X^i = dx^i(X)$ 是 X 的分量. 证明:

(1)ω 是大范围地定义在光滑流形 M 上的 $m-1$ 次外微分式;

(2) $i(X)\Omega = \omega$,其中 Ω 是 M 的体积元素.

20. 设(M,g)是一个 m 维有向黎曼流形,$f \in C^\infty(M)$. 证明:$\mathrm{div}(\nabla f) = g^{ij}(H(f))_{ij}$.

21. 在 $\mathbf{R}^3$ 的球坐标系(r,φ,θ)下将 Beltrami-Laplace 算子 $\tilde{\Delta}$ 表示出来,其中:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta, \\ y = r\cos\varphi\sin\theta, \\ z = r\sin\varphi. \end{cases}$$

22. 设(M,g)是一个 m 维有向黎曼流形,$\omega \in A^r(M)$. 设$(U;x^i)$是 M 的定向相符的局部坐标系,且 ω 的表达式为

$$\omega|_U = \frac{1}{r!}\omega_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}.$$

证明:

$$*\omega|_U = \frac{1}{(m-r)!} \cdot \frac{\sqrt{G}}{r!} \delta_{i_1\cdots i_m}^{1\cdots m} \omega^{i_1\cdots i_r} dx^{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}$$

与定向相符的局部坐标系的选取无关,其中

$$\omega^{i_1\cdots i_r} = g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_r j_r} \omega_{j_1\cdots j_r}.$$

23. 在 $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 中令

$$\alpha=\frac{x^1\mathrm{d}x^1+\cdots+x^n\mathrm{d}x^n}{((x^1)^2+\cdots+(x^n)^2)^{n/2}}.$$

求 $*\alpha$,并且证明 $*\alpha$ 是闭微分式.

24. 设 $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: x^2+y^2+z^2=1\}$. 定义映射 $\varphi: S^2\to\mathbf{R}^6$,使得

$$\varphi(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2,\sqrt{2}\,yz,\sqrt{2}\,zx,\sqrt{2}\,xy).$$

(1) 证明:φ 是从 S^2 到 S^5($\mathbf{R}^6$ 中的单位球面)的浸入子流形;

(2) 求 S^2 上由 φ 从 S^5(或 $\mathbf{R}^6$)诱导的黎曼度量.

(3) 求 S^2 在上述诱导黎曼度量下的面积.

第六章　李群初步

李群是一类重要的微分流形.它除了是光滑流形外还是一个群,并且群运算是光滑的,因此在李群上有更加丰富的构造.另外,李群论在几何学、函数论、分析学、物理学等各个领域中有广泛的应用,因此掌握它的基本知识是十分必要的.在本章,我们把李群作为特殊的光滑流形来看待,讨论李群上左不变向量场的李代数,研究子群和子代数之间的关系、李群的同态和李代数的同态之间的关系,最后讨论李氏变换群,并且给出齐性流形的概念和一些常见的例子.

由于李群论是内容十分丰富的一个课程,要详细、完整地叙述李群和李代数之间的关系需要在拓扑、微分流形论方面作更加细致的讨论和准备,在这个初等课程中就显得喧宾夺主了.因此我们在本章只是运用在本课程所学到的关于微分流形的理论,抓住最主要线索,介绍李群论的最主要的基本概念,有些重要的事实只给出结论而不加以证明.我们相信读者在掌握了本章的内容之后,自学有关的内容已不会遇到太多困难.详尽的讨论可在[12],[26]中找到.

李群论起源于S. Lie的连续群论,它是S. Lie在研究求解微分方程时提出来的.当时所指的群是变换群.人们发现,几何或分析领域的自同构变换群本身常常会具有自然的几何或分析的结构,从而产生了如下的结合体:

1. 拓扑群:它同时具有群的结构和拓扑结构,而且群的运算对于其拓扑结构来说是连续的;

2. 李群:它同时是群和微分流形,并且群的运算对于其微分结构而言是可微的.

最简单的例子是实数域 $\mathbf{R}$. 一方面,它有丰富的代数结构,可以进行加、减、乘、除等四则运算;另一方面,它有拓扑结构和微分结构,可以进行连续性和可微性的讨论.另一个例子是一般线性群 $GL(n)$,它由全体行列式不为零的 $n\times n$ 实矩阵组成,关于矩阵的乘法构成一个群;另外,它又是 $\mathbf{R}^{n^2}$ 的一个开子集,因而拥有从 $\mathbf{R}^{n^2}$ 诱导的光滑结构,并且群的运算显然是光滑的.

S. Lie确定了附属于李群的李代数应该满足的一组条件,并且指出满足这组条件的李代数必是某个李群的李代数.S. Lie本人是从局部的观点去考虑李群和李代数之间的关系的.随着拓扑学和微分流形论的发展,有必要从全局的观点去处理这个问题,并且把李群理论建立在严格的解析流形概念的基础上.在1900年,D. Hilbert提出了二十三个著名问题,其中第五个问题是:一个拓扑群在什么条件下可以具有李群的结构?这个问题经过长期的、多人的努

力，最后由 Gleason，Montgomery 和 Zippin 解决，他们证明：如果 G 是拓扑流形，并且乘法和取逆运算都是连续的，则在 G 上存在解析结构，使得乘法和取逆运算都是解析的，因而 G 成为一个李群. 正因为如此，一般假定李群是一个光滑流形就够了. 在本章我们就是在这种假定下进行讨论的.

§1 李 群

定义 1.1 设 G 是一个非空集合，如果

(1) G 是一个群(群运算记成乘法)；

(2) G 是 r 维光滑流形；

(3) 群运算是光滑的，即：映射 $(g_1, g_2) \longmapsto g_1 g_2^{-1}$ 是从 $G \times G$ 到 G 的光滑映射，

则称 G 是一个 r **维李群**.

用 e 记李群 G 的单位元素，于是映射 $g \longmapsto (e, g)$ 是从 G 到 $G \times G$ 的光滑映射. 将它与条件(3)中的映射复合，得到：

$$g \longmapsto (e, g) \longmapsto e \cdot g^{-1} = g^{-1},$$

这是从 G 到它自身的光滑映射，称为李群 G 的取逆运算. 将取逆运算和条件(3)中的映射结合起来，可知李群 G 的乘法运算是光滑的：

$$(g_1, g_2) \longmapsto (g_1, (g_2)^{-1}) \longmapsto g_1 \cdot (g_2^{-1})^{-1} = g_1 \cdot g_2,$$

这是从 $G \times G$ 到 G 的光滑映射.

反过来，如果群 G 的乘法运算 $(g_1, g_2) \longmapsto g_1 \cdot g_2$ 和取逆运算 $g \longmapsto g^{-1}$ 都是光滑的，则条件(3)成立. 因此定义 1.1 中的条件(3)等价于群 G 的乘法运算和取逆运算两者的光滑性.

用 τ 记李群 G 的取逆运算. 由于 $\tau \circ \tau = \mathrm{id}$，$\tau^{-1} = \tau$，故 τ 和它的逆映射 τ^{-1} 都是从 G 到它自身的光滑映射，所以 $\tau: G \to G$ 是光滑同胚.

李群 G 还有另外两组可微同胚. 设 $g \in G$，令

$$L_g(x) = g \cdot x,$$
$$R_g(x) = x \cdot g, \quad \forall\, x \in G. \tag{1.1}$$

$L_g, R_g: G \to G$ 都是从 G 到它自身的光滑映射. 由于

$$L_g \circ L_{g^{-1}} = L_{g^{-1}} \circ L_g = \mathrm{id},$$
$$R_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ R_g = \mathrm{id},$$

故

$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}, \quad (R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}. \tag{1.2}$$

这意味着 L_g, R_g 分别有光滑的逆映射 $L_{g^{-1}}, R_{g^{-1}}$，所以 $L_g, R_g: G \to G$ 是光滑同胚，分别称为李群 G 上的**左移动**和**右移动**. 这两组可微同胚在李群论中起着基本的重要作用.

例 1　$\mathbf{R}^n$ 关于向量的加法成为一个 n 维李群，这是可交换李群.

特别是 $n=1$ 时，$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}$，故实数域关于加法是一个一维交换李群.

例 2　设 G_1,G_2 是两个李群. 在积流形 $G_1\times G_2$ 上定义乘法如下：设

$$(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in G_1\times G_2,$$

令

$$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)=(a_1b_1,a_2b_2),$$

这样

$$(a_1,a_2)^{-1}=(a_1^{-1},a_2^{-1}).$$

很明显，在 $G_1\times G_2$ 上的乘法运算和取逆运算都是光滑的，因此 $G_1\times G_2$ 成为一个李群，称为李群 G_1 和 G_2 的直积，并且

$$\dim(G_1\times G_2)=\dim G_1+\dim G_2.$$

例 3　一维环群 T^1.

T^1 可以看作 $\mathbf{R}^2$ 中的一个圆周 $S^1=\{e^{2\pi it}\}$，这是一个一维光滑流形；在 S^1 上的乘法是：

$$e^{2\pi it}\cdot e^{2\pi is}=e^{2\pi i(t+s)},$$

$$(e^{2\pi it})^{-1}=e^{-2\pi it}.$$

容易证明乘法运算和取逆运算都是光滑的，所以 T^1 是一个一维交换李群. 一维环群还可以看作商群 $\mathbf{R}/Z$.

n 维环群 T^n 是 n 个一维环群的直积：

$$T^n=T^1\times\cdots\times T^1(n\text{ 个})\cong\mathbf{R}^n/Z^n.$$

例 4　一般线性群 $\mathrm{GL}(n)$.

在第二章 §5 已经把 $n\times n$ 非退化实系数矩阵的集合记为 $\mathrm{GL}(n)$，它关于矩阵的乘法构成一个群，并且单位矩阵是群的单位元素. 另外，$\mathrm{GL}(n)$ 是 $\mathbf{R}^{n^2}$ 的开子集，因而它有 $\mathbf{R}^{n^2}$ 的开子流形的光滑结构. 设 $A=(a_i^j),B=(b_i^j)\in\mathrm{GL}(n)$，其中 a_i^j 是 A 的第 j 行、第 i 列的元素，b_i^j 是 B 的第 j 行、第 i 列的元素，因此 $A\cdot B$ 的第 j 行、第 i 列元素是

$$(A\cdot B)_i^j=\sum_{k=1}^n a_k^j b_i^k,\tag{1.3}$$

另外

$$(A^{-1})_i^j=\frac{\widetilde{A}_i^j}{\det A},\tag{1.4}$$

其中 $\widetilde{A}_i^j$ 表示在行列式 $\det A$ 中元素 a_j^i 的代数余子式. 由此可见，逆矩阵 A^{-1} 的元素是矩阵 A 的元素的有理分式. 因此群 $\mathrm{GL}(n)$ 的乘法运算和取逆运算都是光滑的，故 $\mathrm{GL}(n)$ 是一个 n^2 维李群.

一般线性群 $\mathrm{GL}(n)$ 可以看作 n 维向量空间的自同构群，我们在这里作一

些说明.

设 V 是 n 维向量空间. 用 $\mathrm{GL}(V)$ 表示向量空间 V 的自同构的集合，所谓 V 的自同构就是从 V 到它自身的非退化线性变换. 在 V 中取定一个基底 $\{\delta_i\}$，则自同构 $\alpha \in \mathrm{GL}(V)$ 对应着它在基底 $\{\delta_i\}$ 下的矩阵 $A = (a_i^j)$，即

$$\alpha(\delta_i) = a_i^j \delta_j. \tag{1.5}$$

由于 α 是非退化的，因此 $\det A \neq 0$，并且 α 的逆映射 α^{-1} 在基底 $\{\delta_i\}$ 下的矩阵恰好是 A^{-1}.

若 β 是 V 的另一个自同构，则 $\alpha \circ \beta$ 也是 V 的自同构. 所以 $\mathrm{GL}(V)$ 关于映射 的合成构成一个群，该群的单位元素就是从向量空间 V 到它自身的恒同映射.

设 β 在基底 $\{\delta_i\}$ 下的矩阵是 $B = (b_i^j)$，则

$$\alpha \circ \beta(\delta_i) = \alpha\Big(\sum_j b_i^j \delta_j\Big) = \sum_j b_i^j \alpha(\delta_j) = \sum_{j,k} b_i^j a_j^k \delta_k,$$

所以 $\alpha \circ \beta$ 在 $\{\delta_i\}$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a_j^1 b_1^j & \cdots & a_j^1 b_n^j \\ \vdots & & \vdots \\ a_j^n b_1^j & \cdots & a_j^n b_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \cdots & b_n^n \end{pmatrix} = A \cdot B.$$

由此可见，若在 V 中取定一个基底 $\{\delta_i\}$，将 $\alpha \in \mathrm{GL}(V)$ 对应于它在基底 $\{\delta_i\}$ 下的矩阵 $A \in \mathrm{GL}(n)$，则这个对应是一一的，并且是从群 $\mathrm{GL}(V)$ 到 $\mathrm{GL}(n)$ 的同构. 因此 $\mathrm{GL}(V)$ 也是一个 n^2 维李群，它的光滑结构是从 $\mathrm{GL}(n)$ 诱导而来的. 可以证明 $\mathrm{GL}(V)$ 上的这种诱导光滑结构与基底 $\{\delta_i\}$ 的选取是无关的.

例 5　设 G 是 r 维李群，G_0 是 G 的含有单位元素 e 的连通分支，则 G_0 是 r 维连通李群.

因为 G_0 作为 G 的连通分支是 G 的开子集，因此 G_0 是 G 的开子流形. 乘法运算和取逆运算在 G_0 内是封闭的. 实际上，若 $a, b \in G_0$，则由于 G_0 的连通性，在 G_0 内存在路径 $\gamma(t), \sigma(t)\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 分别连结 e, a 和 e, b. 这样 $\gamma(t) \cdot (\sigma(t))^{-1}$ 仍是 G 中一条路径，并且

$$\gamma(0) \cdot (\sigma(0))^{-1} = e \cdot e = e,$$

所以

$$a \cdot b^{-1} = \gamma(1) \cdot (\sigma(1))^{-1} \in G_0.$$

显然，映射 $(a,b) \to a \cdot b^{-1}$ 看作从 $G_0 \times G_0$ 到 G_0 的映射是光滑的，所以 G_0 是 r 维李群.

例 6　$\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\backslash\{0\}$ 关于实数乘法是一个一维李群，它有两个连通分支.

实际上 $\mathbf{R}^* = \mathrm{GL}(1)$，$\mathrm{GL}(1)$ 中矩阵的乘法恰好是实数的乘法.

例 7　$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\backslash\{0\}$，也记为 $\mathrm{GL}(1,\mathbf{C})$，关于复数的乘法成为一个 2 维李

群.

实际上 $\mathbf{C}^* \cong \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,它是 $\mathbf{R}^2$ 的开子流形,是一个 2 维光滑流形.

设 $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha \neq 0, \alpha = 1,2$,它们的乘积是

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

用坐标表示则是

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1),$$

故在 $\mathbf{C}^*$ 上的乘法运算是光滑的. $z = x + iy \in \mathbf{C}^*$ 的倒数是

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2},$$

故

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right),$$

这也是光滑映射,所以 $\mathbf{C}^*$ 是一个 2 维李群.

下面我们要给出李群上重要的线性结构.

设 G 是 r 维李群,e 是它的单位元素,G 中的乘法运算记作 φ,即

$$\varphi(g_1,g_2) = g_1 \cdot g_2, \quad \forall\ g_1,g_1 \in G.$$

对于任意一点 $g \in G$,左移动 $L_g: G \to G$ 是光滑同胚,故有线性同构 $(L_g)_{*e}: T_eG \to T_gG$. 任意取定切向量 $X \in T_eG$,则借助于左移动在 G 上产生一个切向量场 $\widetilde{X}$,使得

$$\widetilde{X}(g) = (L_g)_{*e}(X), \quad \forall\ g \in G. \tag{1.6}$$

我们断言:$\widetilde{X}$ 是 G 上的光滑切向量场. 为此,我们来求切向量场 $\widetilde{X}$ 的分量.

取单位元素 e 的局部坐标系$(U;x^i)$ 和元素 g 的局部坐标系$(W;z^i)$. 由于 $\varphi(g,e) = g$,且 φ 是光滑映射,因而 φ 是连续映射,所以在适当缩小 e 的邻域 U 之后,存在 g 的邻域 $W_1 \subset W$,使得 $\varphi(W_1 \times U) \subset W$,并且记 $y^i = z^i|_{W_1}$. 这样,乘法映射 φ 可以用局部坐标表示为

$$z^i = \varphi^i(y^1,\cdots,y^r,x^1,\cdots,x^r), \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \tag{1.7}$$

其中

$$(y^1,\cdots,y^r) \in W_1, \quad (x^1,\cdots,x^r) \in U,$$

并且 φ^i 是自变量 y^j, x^j 的光滑函数.

设 $X \in T_eG$,则有 U 中一条光滑曲线 $\gamma(t)$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$,使得

$$\gamma(0) = e, \quad \gamma'(0) = X. \tag{1.8}$$

这样,$L_g(\gamma(t)) = g \cdot \gamma(t) = \varphi(g,\gamma(t))$ 是 G 中经过点 g 的一条光滑曲线,并且它在 g 处的切向量是

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(g\cdot\gamma(t)) = (L_g)_{*e}(\gamma'(0)) = (L_g)_{*e}(X) = \widetilde{X}(g).$$

设 $\gamma(t)$ 的参数方程为

$$x^i(t) = x^i(\gamma(t)),$$

于是

$$X = \gamma'(0) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathrm{d}x^i(0)}{\mathrm{d}t} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_e,$$

$$X^i = \frac{\mathrm{d}x^i(0)}{\mathrm{d}t}. \tag{1.9}$$

这样,曲线 $g \cdot \gamma(t)$ 的参数方程为

$$z^i(t) = \varphi^i(g, \gamma(t)) = \varphi^i(y^1, \cdots, y^r, x^1(t), \cdots, x^r(t)), \tag{1.10}$$

所以

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}(g) &= \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathrm{d}z^i(0)}{\mathrm{d}t} \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_g \\
&= \sum_{i,j=1}^{r} \left.\frac{\partial \varphi^i(y,x)}{\partial x^j}\right|_{(y,x)=(g,e)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}x^j(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_g \\
&= \sum_{i,j=1}^{r} X^j \left.\frac{\partial \varphi^i(g,x)}{\partial x^j}\right|_{x=e} \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_g,
\end{aligned}$$

故 $\widetilde{X}$ 的分量是

$$\widetilde{X}^i(g) = \sum_{i=1}^{r} X^j \left.\frac{\partial \varphi^i(g,x)}{\partial x^j}\right|_{x=e}. \tag{1.11}$$

很明显,分量 $\widetilde{X}^i \in C^\infty(W_1)$,故 $\widetilde{X}$ 在任意一点 g 处是光滑的,即 $\widetilde{X} \in \mathscr{X}(G)$.

在上面的计算中,我们顺便得到了线性同构 $(L_g)_{*e}: T_eG \to T_gG$ 在自然基底向量上作用的公式:

$$(L_g)_{*e}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_e\right) = \sum_{i=1}^{r} \left.\frac{\partial \varphi^i(g,x)}{\partial x^j}\right|_{x=e} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_g, \tag{1.12}$$

所以线性同构 $(L_g)_{*e}$ 在自然基底下的矩阵是

$$\left(\left.\frac{\partial \varphi^i(g,x)}{\partial x^j}\right|_{x=e}\right).$$

定理 1.1　设 G 是 r 维李群,则由切向量 $X \in T_eG$ 经左移动产生的光滑切向量场 $\widetilde{X}$ 在李群 G 的左移动下是不变的;反过来,李群 G 上任意一个在左移动下不变的切向量场都是由在单位元素 e 处的某个切向量经过左移动产生的.

证明　任取 $h \in G$,则

$$\begin{aligned}
(L_h)_{*g}(\widetilde{X}(g)) &= (L_h)_{*g} \circ (L_g)_{*e}(X) \\
&= (L_h \circ L_g)_{*e}(X) = (L_{hg})_{*e}(X) \\
&= \widetilde{X}(h \cdot g),
\end{aligned}$$

故切向量场 $\widetilde{X}$ 在左移动 L_h 下不变($\forall\ h \in G$).

反过来,设$\widetilde{Y}$是G上在左移动下不变的切向量场,所以对于任意在$h\in G$有

$$(L_h)_{*g}(\widetilde{Y}(g))=\widetilde{Y}(h\cdot g),\quad \forall\, g\in G.$$

令$g=e$,则得

$$\widetilde{Y}(h)=(L_h)_{*e}(\widetilde{Y}(e)).$$

证毕.

定义 1.2 设$X\in\mathscr{X}(G)$.若对任意的$g\in G$都有

$$(L_g)_*X=X,$$

则称X为李群G上的**左不变向量场**.

定理 1.2 在r维李群G上全体左不变向量场构成一个r维向量空间,记为$\mathscr{G}$,它与切空间T_eG是同构的;此外,Poisson 括号积[,]在空间$\mathscr{G}$中是封闭的,因而使$\mathscr{G}$成为一个r维李代数.

证明 很明显,若X,Y是G上的左不变向量场,则$X+Y$,$\lambda X(\lambda\in\mathbf{R})$也是$G$上的左不变向量场,$\mathscr{G}$成为一个向量空间.定义映射$\sigma:\mathscr{G}\to T_eG$,使得对任意的$X\in\mathscr{G}$有

$$\sigma(X)=X(e).$$

这显然是一个线性映射.由定理 1.1,映射σ是1—1的,所以σ是线性同构,即$\mathscr{G}$是r维向量空间.

另外,设$X,Y\in\mathscr{G}$,因此,对于任意的$g\in G$有

$$(L_g)_*X=X,\quad (L_g)_*Y=Y,$$

即切向量场X,Y分别与它们自身是L_g-相关的.根据第三章定理 2.5,$[X,Y]$与它自身也是L_g-相关的,即

$$(L_g)_*[X,Y]=[(L_g)_*X,(L_g)_*Y]=[X,Y],$$

所以$[X,Y]\in\mathscr{G}$.由此可见$\mathscr{G}$是$\mathscr{X}(G)$的一个子代数,即$\mathscr{G}$是一个r维李代数.

定义 1.3 在r维李群G上全体左不变向量场关于 Poisson 括号积[,]构成一个r维李代数$\mathscr{G}$,称为**李群G的李代数**.

由于向量空间T_eG与$\mathscr{G}$是线性同构的,所以可以在T_eG中引进乘法如下:$\forall\, X,Y\in T_eG$,令

$$[X,Y]=[\widetilde{X},\widetilde{Y}](e),\tag{1.13}$$

其中$\widetilde{X},\widetilde{Y}$是由$X,Y$经左移动产生的左不变向量场.这样,$T_eG$成为与$\mathscr{G}$同构的李代数.通常我们也把$T_eG$称为李群$G$的李代数.

在一般的光滑流形上,处处非零的光滑切向量场是未必存在的(参看第三章 §2 的 Hopf 定理),更谈不上定义在整个流形上的光滑切标架场了.李群是一个例外,根据定理 1.2,$\mathscr{G}$存在基底$\{X_i:1\leqslant i\leqslant r\}$,这样$X_i$是$G$上$r$个左

不变向量场,它们处处是线性无关的,因此在 G 上形成一个光滑的切标架场.

推论 1.3　设 G 是 r 维李群,$\{X_i : 1 \leqslant i \leqslant r\}$ 是 $\mathscr{G}$ 的一个基底,则光滑切向量场 $X \in \mathscr{X}(G)$ 是左不变向量场,当且仅当它是 X_i 的常系数线性组合.

证明　这是定理 1.2 的直接推论. 我们重新证一下必要性,以便增强对于左不变向量场的感性认识. 由于 $\{X_i : 1 \leqslant i \leqslant r\}$ 是在 G 上大范围定义的切标架场,故切向量场 $X \in \mathscr{X}(G)$ 可以用它们线性表示:

$$X = \sum_{i=1}^{r} a^i X_i,$$

其中 $a^i \in C^\infty(G)$. 由 X 和 X_i 的左不变性得到:对于任意的 $g \in G$ 有

$$\begin{aligned} X(g \cdot h) &= (L_g)_{*h}(X(h)) \\ &= (L_g)_{*h}\Big(\sum_{i=1}^{r} a^i(h) X_i(h)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{r} a^i(h)(L_g)_{*h}(X_i(h)) \\ &= \sum_{i=1}^{r} a^i(h) X_i(g \cdot h), \end{aligned}$$

因此

$$a^i(g \cdot h) = a^i(h), \quad \forall\, h \in G.$$

取 $h = e$,则得

$$a^i(g) = a^i(e) = \text{const}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

推论 1.4　设 G 是 r 维李群,$\{X_i : 1 \leqslant i \leqslant r\}$ 是 $\mathscr{G}$ 的一个基 ,则存在一组常数 C_{ij}^k, 使得

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k \cdot X_k, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant r. \tag{1.14}$$

C_{ij}^k 称为李群 G 的**结构常数**. 在 $\mathscr{G}$ 的基底变换时,服从(1,2) 型张量的变换规律.

证明　因为$[X_i, X_j]$是 G 上的左不变向量场,故它们能表示成 X_k 的常系数线性组合. Poisson 括号积[,]是从 $\mathscr{G} \times \mathscr{G}$ 到 $\mathscr{G}$ 的双线性映射,所以结构常数 C_{ij}^k 服从(1,2) 型张量的变换规律.

定理 1.5　李群 G 的结构常数 C_{ij}^k 满足下列恒等式:

(1)$C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0$;

(2)$C_{ij}^l C_{lk}^h + C_{jk}^l C_{li}^h + C_{ki}^l C_{lj}^h = 0$.

证明　由于 Poisson 括号积[,]是反交换的,故

$$[X_i, X_j] = -[X_j, X_i] = C_{ij}^k X_k = -C_{ji}^k X_k,$$

由此得到恒等式(1).

另外,Poisson 括号积[,]满足 Jacobi 恒等式,故

$$[[X_i,X_j],X_k]+[[X_j,X_k],X_i]+[[X_k,X_i],X_j]$$
$$=(C^l_{ij}C^h_{lk}+C^l_{jk}C^h_{li}+C^l_{ki}C^h_{lj})X_h$$
$$=0,$$

因此恒等式(2)成立.

李群的结构常数能够用乘法运算的坐标表达式来计算.

定理 1.6　设G是一个r维李群,群的乘法运算记成φ. 设$(U;x^i)$是单位元素e的局部坐标系,V是e的另一开邻域,使得$\varphi(V\times V)\subset U$,则可设$\varphi$的坐标表达式是

$$z^i=\varphi^i(x,y),\quad (x,y)\in V\times V.$$

令$\delta_i=\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_e$,则李群$G$在基底$\{\delta_i\}$下的结构常数$C^k_{ij}$是

$$C^k_{ij}=\left.\frac{\partial^2\varphi^k(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}\right|_{x=y=e}-\left.\frac{\partial^2\varphi^k(x,y)}{\partial x^j\partial y^i}\right|_{x=y=e}. \tag{1.15}$$

证明　用X_i表示将δ_i经左移动生成的左不变向量场,由(1.12)式得到

$$X_i(x)=(L_x)_{*e}(\delta_i)$$
$$=\sum_{k=1}^r\left.\frac{\partial\varphi^k(x,y)}{\partial y^i}\right|_{y=e}\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_x,\quad \forall\, x\in V. \tag{1.16}$$

于是

$$[X_i,X_j](e)$$
$$=\left.\left[\sum_{k=1}^r\left.\frac{\partial\varphi^k(x,y)}{\partial y^i}\right|_{y=e}\cdot\frac{\partial}{\partial x^k},\sum_{l=1}^r\left.\frac{\partial\varphi^l(x,y)}{\partial y^j}\right|_{y=e}\cdot\frac{\partial}{\partial x^l}\right]\right|_{x=e}$$
$$=\sum_{k,l}\left.\left\{\frac{\partial\varphi^k(x,y)}{\partial y^i}\cdot\frac{\partial^2\varphi^l(x,y)}{\partial x^k\partial y^j}-\frac{\partial\varphi^k(x,y)}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial^2\varphi^l(x,y)}{\partial x^k\partial y^i}\right\}\right|_{x=y=e}\left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_e.$$

但是$\varphi(e,y)=y$,,所以

$$\left.\frac{\partial\varphi^k(x,y)}{\partial y^i}\right|_{x=y=e}=\left.\frac{\partial\varphi^k(e,y)}{\partial y^i}\right|_{y=e}=\delta^k_i, \tag{1.17}$$

因此

$$[X_i,X_j](e)$$
$$=\sum_l\left.\left\{\frac{\partial^2\varphi^l(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}-\frac{\partial^2\varphi^l(x,y)}{\partial x^j\partial y^i}\right\}\right|_{x=y=e}\cdot X_l(e),$$

即

$$C^l_{ij}=\left.\frac{\partial^2\varphi^l(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}\right|_{x=y=e}-\left.\frac{\partial^2\varphi^l(x,y)}{\partial x^j\partial y^i}\right|_{x=y=e}.$$

反过来,如果给定一组实数C^k_{ij},$1\leqslant i,j,k\leqslant r$,它们满足定理1.5的恒等式(1),(2),则必有一个抽象的r维李代数以$\{C^k_{ij}\}$为它的结构常数. 事实上,我们取一个r维向量空间V,其基底为$\{v_i\}$,于是可借助$\{C^k_{ij}\}$给出V中基底向量

的乘法表：

$$[v_i, v_j] = C_{ij}^k v_k.$$

将上面的乘法作双线性扩张，成为向量空间 V 中的乘法. 这样，向量空间 V 关于乘法[,] 成为一个 r 维李代数.

让我们简要地回顾一下本节所叙述的过程：首先从李群 G 出发，讨论 G 上的左不变向量场，它们构成一个有限维的李代数，称为李群 G 的李代数. 李代数的核心是其基底元素的乘法表，这归结为满足定理 1.5 的两个恒等式的一组实数 C_{ij}^k，称为李群 G 的结构常数. 倒过来，如果给定了满足定理 1.5 的恒等式(1)，(2) 的一组实数 C_{ij}^k，必定有一个抽象的李代数以 $\{C_{ij}^k\}$ 为结构常数. 但是，在给定了一个有限维李代数之后，是否存在一个李群以它为李群的李代数呢？这样的李群有多少？这些问题的答案将在 §3 给出，但是这些结论的证明需要相当长的篇幅，我们不在本书叙述了，读者可看[12]，[26].

例 8　求一般线性群 GL(n) 的结构常数.

用 I 表示 $n \times n$ 单位矩阵，它是李群 GL(n) 的单位元素. $n \times n$ 实矩阵的集合记为 $M(n,n)$，显然 $M(n,n) \cong \mathbf{R}^{n^2}$. 在 $M(n,n)$ 中取如下的基底：E_i^j，$1 \leqslant i, j \leqslant n$，其中 E_i^j 表示在第 i 行、第 j 列的元素为 1、其余元素皆为零的 $n \times n$ 矩阵. 这样，任意一个 $n \times n$ 矩阵 X 可以表示成

$$X = \sum_{i,j=1}^{n} X_j^i E_i^j, \tag{1.18}$$

其中 X_j^i 表示矩阵 X 在第 i 行、第 j 列的元素. (1.18) 式也说明，点 $X \in M(n, n) \cong \mathbf{R}^{n^2}$ 在标架 $\{O; E_i^j\}$ 下的坐标是 X_j^i，即它们给出了 $M(n,n)$ 中的坐标系. 在这个坐标系下所产生的自然标架场是 $\left\{X; \left.\frac{\partial}{\partial X_j^i}\right|_X\right\}$，并且

$$\left.\frac{\partial}{\partial X_j^i}\right|_X = E_i^j.$$

由于 GL(n) 是 $M(n,n)$ 的开子集，所以 $M(n,n) \cong \mathbf{R}^{n^2}$ 的上述坐标系及自然标架场适用于 GL(n). 将 GL(n) 中的乘法运算记作 φ，那么 φ 在上述坐标系下的表达式为

$$(\varphi(A,B))_j^i = (A \cdot B)_j^i = \sum_{k=1}^{n} A_k^i B_j^k. \tag{1.19}$$

现在我们要求在李群 GL(n) 上由单位元素 I 处的切向量 $E_i^j = \left.\frac{\partial}{\partial X_j^i}\right|_I$ 经过左移动所产生的左不变向量场，记为 $\widetilde{E}_i^j$. 根据(1.12) 式，我们有

$$\widetilde{E}_i^j|_A = (L_A)_{*I}\left(\left.\frac{\partial}{\partial X_j^i}\right|_I\right)$$

$$=\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial(\varphi(A,X))_l^{\ k}}{\partial X_j^{\ i}}\bigg|_{X=I}\cdot\frac{\partial}{\partial X_l^{\ k}}\bigg|_A$$

$$=\sum_{k,l,h=1}^{n}A_h^{\ k}\delta_i^{\ h}\delta_l^{\ j}\frac{\partial}{\partial X_l^{\ k}}\bigg|_A$$

$$=\sum_{k=1}^{n}A_i^{\ k}\frac{\partial}{\partial X_j^{\ k}}\bigg|_A=\left(\sum_{k=1}^{n}X_i^{\ k}\frac{\partial}{\partial X_j^{\ k}}\right)\bigg|_{X=A} \tag{1.20}$$

直接计算得到:

$$\begin{aligned}&[\widetilde{E}_i^{\ j},\widetilde{E}_k^{\ l}]\\&=\left[\sum_{p=1}^{n}X_i^{\ p}\frac{\partial}{\partial X_j^{\ p}},\sum_{q=1}^{n}X_k^{\ q}\frac{\partial}{\partial X_l^{\ q}}\right]\\&=\sum_{p=1}^{n}\left(\delta_k^{\ j}X_i^{\ p}\frac{\partial}{\partial X_l^{\ p}}-\delta_i^{\ l}X_k^{\ p}\frac{\partial}{\partial X_j^{\ p}}\right)\\&=\delta_k^{\ j}\widetilde{E}_i^{\ l}-\delta_i^{\ l}\widetilde{E}_k^{\ j}.\end{aligned} \tag{1.21}$$

若记

$$[\widetilde{E}_i^{\ j},\widetilde{E}_k^{\ l}]=\sum_{(p,q)}C_{(i,j)(k,l)}^{(p,q)}\widetilde{E}_p^{\ q}, \tag{1.22}$$

则对照(1.14)和(1.21)式得到李群 GL(n)的结构常数为

$$C_{(i,j)(k,l)}^{(p,q)}=\delta_k^{\ j}\delta_i^{\ p}\delta_q^{\ l}-\delta_i^{\ l}\delta_k^{\ p}\delta_q^{\ j}. \tag{1.23}$$

将(1.21)式限制在单位元素 I,则得到切空间 $T_I(\mathrm{GL}(n))$ 中括号积的乘法表:

$$[E_i^{\ j},E_k^{\ l}]=\delta_k^{\ j}E_i^{\ l}-\delta_i^{\ l}E_k^{\ j}. \tag{1.21$'$}$$

设 $A,B\in M(n,n)\cong T_I(\mathrm{GL}(n))$,令

$$A=\sum_{i,j=1}^{n}A_j^{\ i}E_i^{\ j},\quad B=\sum_{i,j=1}^{n}B_j^{\ i}E_i^{\ j},$$

则

$$\begin{aligned}[A,B]&=\sum_{i,j,k,l=1}^{n}A_j^{\ i}B_l^{\ k}[E_i^{\ j},E_k^{\ l}]\\&=\sum_{i,j,k,l=1}^{n}A_j^{\ i}B_l^{\ k}(\delta_k^{\ j}E_i^{\ l}-\delta_i^{\ l}E_k^{\ j})\\&=\sum_{i,j,k=1}^{n}(A_k^{\ i}B_j^{\ k}-B_k^{\ i}A_j^{\ k})E_i^{\ j}\\&=A\cdot B-B\cdot A;\end{aligned} \tag{1.24}$$

其中"·"表示矩阵的乘法.由此可见,$n\times n$ 实矩阵的集合 $M(n,n)$ 是李群 GL(n)在单位元素处的切空间.它作为李群 GL(n)的李代数时,任意两个元素 $A,B\in M(n,n)$ 的括号积$[A,B]$恰好是它们的交换子 $A\cdot B-B\cdot A$.通常,

我们把李群 $GL(n)$ 的李代数记为 $gl(n)$.

顺便提一下,设 V 是 n 维向量空间,用 $gl(V)$ 表示从 V 到自身的全体线性变换的集合. 在第一章 §4,我们已经指出 $gl(V)$ 等同于 V 上 $(1,1)$ 型张量的空间 $V_1^{\ 1} = L(V^*, V; R)$,因此它是 n^2 维向量空间. 在 $gl(V)$ 中还能定义一个乘法:设 $\alpha, \beta \in gl(V)$,令

$$[\alpha, \beta] = \alpha \circ \beta - \beta \circ \alpha. \tag{1.25}$$

很明显,$gl(V)$ 关于括号积[,]成为一个 n^2 维李代数. 事实上在 $gl(V)$ 和 $gl(n)$ 之间可以建立 1 - 1 对应. 在 V 中取定一个基底 $\{\delta_i\}$,则 $\alpha \in gl(V)$ 可以表示为

$$\alpha(\delta_i) = a_i^{\ j}\delta_j, \tag{1.26}$$

矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1^{\ 1} & \cdots & a_n^{\ 1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{\ n} & \cdots & a_n^{\ n} \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

称为线性变换 α 在基底 $\{\delta_i\}$ 下的矩阵. 反过来,任给 $A \in gl(n)$,则由(1.26)式给出了从 V 到它自身的线性变换 α,它以 A 为 α 在基底 $\{\delta_i\}$ 下的矩阵.

很明显,在 $gl(V)$ 和 $gl(n)$ 之间的上述对应是保持线性结构的. 并且,如果 β 是 $gl(V)$ 的另一个元素,它在基底 $\{\delta_i\}$ 下的矩阵是 $B = (b_i^{\ j})$,那么

$$\alpha \circ \beta(\delta_i) = \alpha\left(\sum_{j=1}^{n} b_i^{\ j}\delta_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_i^{\ j}\alpha(\delta_j) = \sum_{j,k=1}^{n} a_j^{\ k} b_i^{\ j}\delta_k,$$

所以

$$(\alpha \circ \beta - \beta \circ \alpha)(\delta_i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_j^{\ k} b_i^{\ j} - b_j^{\ k} a_i^{\ j})\delta_k, \tag{1.28}$$

即 $\alpha \circ \beta - \beta \circ \alpha$ 在基底 $\{\delta_i\}$ 下的矩阵是

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A.$$

这意味着,在 $gl(V)$ 和 $gl(n)$ 之间的上述对应还保持括号积不变. 根据下面的定义 3.2,李代数 $gl(V)$ 和 $gl(n)$ 是同构的.

§2 结构方程

在本节我们要叙述李群 G 上与左不变向量场对偶的左不变 1 次微分式,通常称它们为李群 G 的 Maurer-Cartan 形式.

定义 2.1 设 G 是李群,$\omega \in A^1(G)$. 若对任意的 $g \in G$ 都有

$$(L_g)^*\omega = \omega, \tag{2.1}$$

则称 ω 为李群 G 上的**左不变 1 次微分式**.

在 §1 已经知道,对于任意的 $g\in G$, $L_g: G\to G$ 是光滑同胚,因此在任意一点 $h\in G$,我们有线性同构

$$(L_g)_{*h}: T_hG\to T_{g\cdot h}G$$

以及线性同构

$$(L_g)^*: T^*_{g\cdot h}G\to T^*_hG.$$

所以(2.1) 式的意义是:对于任意的 $h\in G$ 有

$$(L_g)^*(\omega(g\cdot h)) = \omega(h), \tag{2.2}$$

即对于任意的 $X\in T_hG$ 有

$$(\omega(h))(X) = (\omega(gh))((L_g)_*X).$$

定理 2.1 设 G 是李群, $\omega\in A^1(G)$,则 ω 是 G 上的左不变微分式的充分必要条件是 ω 在 G 的任意一个左不变向量场上的值是常数.

证明 设 ω 是左不变 1 次微分式, X 是左不变向量场,则对于任意一点 $g\in G$ 有

$$(L_g)^*\omega = \omega,\ (L_g)_*X = X.$$

因此, $\omega(X)$ 作为李群 G 上的光滑函数在 g 处的值为

$$\begin{aligned}
&(\omega(X))(g)\\
=&\omega(g)(X(g))\\
=&\omega(g)((L_g)_{*e}(X(e)))\\
=&((L_g)^*(\omega(g)))(X(e))\\
=&\omega(e)(X(e))\\
=&(\omega(X))(e) = \text{const},
\end{aligned}$$

即 $\omega(X)$ 是 G 上的常值函数.

反过来,假定 $\omega\in A^1(G)$,并且它在 G 的任意一个左不变向量场上的值为常数.任取 $g\in G$, $X\in\mathscr{G}$,则在任意一点 $h\in G$ 有

$$\begin{aligned}
&(((L_g)^*\omega)(h))(X(h))\\
=&\omega(g\cdot h)((L_g)_*(X(h)))\\
=&\omega(g\cdot h)(X(g\cdot h))\\
=&(\omega(X))(g\cdot h)\\
=&(\omega(X))(h)\\
=&(\omega(h))(X(h)).
\end{aligned}$$

由于 $(L_h)_{*e}: T_eG\to T_hG$ 是线性同构,且 $X(h) = (L_h)_{*e}(X(e))$,因此

$$T_hG = \{X(h): X\in\mathscr{G}\}.$$

于是，上式表明

$$((L_g)^*\omega)(h) = \omega(h),\quad \forall\ h \in G,$$

即

$$L_g{}^*\omega = \omega,$$

ω 是左不变 1 次微分式.

根据定理 2.1，G 上的每一个左不变 1 次微分式 ω 可以看成 G 的李代数 $\mathscr{G}$ 上的线性函数 $\omega: \mathscr{G} \to \mathbf{R}$，使得对于任意的 $X \in \mathscr{G}$，

$$\omega(X) = (\omega(X))(e).$$

于是 G 上全体左不变 1 次微分式构成一个向量空间，它是 $\mathscr{G}$ 的对偶空间，记为 $\mathscr{G}^*$.

在 T_eG 中取定一个基底 $\{\delta_i\}$，假定在 $T_e{}^*G$ 中的对偶基底是 $\{\delta^i\}$，$\delta^i(\delta_j) = \delta_j{}^i$. 用 X_i 表示由 δ_i 经过左移动产生的左不变向量场：

$$X_i(g) = (L_g)_{*e}(\delta_i). \tag{2.3}$$

$\{X_i\}$ 是李代数 $\mathscr{G}$ 的一个基底.

由于对于任意的 $g \in G$，$(L_{g^{-1}})_{*g} = ((L_g)_{*e})^{-1}: T_gG \to T_eG$ 是线性同构，可以定义 T_gG 上的线性函数 $\omega^i(g): T_gG \to \mathbf{R}$ 如下：对于任意的 $X \in T_gG$，令

$$(\omega^i(g))(X) = \delta^i((L_{g^{-1}})_{*g}X). \tag{2.4}$$

这样，ω^i 是李群 G 上的 1 一 形式场. 容易证明，ω^i 是 G 上光滑的 1 一 形式场，即 $\omega^i \in A^1(G)$. 实际上，在单位元素 e 处取局部坐标系 $(U;x^i)$，在 g 处取局部坐标系 $(W;y^i)$，使得 $\delta^i = \mathrm{d}x^i|_e$，并且有 g 的邻域 $W_1 \subset W$ 满足条件 $U \cdot W_1 \subset W$. (2.4) 式表明

$$\omega^i(g) = (L_{g^{-1}})^*\delta^i = ((L_g)^*)^{-1}\delta^i, \tag{2.5}$$

其中 $(L_g)^*: T_g{}^*G \to T_e{}^*G$ 是切映射 $(L_g)_{*e}: T_eG \to T_gG$ 的诱导映射. 从(1.12)式得到

$$\begin{aligned}(L_g)^*(\mathrm{d}y^i|_g) &= \sum_{j=1}^r \left.\frac{\partial\varphi^i(g,x)}{\partial x^j}\right|_{x=e} \cdot \mathrm{d}x^j|_e \\ &= \sum_{j=1}^r \left.\frac{\partial\varphi^i(g,x)}{\partial x^j}\right|_{x=e} \cdot \delta^j,\end{aligned} \tag{2.6}$$

所以

$$\delta^j = \sum_{i=1}^r \Lambda_i{}^j(g) \cdot (L_g)^*(\mathrm{d}y^i|_g), \tag{2.7}$$

其中 $(\Lambda_i{}^j(g))$ 是矩阵 $\left(\left.\dfrac{\partial\varphi^i(g,x)}{\partial x^j}\right|_{x=e}\right)$ 的逆矩阵，因而 $\Lambda_i{}^j(g)$ 是 g 的光滑函数.

这样，

$$\omega^i(g) = ((L_g)^*)^{-1}\delta^i$$
$$= \sum_{j=1}^{r} \Lambda_j^{\ i}(g) \cdot ((L_g)^*)^{-1} \circ (L_g)^*(\mathrm{d}y^j|_g)$$
$$= \sum_{j=1}^{r} \Lambda_j^{\ i}(g)\mathrm{d}y^j|_g, \tag{2.8}$$

故 ω^i 是 G 上的 1 次微分式.

定理 2.2 设 G 是 r 维李群,ω^i 是由(2.5)式所定义的 r 个 1 次微分式,则 ω^i 是 G 上的左不变微分式,它们构成 $\mathscr{G}$ 的基底$\{X_i\}$的对偶基底.

这样的一组左不变 1 次微分式$\{\omega^i\}$称为李群 G 的 **Maurer-Cartan 形式**.

证明 实际上,在任意一点 $g \in G$ 有

$$(\omega^i(X_j))(g) = \omega^i(g)(X_j(g))$$
$$= ((L_{g^{-1}})^*\delta^i)(X_j(g))$$
$$= \delta^i((L_{g^{-1}})_*(X_j(g)))$$
$$= \delta^i(\delta_j) = \delta_j^{\ i}. \tag{2.9}$$

但是$\{X_i\}$是$\mathscr{G}$的一个基底,G 上每一个左不变向量场都是 X_i 的常系数线性组合,因而 ω^i 在 G 的每一个左不变向量场上的值为常数,故 ω^i 是 G 上的左不变 1 次微分式.(2.9)式说明

$$\omega^i(X_j) = \delta_j^{\ i},$$

故$\{\omega^i\}$是 $\mathscr{G}^*$ 中与 $\mathscr{G}$ 的基底$\{X_i\}$对偶的基底.

1 次微分式 ω^i 的左不变性也可以直接根据定义来验证.任取 $h \in G$,则由(2.5)式得到

$$(L_h)^*(\omega^i(g))$$
$$= (L_h)^* \circ (L_{g^{-1}})^*\delta^i$$
$$= (L_{g^{-1}} \circ L_h)^*\delta^i$$
$$= (L_{(h^{-1}g)^{-1}})^*\delta^i$$
$$= \omega^i(h^{-1}g),$$

所以 ω^i 是左不变微分式.

Maurer-Cartan 形式$\{\omega^i\}$作为 $\mathscr{G}^*$ 的基底确定到差一个满秩的常系数线性变换;关于 T_eG 中的基底变换,$\{\omega^i\}$是按照反变向量的规律进行变换的.换言之,若在 T_eG 中取另一个基底$\{e_i\}$,假定

$$e_i = a_i^{\ j}\delta_j; \tag{2.10}$$

用$\{\theta^i\}$记对应的 Maurer-Cartan 形式,那么

$$\omega^i = a_j^{\ i}\theta^j. \tag{2.11}$$

由此可见,若令

$$\omega = \omega^i \delta_i, \tag{2.12}$$

则 ω 不依赖于切空间 T_eG 中基底 $\{\delta_i\}$ 的选取，它是李群 G 上取值在向量空间 T_eG 中的左不变微分式. 通常把这样的 1 次微分式 ω 称为李群 G 的 Maurer-Cartan 形式更为确切，因为它与 T_eG 中的基底选取无关，是唯一确定的. 注意，微分式 ω 限制在任意一点 $g \in G$，恰好是线性同构 $(L_{g^{-1}})_* : T_gG \to T_eG$. 实际上，若取 $X \in T_gG$，则由(2.4)式得到

$$\omega(X) = \delta_i \cdot \delta^i((L_{g^{-1}})_* X) = (L_{g^{-1}})_*(X).$$

定理 2.3 设 G 是 r 维李群，$\{\delta_i\}$ 是 T_eG 的一个基底，则对应的 Maurer-Cartan 形式 $\{\omega^i\}$ 满足下列**结构方程**：

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \tag{2.13}$$

其中 C^i_{jk} 是李群 G 在基底 $\{\delta_i\}$ 下的结构常数.

证明 由于对于每一点 $g \in G$，$(L_{g^{-1}})^* : T_e{}^*G \to T_g{}^*G$ 是线性同构，并且

$$\omega^i(g) = (L_{g^{-1}})^* \delta^i,$$

所以左不变微分式 $\{\omega^i\}$ 在 G 上是处处线性无关的. 这样，$d\omega^i$ 作为 G 上的 2 次外微分式，能用 $\{\omega^i\}$ 的外积表示. 假定 $\{X_i\}$ 是 $\mathscr{G}$ 中与 $\{\omega^i\}$ 对偶的基底，于是 $\omega^i(g)(X_j(g)) = \delta_j^i$，$\forall\ g \in G$（参看(2.9)式），因此

$$d\omega^i(g) = \frac{1}{2}(d\omega^i(g))(X_j(g), X_k(g))\omega^j(g) \wedge \omega^k(g),$$

即

$$d\omega^i = \frac{1}{2}d\omega^i(X_j, X_k)\omega^j \wedge \omega^k.$$

由第四章的推论 2.3 得到

$$\begin{aligned}
& d\omega^i(X_j, X_k) \\
&= X_j(\omega^i(X_k)) - X_k(\omega^i(X_j)) - \omega^i([X_j, X_k]) \\
&= -C^l_{jk}\omega^i(X_l) \\
&= -C^i_{jk},
\end{aligned}$$

所以

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k.$$

根据结构方程(2.13)，我们能够通过 Maurer-Cartan 形式来求李群的结构常数. 作为例子，我们重新证明定理 1.6.

设 $(U; x^i)$ 是单位元素 e 的局部坐标系，令 $\delta^i = dx^i|_e$. 用 $\{\omega^i\}$ 表示对应于基底 $\{\delta^i\}$ 的 Maurer-Cartan 形式，则由(2.8)式得到

$$\mathrm{d}x^k = \left.\frac{\partial \varphi^k(x,y)}{\partial y^i}\right|_{y=e} \omega^i$$

求上式的外微分得到

$$0 = \left.\frac{\partial^2 \varphi^k(x,y)}{\partial x^j \partial y^i}\right|_{y=e} \mathrm{d}x^j \wedge \omega^i + \left.\frac{\partial \varphi^k(x,y)}{\partial y^i}\right|_{y=e} \mathrm{d}\omega^i;$$

令 $x = e$，则得

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\omega^k)(e) &= -\left.\frac{\partial^2 \varphi^k(x,y)}{\partial x^j \partial y^i}\right|_{x=y=e} \omega^j(e) \wedge \omega^i(e) \\ &= -\frac{1}{2}\left.\left(\frac{\partial^2 \varphi^k(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} - \frac{\partial^2 \varphi^k(x,y)}{\partial x^j \partial y^i}\right)\right|_{x=y=e} \omega^i(e) \wedge \omega^j(e).\end{aligned}$$

与结构方程(2.13) 对照得到

$$C_{ij}^k = \left.\left(\frac{\partial^2 \varphi^k(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} - \frac{\partial^2 \varphi^k(x,y)}{\partial x^j \partial y^i}\right)\right|_{x=y=e}. \tag{2.14}$$

例 1 求 $\mathrm{GL}(n)$ 的 Maurer-Cartan 形式.

采用 §1 例 8 的记号，X_j^i 表示矩阵 $X \in M(n,n)$ 中第 i 行、第 j 列的元素，因而它们给出了 $\mathrm{GL}(n)$ 中的坐标系. 已知由 $E_i^j = \left.\frac{\partial}{\partial X_j^i}\right|_I$ 生成的左不变向量场(参看(1.20)) 是

$$\widetilde{E}_i^j = \sum_k X_i^k \frac{\partial}{\partial X_j^k}, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n. \tag{2.15}$$

由 $\mathrm{d}X_j^i|_I$ 生成的左不变微分式记为 ω_j^i，所以 $\{\omega_j^i\}$ 和 $\{\widetilde{E}_i^j\}$ 是彼此对偶的，即

$$\omega_j^i(\widetilde{E}_k^l) = \delta_k^i \delta_j^l, \quad 1 \leqslant i,j,k.l \leqslant n. \tag{2.16}$$

将(2.15) 式代入得到

$$\sum_p X_k^p \omega_j^i\left(\frac{\partial}{\partial X_l^p}\right) = \delta_k^i \delta_j^l = \delta_j^l Y_p^i X_k^p,$$

其中(Y_p^i) 是 $X = (X_p^i)$ 的逆矩阵. 由此得到

$$\omega_j^i\left(\frac{\partial}{\partial X_l^p}\right) = \delta_j^l Y_p^i,$$

所以

$$\begin{aligned}\omega_j^i &= \sum_{p,l} \omega_j^i\left(\frac{\partial}{\partial X_l^p}\right) \mathrm{d}X_l^p \\ &= \delta_j^l Y_p^i \mathrm{d}X_l^p = Y_p^i \mathrm{d}X_j^p.\end{aligned} \tag{2.17}$$

引进矩阵记号，令 $\omega = (\omega_j^i)$，即 ω 是一个 $n \times n$ 矩阵，它的第 i 行、第 j 列元素是微分式 ω_j^i，那么(2.17) 式成为

$$\omega = X^{-1} \cdot \mathrm{d}X. \tag{2.18}$$

值得指出的是，(2.18) 是十分重要的表达式. 直接可以证明，$X^{-1} \cdot \mathrm{d}X$ 是李群 $\mathrm{GL}(n)$ 上的左不变微分式. 另外，$\mathrm{GL}(n)$ 的李子群可以看作嵌入在

GL(n) 内的子流形,而将 $X^{-1}\cdot \mathrm{d}X$ 通过包含映射 i 拉回到GL(n) 的李子群上,也就是将 $X^{-1}\cdot \mathrm{d}X$ 限制在GL(n) 的李子群上,便得到该李子群的左不变微分式. 事实上,若取 $A\in \mathrm{GL}(n)$,则

$$\begin{aligned}(L_A)^*\omega &= (A\cdot X)^{-1}\cdot \mathrm{d}(A\cdot X)\\ &= X^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A\cdot \mathrm{d}X\\ &= X^{-1}\cdot \mathrm{d}X = \omega.\end{aligned}$$

对(2.18) 求外微分,则得

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}X^{-1}\wedge \mathrm{d}X, \tag{2.19}$$

这里的右端是元素为外微分式的两个矩阵之积,它们首先按照矩阵相乘的规则做乘法,然后规定元素之间的乘法是外积. 因为

$$X^{-1}\cdot X = I,$$

求外微分得到

$$\mathrm{d}X^{-1}\cdot X + X^{-1}\cdot \mathrm{d}X = 0,$$

所以

$$\mathrm{d}X^{-1} = -X^{-1}\cdot \mathrm{d}X\cdot X^{-1}.$$

代入(2.19) 式便得到

$$\mathrm{d}\omega = -\omega\wedge\omega. \tag{2.20}$$

这就是 GL(n) 的结构方程. 用分量表示,则是

$$\mathrm{d}\omega^i_j = -\omega^i_k\wedge\omega^k_j. \tag{2.21}$$

根据对偶关系(2.16),GL(n) 的结构方程的一般表达式应该是

$$\mathrm{d}\omega^i_j = -\frac{1}{2}C^{(i,j)}_{(p,q)(k,l)}\omega^p_q\wedge\omega^k_l. \tag{2.22}$$

而(2.21) 式可以改写成

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^i_j &= -\delta^i_p\delta^l_j\delta^q_k\omega^p_q\wedge\omega^k_l\\ &= -\frac{1}{2}(\delta^i_p\delta^l_j\delta^q_k - \delta^i_k\delta^q_j\delta^l_p)\omega^p_q\wedge\omega^k_l,\end{aligned}$$

与(2.22) 式相比较得到

$$C^{(i,j)}_{(p,q)(k,l)} = \delta^i_p\delta^l_j\delta^q_k - \delta^i_k\delta^q_j\delta^l_p, \tag{2.23}$$

这与(1.23) 式是一致的.

例 2 特殊线性群 SL(2) 的 Maurer — Cartan 形式

SL(2) 是行列式为 1 的 2×2 实系数矩阵组成的乘法群. SL(2) 是 GL(2) 中的一个超曲面,不能用一个坐标系把它整个覆盖住. 我们首先用局部坐标系来求 SL(2) 上的左不变向量场和 Maurer-Cartan 形式.

设

$$a = \begin{pmatrix} a_1{}^1 & a_2{}^1 \\ a_1{}^2 & a_2{}^2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2),$$

故 $a_1{}^1 a_2{}^2 - a_2{}^1 a_1{}^2 = 1$. 这样,令

$$\begin{aligned} U_1 &= \{a \in \mathrm{SL}(2) : a_1{}^1 \neq 0\}, \\ U_2 &= \{a \in \mathrm{SL}(2) : a_2{}^1 \neq 0\}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

则 U_1, U_2 是 SL(2) 的两个开子集,并且覆盖了 SL(2). 在 U_1 中取坐标系 (x^1, x^2, x^3),使得

$$x^1(a) = a_1{}^1, x^2(a) = a_2{}^1, x^3(a) = a_1{}^2;$$

在 U_2 中取坐标系 (y^1, y^2, y^3),使得

$$y^1(a) = a_1{}^1, y^2(a) = a_2{}^1, y^3(a) = a_2{}^2.$$

单位元素 I 落在 U_1 内,对于 $x \in U_1$,则有

$$x = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ x^3 & \dfrac{1 + x^2 x^3}{x^1} \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

求微分得到

$$\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1 + x^2 x^3}{(x^1)^2} \end{pmatrix} \mathrm{d}x^1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{x^3}{x^1} \end{pmatrix} \mathrm{d}x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \dfrac{x^2}{x^1} \end{pmatrix} \mathrm{d}x^3,$$

于是自然标架向量 $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dfrac{\partial}{\partial x^2}, \dfrac{\partial}{\partial x^3}$ 看作 $M(2,2) = \mathbf{R}^4$ 中的切向量场用分量表示分别是

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1 + x^2 x^3}{(x^1)^2} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial x^2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{x^3}{x^1} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial x^3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \dfrac{x^2}{x^1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

特别是,SL(2) 在单位元素 $I(x^1 = 1, x^2 = x^3 = 0)$ 的切空间由下列三个矩阵张成:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

另设 $g \in U_1$,当 g 充分接近 I 时,$x \cdot g \in U_1$,所以乘法运算 φ 的局部坐标表达式为

$$\begin{cases}\varphi^1(x,g) = x^1g^1 + x^2g^3, \\ \varphi^2(x,g) = x^1g^2 + x^2\cdot\dfrac{1+g^2g^3}{g^1}, \\ \varphi^3(x,g) = x^3g^1 + \dfrac{1+x^2x^3}{x^1}\cdot g^3.\end{cases} \tag{2.28}$$

由此得到

$$\left(\frac{\partial\varphi^i(x,g)}{\partial g^j}\bigg|_{g=I}\right) = \begin{pmatrix} x^1 & -x^2 & x^3 \\ 0 & x^1 & 0 \\ x^2 & 0 & \dfrac{1+x^2x^3}{x^1}\end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

用 X_i 表示由 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_I$ 经过左移动产生的左不变向量场，根据(1.12)式得到

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 & -x^2 & x^3 \\ 0 & x^1 & 0 \\ x^2 & 0 & \dfrac{1+x^2x^3}{x^1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x^3}\end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

所以

$$X_1 = x^1\frac{\partial}{\partial x^1} - x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3},$$

$$X_2 = x^1\frac{\partial}{\partial x^2},$$

$$X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1+x^2x^3}{x^1}\frac{\partial}{\partial x^3}.$$

直接计算得到

$$\begin{cases}[X_1,X_2] = 2X_2, \\ [X_1,X_3] = -2X_3, \\ [X_2,X_3] = X_1.\end{cases} \tag{2.31}$$

由此可见 SL(2) 的结构常数是

$$\begin{cases}C_{12}^2 = 2, \quad C_{12}^1 = C_{12}^3 = 0, \\ C_{13}^3 = -2, \quad C_{13}^1 = C_{13}^2 = 0, \\ C_{23}^1 = 1, \quad C_{23}^2 = C_{23}^3 = 0.\end{cases} \tag{2.32}$$

它们也可以从(2.27)式的三个矩阵求交换子得到.

假定与 X_1, X_2, X_3 对偶的 Maurer-Cartan 形式为 $\omega^1, \omega^2, \omega^3$，则

$$(\mathrm{d}x^1,\mathrm{d}x^2,\mathrm{d}x^3) = (\omega^1,\omega^2,\omega^3) \cdot \begin{pmatrix} x^1 & -x^2 & x^3 \\ 0 & x^1 & 0 \\ x^2 & 0 & \dfrac{1+x^2x^3}{x^1} \end{pmatrix},$$

$$(\omega^1,\omega^2,\omega^3) = (\mathrm{d}x^1,\mathrm{d}x^2,\mathrm{d}x^3) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1+x^2x^3}{x^1} & \dfrac{x^2(1+x^2x^3)}{(x^1)^2} & -x^3 \\ 0 & \dfrac{1}{x^1} & 0 \\ -x^2 & -\dfrac{(x^2)^2}{x^1} & x^1 \end{pmatrix},$$

因此在 U_1 上,Maurer-Cartan 形式的表达式为

$$\begin{cases} \omega^1 = \dfrac{1+x^2x^3}{x^1}\mathrm{d}x^1 - x^2\mathrm{d}x^3, \\ \omega^2 = \dfrac{x^2(1+x^2x^3)}{(x^1)^2}\mathrm{d}x^1 + \dfrac{1}{x^1}\mathrm{d}x^2 - \dfrac{(x^2)^2}{x^1}\mathrm{d}x^3, \\ \omega^3 = -x^3\mathrm{d}x^1 + x^1\mathrm{d}x^3. \end{cases} \tag{2.33}$$

在 $U_1 \cap U_2$ 上的坐标变换为

$$x^1 = y^1, x^2 = y^2, x^3 = \frac{y^1y^3 - 1}{y^2}, \tag{2.34}$$

所以在坐标域 U_2 上,Maurer-Cartan 形式的表达式为

$$\begin{cases} \omega^1 = \dfrac{y^1y^3-1}{y^2}\mathrm{d}y^2 - y^1\mathrm{d}y^3, \\ \omega^2 = y^3\mathrm{d}y^2 - y^2\mathrm{d}y^3, \\ \omega^3 = \dfrac{1}{y^2}\mathrm{d}y^1 - \dfrac{y^1(y^1y^3-1)}{(y^2)^2}\mathrm{d}y^2 + \dfrac{(y^1)^2}{y^2}\mathrm{d}y^3. \end{cases} \tag{2.35}$$

求(2.33)的外微分得到

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega^3, \\ \mathrm{d}\omega^2 = -2\omega^1 \wedge \omega^2, \\ \mathrm{d}\omega^3 = 2\omega^1 \wedge \omega^3. \end{cases} \tag{2.36}$$

由此得到,SL(2) 的结构常数即如(2.32)式所给出的.

SL(2) 的 Maurer-Cartan 形式可以通过另一条途径得到. SL(2) 是 GL(2) 的子群,也是 GL(2) 的超曲面,用 i : SL(2) → GL(2) 记包含映射. 如果 ω 是 GL(2) 上的左不变微分式,则 $i^*\omega$ 是 SL(2) 上的左不变微分式. 实际上,取 $a \in \mathrm{SL}(2)$,则

$$(L_a)^*(i^*\omega) = (i \circ L_a)^*\omega.$$

但是

$$i \circ L_a(g) = a \cdot g = L_a \circ i(g), \quad \forall\, g \in \mathrm{SL}(2),$$

所以

$$(L_a)^*(i^*\omega) = i^* \circ (L_a)^*\omega = i^*\omega, \quad \forall\, a \in \mathrm{SL}(2).$$

由例 1,GL(2) 的 Maurer-Cartan 形式为

$$\omega^1 = \frac{1}{\det a}(a_2{}^2 \mathrm{d}a_1{}^1 - a_2{}^1 \mathrm{d}a_1{}^2),$$

$$\omega^2 = \frac{1}{\det a}(a_2{}^2 \mathrm{d}a_2{}^1 - a_2{}^1 \mathrm{d}a_2{}^2),$$

$$\omega^3 = \frac{1}{\det a}(- a_1{}^2 \mathrm{d}a_1{}^1 + a_1{}^1 \mathrm{d}a_1{}^2),$$

$$\omega^4 = \frac{1}{\det a}(- a_1{}^2 \mathrm{d}a_2{}^1 + a_1{}^1 \mathrm{d}a_2{}^2).$$

所谓 $i^*\omega^\alpha$ 就是将 ω^α 限制在 SL(2) 上,即要求 $\det a = a_1{}^1 a_2{}^2 - a_2{}^1 a_1{}^2 = 1$. 因此,在 $a_1{}^1 \neq 0$ 时有

$$\begin{cases} \omega^1 = -\omega^4 = \dfrac{1 + a_2{}^1 a_1{}^2}{a_1{}^1}\mathrm{d}a_1{}^1 - a_2{}^1 \mathrm{d}a_1{}^2, \\ \omega^2 = \dfrac{a_2{}^1(1 + a_2{}^1 a_1{}^2)}{(a_1{}^1)^2}\mathrm{d}a_1{}^1 + \dfrac{1}{a_1{}^1}\mathrm{d}a_2{}^1 - \dfrac{(a_2{}^1)^2}{a_1{}^1}\mathrm{d}a_1{}^2, \\ \omega^3 = - a_1{}^2 \mathrm{d}a_1{}^1 + a_1{}^1 \mathrm{d}a_1{}^2, \end{cases}$$

此即(2.33)式给出的微分式. SL(2) 的结构方程(2.36)可以从 GL(2) 的结构方程得到.

GL(n) 的其它子群,比如 O(n),用参数方程表示比 SL(n) 困难得多,因此直接求该子群的左不变向量场和左不变微分式是比较困难的. 一条有效的途径是利用 GL(n) 的左不变微分式和包含映射. 设 G 是 GL(n) 的子群,也是 GL(n) 的嵌入子流形,用 $i: G \to \mathrm{GL}(n)$ 记包含映射,则 $i^*\omega_l^k$ 是 G 上的左不变微分式. 在 $i^*\omega_l^k, 1 \leqslant k, l \leqslant n$ 中找出极大线性无关组,它们便构成 G 上 Maurer-Cartan 形式的基底. 另外,根据 GL(n) 的结构方程(2.21)式得到

$$\mathrm{d}(i^*\omega_j^i) = -(i^*\omega_k^i) \wedge (i^*\omega_j^k),$$

并将上式化到 G 的 Maurer-Cartan 形式的基底上去,便得到 G 的结构方程,以及 G 的结构常数.

李群的结构方程很重要. 下面的定理说明了结构方程的重要性,它是所谓的活动标架法的基础.

定理 2.5　设 G 是 r 维李群,$\{\omega^i\}$ 是 G 上的 Maurer-Cartan 形式,结构常数为 C_{ij}^k. 若在 m 维光滑流形 M 上存在 r 个 1 次微分式 ψ^i,它们满足方程组

$$\mathrm{d}\psi^k = -\frac{1}{2}C_{ij}^k \psi^i \wedge \psi^j, \tag{2.37}$$

则在每一点 $p \in M$ 有一个邻域 U,以及光滑映射 $f: U \to G$,使得

$$f^* \omega^i = \psi^i. \tag{2.38}$$

如果 $f_1, f_2 : U \to G$ 是满足条件(2.38)的两个光滑映射,则存在元素 $g \in G$,使得

$$f_2 = L_g \circ f_1, \tag{2.39}$$

即 f_1 和 f_2 的象只差李群 G 中的一个左移动.

证明 设 $\pi_1 : M \times G \to M$ 和 $\pi_2 : M \times G \to G$ 分别是从积流形 $M \times G$ 到前、后两个因子的投影. 考虑 Pfaff 方程组

$$\theta^i = \pi_1^* \psi^i - \pi_2^* \omega^i = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant r. \tag{2.40}$$

由于 $\{\omega^i\}$ 是处处线性无关的,故 θ^i 也是处处线性无关的,因此方程组(2.40)在流形 $M \times G$ 上定义了一个 m 维光滑分布. 因为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta^i &= -\frac{1}{2} C^i_{jk} (\pi_1^* \psi^j \wedge \pi_1^* \psi^k - \pi_2^* \omega^j \wedge \pi_2^* \omega^k) \\
&= -\frac{1}{2} C^i_{jk} (\pi_1^* \psi^j \wedge \theta^k - \theta^j \wedge \pi_2^* \omega^k) \\
&= 0 \quad \mathrm{mod}(\theta^1, \cdots, \theta^r),
\end{aligned}$$

故方程组(2.40)是完全可积的. 根据第四章推论 3.3,对于每一点 $(x_0, a_0) \in M \times G$,分别有 x_0 的局部坐标系 $(U; x^\alpha)$ 和 a_0 的局部坐标系 $(V; a^i)$,以及定义在 $U \times V$ 上的 r 个光滑函数 $\varphi^i(x^1, \cdots, x^m, a^1, \cdots, a^r)$,使得在 $U \times V$ 上方程组(2.40)等价于

$$\mathrm{d}\varphi^i(x^1, \cdots, x^m, a^1, \cdots, a^r) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant r. \tag{2.41}$$

这意味着在 $U \times V$ 上存在 r^2 个光滑函数 $A^i_j(x, a)$,$\det(A^i_j) \neq 0$,使得

$$\theta^i = \pi_1^* \psi^i - \pi_2^* \omega^i = A^i_j \mathrm{d}\varphi^j. \tag{2.42}$$

令

$$C^i_0 = \varphi^i(x^1_0, \cdots, x^m_0, a^1_0, \cdots, a^r_0).$$

由于 $\{\omega^i\}$ 的线性无关性,从(2.42)式可知

$$\det\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial a^j}\right) \neq 0,$$

因此从方程组

$$\varphi^i(x^1, \cdots, x^m, a^1, \cdots, a^r) = C^i_0, \quad 1 \leqslant i \leqslant r \tag{2.43}$$

在点 x_0 的某个邻域 $U_1 \subset U$ 上能解出光滑函数

$$a^i = f^i(x^1, \cdots, x^m), \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \tag{2.44}$$

满足条件

$$f^i(x^1_0, \cdots, x^m_0) = a^i_0, \tag{2.45}$$

并且将(2.44)式代入(2.43)之后成为 U_1 上的恒等式.

现在,(2.44)式给出一个光滑映射 $f : U_1 \to G$,并且 $f(x_0) = a_0$. 考虑映

射 $i: U_1 \to U_1 \times G$,使得

$$i(x) = (x, f(x)), \tag{2.46}$$

那么 $\pi_1 \circ i = \mathrm{id}: U_1 \to U_1, \pi_2 \circ i = f: U_1 \to G$. 于是,

$$\begin{aligned} i^*(\pi_1^* \psi^i - \pi_2^* \omega^i) &= i^* \theta^i \\ &= (A_j^i \circ i) \cdot d(\varphi^j \circ i) = 0, \end{aligned}$$

即

$$f^* \omega^i = \psi^i.$$

假定 $f_1, f_2: U_1 \to G$ 是两个这样的光滑映射,记 $f_1(x_0) = a_1, f_2(x_0) = a_2$,令 $g = a_2 \cdot a_1^{-1}$,则

$$f_2(x_0) = L_g \circ f_1(x_0). \tag{2.47}$$

考虑映射 $i_1, i_2: U_1 \to M \times G$,使得

$$\begin{aligned} i_1(x) &= (x, L_g \circ f_1(x)), \\ i_2(x) &= (x, f_2(x)), \quad \forall\, x \in U_1, \end{aligned}$$

则它们都是方程组(2.40)的经过点(x_0, a_2)的 m 维积分流形,实际上,

$$\begin{aligned} i_1^* \theta^i &= (\pi_1 \circ i_1)^* \psi^i - (\pi_2 \circ i_1)^* \omega^i \\ &= \psi^i - (L_g \circ f_1)^* \omega^i \\ &= \psi^i - f_1^* \circ (L_g)^* \omega^i \\ &= \psi^i - f_1^* \omega^i = 0, \\ i_2^* \theta^i &= (\pi_1 \circ i_2)^* \psi^i - (\pi_2 \circ i_2)^* \omega^i \\ &= \psi^i - f_2^* \omega^i = 0. \end{aligned}$$

由于(2.40)是完全可积组,经过同一点(x_0, a_2)的 m 维(最高维)积分流形是唯一的,因此

$$f_2(x) = g \cdot f_1(x), \quad \forall\, x \in U_1,$$

即

$$f_2 = L_g \circ f_1 : U_1 \to G.$$

例 3 曲面论基本定理.

在第四章 §4,我们介绍了外微分和活动标架法在微分几何中的应用. 在本例,我们把曲面论基本定理归结为定理 2.5 的应用.

设 E^3 是 3 维欧氏空间,$\widetilde{\mathscr{P}}$ 是 E^3 上所有标架组成的空间. 在 E^3 中取定一个(单位正交)标架$\{O; \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$,则$\widetilde{\mathscr{P}}$ 和集合 $\mathbf{R}^3 \times \mathrm{GL}(3)$ 能够建立一一对应. 在第四章 §4 已经解释过$\widetilde{\mathscr{P}}$ 中的元素可看作 E^3 上的一个仿射变换. 设$(a, A) \in \mathbf{R}^3 \times \mathrm{GL}(3)$,令 $\widetilde{A}: E^3 \to E^3$ 为

$$\widetilde{A}\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^1\\a^2\\a^3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1^1 & a_2^1 & a_3^1\\a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\\a_1^3 & a_2^3 & a_3^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}. \tag{2.48}$$

$\widetilde{A}$是E^3到自身的仿射变换. E^3的两个仿射变换的合成看作这两个仿射变换的积. 设$\widetilde{B}$是对应于$(b,B)\in\mathbf{R}^3\times\mathrm{GL}(3)$的仿射变换,则容易计算出$\widetilde{A}\circ\widetilde{B}$对应于元素

$$(a+A\cdot b,A\cdot B)\in\mathbf{R}^3\times\mathrm{GL}(3).$$

在$\mathbf{R}^3\times\mathrm{GL}(3)$中引进乘法:

$$(a,A)\cdot(b,B)=(a+A\cdot b,A\cdot B). \tag{2.49}$$

容易证明:$\mathbf{R}^3\times\mathrm{GL}(3)$在乘法运算(2.49)下是一个12维李群,该李群记为$\mathbf{R}^3\ltimes\mathrm{GL}(3)$,是$\mathbf{R}^3$和$\mathrm{GL}(3)$的半直积. 请读者自己证明:该李群的Maurer-Cartan形式的基底恰好是$\mathscr{F}$中的活动标架的相对分量(参看第四章§4,(4.7)式),结构方程是第四章§4的(4.8)式.

如果在区域$U\subset\mathbf{R}^2$上给定两个2次微分式

$$\begin{cases}\varphi=g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta,\\ \psi=b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta,\end{cases} \tag{2.50}$$

其中矩阵$(g_{\alpha\beta})$是正定的,而且$g_{\alpha\beta},b_{\alpha\beta}$满足Gauss方程和Codazzi方程.令

$$\begin{cases}\psi^\alpha=\mathrm{d}u^\alpha,\quad \psi^3=0,\\ \psi_\alpha^\beta=\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta\mathrm{d}u^\gamma,\quad \psi_\alpha^3=b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\beta,\\ \psi_3^\alpha=-g^{\alpha\beta}b_{\beta\gamma}\mathrm{d}u^\gamma,\quad \psi_3^3=0,\end{cases} \tag{2.51}$$

其中$1\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant2$.那么,微分式$\varphi,\psi$满足Gauss-Codazzi方程等价于1次微分式(2.51)满足方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}\psi^i=\psi^j\wedge\psi_j^i,\\ \mathrm{d}\psi_i^j=\psi_i^k\wedge\psi_k^j.\end{cases} \tag{2.52}$$

注意到(2.52)式与李群$\mathbf{R}^3\ltimes\mathrm{GL}(3)$的结构方程(或者是仿射空间$A^3$的结构方程,参看第四章§4,(4.8)式)是一致的,因此从定理2.5得知存在光滑映射$f:U\to\mathbf{R}^3\ltimes\mathrm{GL}(3)$,使得

$$\begin{cases}f^*\omega^i=\psi^i,\\ f^*\omega_i^j=\psi_i^j.\end{cases}$$

在$\mathbf{R}^3\ltimes\mathrm{GL}(3)$和标架空间$\mathscr{F}$的等同下,$f(U)$就是$\mathscr{F}$中依赖2个参数的标架族.在初始值满足适当条件下,该标架族的原点描出的曲面就是以φ,ψ为第一基本形式和第二基本形式的曲面.具体的细节在此不多说了,读者可参看[3].

下面的定理也是定理2.5的一个应用:

定理2.6 设G是一个r维连通李群,$\sigma:G\to G$是光滑映射,则σ是李群G上的一个左移动,当且仅当σ保持李群G的Maurer-Cartan形式不变.

证明 G 的 Maurer-Cartan 形式是左不变微分式，所以必要性成立.

现证充分性. 设 G 的 Maurer-Cartan 形式是 $\{\omega^i\}$. 对照定理 2.5，令 $M = G, \psi^i = \omega^i, g = \sigma(e)$. 那么映射 σ 和左移动 $L_g: G \to G$ 满足同一组方程

$$\sigma^* \omega^i = \omega^i, \quad (L_g)^* \omega^i = \omega^i, \quad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

根据定理 2.5 的后一个断言，存在元素 $h \in G$，使得

$$\sigma = L_h \circ L_g.$$

将上式两边作用在 e 上得到

$$g = h \cdot g, \quad h = e,$$

所以 $\sigma = L_g$. 证毕.

§3 李群的同态和李子群

在掌握了李群的概念以及李群上的线性结构之后，我们需要考察李群之间的关系. 既然李群是群和光滑流形的结合体，因此从一个李群到另一个李群的有意义的映射应该既要保持群的结构不变，又要保持可微性不变.

定义 3.1 设 G, H 是两个李群. 若 $\varphi: G \to H$ 是一个光滑映射，并且是从 G 到 H 的群同态，则称 φ 是从**李群 G 到李群 H 的同态**.

如果李群的同态 $\varphi: G \to H$ 是 G 和 H 作为光滑流形的可微同胚，则称 φ 为**李群 G 和 H 的同构**. 李群 G 到它自身的同构称为**李群 G 的自同构**.

定义 3.2 设 $\mathscr{G}, \mathscr{H}$ 是两个李代数. 设 $\psi: \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ 是线性映射，并且 ψ 保持括号积，即

$$\psi([X,Y]) = [\psi(X), \psi(Y)], \quad \forall\, X, Y \in \mathscr{G},$$

则称 ψ 是从**李代数 $\mathscr{G}$ 到 $\mathscr{H}$ 的同态**.

如果李代数的同态 $\psi: \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ 是单的满映射，则称 ψ 是**李代数 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{H}$ 的同构**. 李代数 $\mathscr{G}$ 到它自身的同构称为**李代数 $\mathscr{G}$ 的自同构**.

关于李群及其李代数的同态，有下面的重要关系.

定理 3.1 设 G, H 是两个李群，$\mathscr{G}, \mathscr{H}$ 分别是它们的李代数. 假定 $\varphi: G \to H$ 是李群的同态，则

(1) 对于 G 上任意一个左不变向量场 $X \in \mathscr{G}$，在 H 上必有唯一的一个左不变向量场 $\widetilde{X} \in \mathscr{H}$，使得 $\widetilde{X}$ 和 X 是 φ-相关的；

(2) 由上述对应 $X \to \widetilde{X}$ 给出的映射 $\psi = \varphi_*: \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ 是李代数的同态.

(3) 如果 $\varphi: G \to H$ 是李群的同构，则 $\psi = \varphi_*: \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ 是李代数的同构.

证明 (1) 设李群 G 和 H 的单位元素分别记作 e 和 $\tilde{e}$，同态 $\varphi: G \to H$ 把 e 映为 $\tilde{e}$，因此它的诱导切映射 $\varphi_{*e}: T_eG \to T_{\tilde{e}}H$ 给出了李群 G 和 H 在单位元素处的切空间之间的线性映射.

设 X 是 G 上的左不变向量场，在 H 上构造左不变向量场 $\widetilde{X}$ 如下：

$$\tilde{X}(h) = (L_h)_{*\tilde{e}}(\varphi_{*e}(X(e))), \quad \forall\, h \in H. \tag{3.1}$$

我们要证明 $\tilde{X}$ 和 X 是 φ－相关的.

由于 φ 是同态,故对任意的 $g,g' \in G$ 有

$$\varphi(g \cdot g') = \varphi(g) \cdot \varphi(g'),$$

即

$$\varphi \circ L_g(g') = L_{\varphi(g)} \circ \varphi(g'), \quad \forall\, g' \in G,$$

$$\varphi \circ L_g = L_{\varphi(g)} \circ \varphi : G \to H. \tag{3.2}$$

于是对于任意的 $g \in G$ 有

$$\begin{aligned}&\varphi_{*g}(X(g))\\ =&\varphi_{*g} \circ (L_g)_{*e}(X(e))\\ =&(L_{\varphi(g)})_{*\tilde{e}} \circ \varphi_{*e}(X(e))\\ =&\tilde{X}(\varphi(g)),\end{aligned}$$

所以切向量场 $\tilde{X}$ 和 X 是 φ-相关的.

与 X 是 φ-相关的切向量场 $\tilde{X}$ 显然是唯一的.若 $Z \in \mathscr{H}$,并且 Z 与 X 是 φ-相关的,则

$$\varphi_{*e}(X(e)) = Z(\varphi(e)) = Z(\tilde{e}) = \tilde{X}(\tilde{e}).$$

由 Z 的左不变性得到 $Z = \tilde{X}$.

(2) 由对应 $X \to \tilde{X}$ 给出的映射 $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ 显然是线性的.设 $X,Y \in \mathscr{G}$,在 H 上对应的左不变向量场分别记为 $\tilde{X},\tilde{Y}$.根据第三章的定理 2.5,由于 $\tilde{X}$,$\tilde{Y}$ 分别与 X,Y 是 φ-相关的,所以$[\tilde{X},\tilde{Y}]$ 与$[X,Y]$ 是 φ-相关的,特别是

$$\varphi_*([X,Y](e)) = [\tilde{X},\tilde{Y}](\tilde{e}).$$

因为$[\tilde{X},\tilde{Y}]$ 仍是 H 上的左不变向量场,由前款的唯一性得到

$$[\tilde{X},\tilde{Y}] = \widetilde{[X,Y]},$$

即

$$\psi([X,Y]) = [\psi(X),\psi(Y)],$$

故 $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ 是李代数的同态.

(3) 若 $\varphi : G \to H$ 是李群的同构,则 φ 必是光滑流形 G 和 H 的可微同胚,因此其诱导切映射 $\varphi_{*e} : T_eG \to T_{\tilde{e}}H$ 是线性同构.由此可见 $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ 必是线性同构,所以 ψ 是李代数 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{H}$ 的同构.

定理 3.2　设 $\varphi : G \to H$ 是李群的同态,ω 是 H 上任意一个左不变 1 次微分式,则 $\varphi^*\omega$ 必是 G 上的左不变 1 次微分式,故有同态 $\varphi^* : \mathscr{H}^* \to \mathscr{G}^*$.

证明　设 $\omega \in \mathscr{H}^*$,则对任意的 $g \in G$ 有

$$\begin{aligned}(L_g)^*(\varphi^*\omega) &= (\varphi \circ L_g)^*\omega\\ &= (L_{\varphi(g)} \circ \varphi)^*\omega\end{aligned}$$

$$= \varphi^* \circ (L_{\varphi(g)})^* \omega$$
$$= \varphi^* \omega,$$

因此 $\varphi^* \omega$ 是 G 上的左不变微分式. 映射 $\omega \to \varphi^* \omega$ 显然是线性的.

推论 3.3　设 $\varphi: G \to H$ 是李群的同态, $\{\omega^i\}$ 是 H 上的 Maurer-Cartan 形式, 则 $\{\varphi^* \omega^i\}$ 是李群 G 上的一组左不变微分式, 并且满足 $\{\omega^i\}$ 所满足的结构方程.

证明　设

$$\mathrm{d}\omega^i = -\frac{1}{2} C^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k,$$

其中 C^i_{jk} 是常数. 由于诱导映射 φ^* 与外积、外微分的可交换性(第四章定理 1.3, 定理 2.4) 故有

$$\mathrm{d}(\varphi^* \omega^i) = -\frac{1}{2} C^i_{jk} (\varphi^* \omega^j) \wedge (\varphi^* \omega^k).$$

定理 3.4　设 G 是连通李群, $\varphi, \psi: G \to H$ 是从李群 G 到 H 的两个同态. 如果 φ 和 ψ 诱导出 G 和 H 的李代数 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{H}$ 之间的同一个同态 $\varphi_* = \psi_*: \mathscr{G} \to \mathscr{H}$, 则 $\varphi = \psi$.

证明　我们把定理 3.4 归结为定理 2.5 的唯一性. 设 $\varphi: G \to H$ 是李群的同态, $\{\omega^i\}$ 是 H 的 Maurer-Cartan 形式, 令 $\alpha^i = \varphi^* \omega^i$, 则它们是 G 上的左不变微分式, 并且由推论 3.3 得到

$$\mathrm{d}\alpha^i = -\frac{1}{2} C^i_{jk} \alpha^j \wedge \alpha^k,$$

其中 C^i_{jk} 是李群 H 关于 Maurer-Cartan 形式 $\{\omega^i\}$ 的结构常数. 现在 $\psi: G \to H$ 是另一个李群同态, 且 $\psi_* = \varphi_*$, 所以

$$\psi^* \omega^i = \varphi^* \omega^i = \alpha^i,$$

且

$$\psi(e) = \varphi(e) = \tilde{e},$$

因此由定理 2.5 的唯一性得到 $\psi = \varphi: G \to H$.

定理 3.1 说明, 李群 G 和 H 之间的一个同态诱导出它们的李代数 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{H}$ 之间的一个同态. 如果李群 G 和 H 是同构的, 则它们的李代数 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{H}$ 也是同构的. 定理 3.4 则进一步说明, 如果 G 是连通李群, 且从 G 到 H 的两个李群同态所诱导出的两个李代数同态是相同的, 则这两个李群同态也是相同的. 倒过来, 如果在李群 G 和 H 的李代数之间有一个同态, 那么它是否能提升为李群之间的同态呢? 如果李代数 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{H}$ 是同构的, 则李群 G 和 H 是否是同构的? 这些问题是李群论的基本问题, 下面的定理回答了这些问题. 由于它的证明超出了我们这个初等课程的范围, 在这里就不加以证明了. 读者可查看[12], 第一章.

定理 3.5 设 G,H 是两个连通李群，$\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{H}$ 是它们的李代数. 假定 $\psi:\mathscr{G}\to\mathscr{H}$ 是李代数的同态. 如果G是单连通的，则存在唯一的一个李群同态 $\varphi: G\to H$，使得 $\varphi_*=\psi$. 特别地，如果 ψ 是同构，并且 G 和 H 都是单连通的，则 G 和 H 必是同构的.

在上面的定理中，单连通性条件是必不可少的. 我们举一个最简单的例子来说明这一点. 设 $G=\mathbf{R}^1$，即实数加群，它是单连通的；设 $H=T^1$ 是一维环群，它不是单连通的. G 和 H 有相同的李代数 $\mathbf{R}^1$. 令 $\varphi(t)=e^{2\pi i t}$，$t\in\mathbf{R}^1$，则 φ 给出了从 G 到 H 的同态，它诱导出李代数的同构. 反过来，因为 H 的紧致性和连通性，若有李群同态 $\tilde{\varphi}: H\to G$，则 $\tilde{\varphi}(H)$ 必定是 G 的紧致连通集. 由此得到 $\tilde{\varphi}$ 必定是平凡的，即 $\tilde{\varphi}(H)=\{0\}$. 因此 $\tilde{\varphi}_*$ 不是 H 和 G 的李代数同构；换言之，H 和 G 的李代数之间的同构不能够提升为从李群 H 到 G 的同态. 定理 3.5 说明，有限维李代数和单连通的连通李群在同构意义下是彼此对应的.

定义 3.3 设 H,G 是两个李群，$H\subset G$. 如果

(1) H 是 G 的子群；

(2) 包含映射 $i: H\to G$ 是单一的浸入子流形，则称 H 是 G 的**李子群**.

有两点需要强调一下：(1) 在讲到 H 是 G 的李子群时，首先要求 H 本身是一个李群，即 H 本身有光滑结构，而且群运算关于这种光滑结构是光滑的；(2) 尽管 H 是 G 的子群，但是 H 作为 G 的李子群，其拓扑未必是从 G 诱导而来的，换言之，包含映射 $i: H\to G$ 不必是嵌入子流形.

李子群的定义可叙述成更一般的形式.

定义 3.3′ 设 H 和 G 是两个李群，如果

(1) 存在群的同态 $\varphi: H\to G$；

(2) $\varphi: H\to G$ 是单一的浸入子流形，则称 (φ,H) 为李群 G 的李子群.

定义 3.3′ 和定义 3.3 是等价的. 既然映射 $\varphi: H\to G$ 是单的，可以把 H 和它的象集等同起来，并把 H 的拓扑结构和光滑结构通过 φ 移植到象集 $\varphi(H)$ 上来，使得 $\varphi: H\to\varphi(H)$ 是光滑同胚；这样，$\varphi(H)$ 成为一个李群，并且 $\varphi(H)$ 是 G 的抽象子群，包含映射 $i:\varphi(H)\to G$ 是浸入子流形.

定义 3.3′ 明确地说出了李子群和李群同态这两个概念的异同处. 很明显，李子群 $\varphi: H\to G$ 是从李群 H 到 G 的一个同态，但是要求 φ 是单的，并且切映射 φ_* 也处处是单的. 特别是，切映射 $\varphi_{*\tilde{e}}: T_{\tilde{e}}H\to T_eG$ 是单的，这意味着李代数同态 $\varphi_*:\mathscr{H}\to\mathscr{G}$ 是单的，$\varphi_*(\mathscr{H})$ 可以看作 $\mathscr{G}$ 的一个子代数.

定义 3.4 设 G 是李群. 所谓李群 G 的一个**单参数子群**是指李群的同态 $\sigma:\mathbf{R}\to G$，这里 $\mathbf{R}$ 是实数关于加法所构成的 1 维李群.

定理 3.6 李群 G 上任意一个非零的左不变向量场 X 唯一地决定了李群

G 的一个单参数子群 $\sigma: \mathbf{R} \to G$,使得 $\sigma_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = X(\sigma(t))$,并且切向量场 X 在 G 上生成的单参数变换群 φ_t 恰好是 $\sigma(t)$ 在 G 上给出的右移动,即

$$\varphi_t(g) = R_{\sigma(t)}(g), \quad \forall\, g \in G. \tag{3.3}$$

证明　根据第三章定理 3.1,存在单位元素 e 的一个邻域 U,以及作用在 U 上的局部单参数变换群 $\varphi: (-\varepsilon,\varepsilon) \times U \to G$,使得 $X|_U$ 是它的诱导切向量场.

任取 $g \in G$,则 $\widetilde{U} \equiv g \cdot U = L_g(U)$ 是 g 的一个邻域. 令 $\tilde{\varphi}: (-\varepsilon,\varepsilon) \times \widetilde{U} \to G$,使得

$$\tilde{\varphi}(t,h) = g \cdot \varphi(t,g^{-1}h), \quad \forall\, (t,h) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \times \widetilde{U}.$$

显然,$\tilde{\varphi}$是作用在$\widetilde{U}$上的局部单参数变换群,它的诱导切向量场仍然是X. 实际上

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\tilde{\varphi}(t,h) &= (L_g)_*\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\varphi(t,g^{-1}h)\right) \\ &= (L_g)_*(X(g^{-1}h)) \\ &= X(h),\end{aligned}$$

上面最后一个等号的根据是 X 的左不变性. 上述论证表明,存在一个公共的正数 ε,使得对于每一个 $g \in G$,存在 g 的一个邻域 $\widetilde{U}$ 以及局部单参数变换群 $\tilde{\varphi}: (-\varepsilon,\varepsilon) \times \widetilde{U} \to G$,它的诱导切向量场是$X|_{\widetilde{U}}$. 根据第三章定理 3.2 后面的说明,$X$ 必在 G 上生成一个单参数可微变换群,记为 $\varphi: \mathbf{R} \times G \to G$.

令

$$\sigma(t) = \varphi_t(e), \quad \forall\, t \in \mathbf{R}, \tag{3.4}$$

则

$$\begin{aligned}\sigma(t+s) &= \varphi_{s+t}(e) = \varphi_s \circ \varphi_t(e) \\ &= \varphi_s(\sigma(t)) = \varphi_s \circ L_{\sigma(t)}(e).\end{aligned}$$

由于 X 在左移动 $L_{\sigma(t)}$ 下是不变的,由第三章推论 3.4 知 X 生成的单参数可微变换群 φ_s 与 $L_{\sigma(t)}$ 是可交换的,因此

$$\begin{aligned}\sigma(t+s) &= L_{\sigma(t)} \circ \varphi_s(e) \\ &= L_{\sigma(t)}(\sigma(s)) \\ &= \sigma(t) \cdot \sigma(s).\end{aligned} \tag{3.5}$$

这说明光滑映射 $\sigma: \mathbf{R} \to G$ 是李群的同态,即 $\sigma: \mathbf{R} \to G$ 是李群 G 的单参数子群.

由定义,

$$\sigma'(0) = X(e),$$

因此从(3.5) 式得到

$$\sigma_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=\sigma'(t)=(L_{\sigma(t)})_*(\sigma'(0))$$
$$=(L_{\sigma(t)})_*(X(e))=X(\sigma(t)).$$

另外，由于 X 是左不变向量场，故对于任意的 $g\in G$ 有

$$\varphi_t\circ L_g=L_g\circ\varphi_t$$

(第三章推论 3.4). 将上式作用在单位元素 e 上，得到

$$\varphi_t(g)=g\cdot\sigma(t)=R_{\sigma(t)}(g),$$

即

$$\varphi_t=R_{\sigma(t)}.$$

证毕.

当 $X\neq 0$ 时，上式表明 $\sigma:\mathbf{R}\to G$ 是浸入子流形，所以当 σ 是单映射时，$\sigma:\mathbf{R}\to G$ 是 G 的 1 维李子群. 若 σ 不是单映射时，则存在最小正数 t_0，使得 $\sigma(t_0)=e$，此时以 $\mathrm{Span}\{X\}$ 为李代数的 1 维李子群是一维环群 T^1.

根据定理 3.6 可以给出下面的定义：

定义 3.5　设 G 是李群，对于任意的 $X\in T_eG$，用 $\sigma_X:\mathbf{R}\to G$ 表示李群 G 中由 X 决定的单参数子群. 定义映射 $\exp:T_eG\to G$，使得

$$\exp(X)=\sigma_X(1),\quad \forall\, X\in T_eG,\tag{3.6}$$

称为李群 G 的**指数映射**.

定理 3.7　设 G 是 r 维李群，则指数映射 $\exp:T_eG\to G$ 是光滑映射，并且

$$(\exp)_{*0}=\mathrm{id}:T_eG\to T_eG.$$

这里，因为 T_eG 是向量空间，它在零向量处的切空间与它自身是自然等同的.

证明　在单位元素 e 处取局部坐标系 $(U;x^i)$. 设由 $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_e$ 所生成的左不变向量场为

$$\widetilde{X}_i=\sum_{j=1}^r l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j},\tag{3.7}$$

其中 $l_i^j(x)$ 是 x 的光滑函数.

任取 $(a^1,\cdots,a^r)\in\mathbf{R}^r$，则 $X=\sum_{i=1}^r a^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_e$ 所生成的左不变向量场为

$$\widetilde{X}=\sum_{i=1}^r a^iX_i=\sum_{i,j}a^il_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}.\tag{3.8}$$

根据定义，$\exp(tX)$ 是方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x^j(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^r a^il_i^j(x(t)),\\ x^j(0)=0\end{cases}\tag{3.9}$$

的解，所以 $\exp(tX)$ 是 $t,a^1,\cdots,a^r$ 的光滑函数，其中 $|t|<\varepsilon$.

对于任意的 $t\in\mathbf{R}$，存在正整数 N，使得 $\left|\frac{t}{N}\right|<\varepsilon$，所以

$$\exp(tX)=\left(\exp\left(\frac{t}{N}\cdot X\right)\right)^{N}.$$

由于李群的乘法的光滑性，$\exp(t\cdot X)$ 是 $(t,a^1,\cdots,a^r)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^r$ 的光滑函数.特别地，$\exp X$ 是 $a^1,\cdots,a^r$ 的光滑函数，即 $\exp:T_eG\to G$ 是光滑映射.

因为 $\exp(t\cdot X)$ 是 G 中由 X 生成的左不变向量场 $\widetilde{X}$ 的经过点 e 的积分曲线，故

$$\begin{aligned}X&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\exp(t\cdot X)\\&=(\exp)_{*0}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(t\cdot X)\right)\\&=(\exp)_{*0}(X),\end{aligned}$$

因此 $(\exp)_{*0}=\mathrm{id}:T_eG\to T_eG$.

根据第二章的定理 4.1，我们有下面的推论：

推论 3.8　李群 G 的指数映射 $\exp:T_eG\to G$ 在零向量的一个邻域内是光滑同胚.

推论 3.9　李群 G 在单位元素 e 处存在局部坐标系 $(U;x^i)$，使得切向量 $X=\sum\limits_{i=1}^{r}a^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_e\in T_eG$ 所决定的单参数子群 $\sigma(t)$ 限制在 U 内的方程是

$$x^i(\sigma(t))=ta^i,\quad 1\leqslant i\leqslant r.\tag{3.10}$$

证明　因为指数映射 exp 在单位元素 e 的附近是光滑同胚，于是可取 T_eG 中的坐标系为 G 在 e 的邻域内的坐标系.在 T_eG 中取定一个基底 $\{\delta_i\}$，那么在 e 的邻域内有局部坐标系 $(U;x^i)$，使得

$$x^i\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{r}a^j\delta_j\right)\right)=a^i,$$

于是

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_e=\delta_i,$$

$$x^i(\sigma(t))=x^i\left(\exp\left(t\cdot\sum_{j=1}^{r}a^j\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_e\right)\right)=t\cdot a^i.$$

如上所述的局部坐标系 $(U;x^i)$ 称为李群 G 在单位元素 e 处的**第一类标准坐标系**.

定理 3.10　设 $\varphi:G\to H$ 是从李群 G 到 H 的同态，则对任意的 $X\in T_eG$ 有

$$\varphi(\exp(X))=\exp(\varphi_*(X)).$$

证明　由 X 在 G 中决定的单参数子群是

$$\sigma(t)=\exp(t\cdot X).$$

因为 $\varphi: G\to H$ 是李群的同态，所以 $\varphi\circ\sigma:\mathbf{R}\to H$ 仍是光滑映射，并且

$$\begin{aligned}\varphi\circ\sigma(t+s)&=\varphi(\sigma(t)\cdot\sigma(s))\\&=\varphi(\sigma(t))\cdot\varphi(\sigma(s)),\end{aligned}$$

所以 $\varphi\circ\sigma:\mathbf{R}\to H$ 是从李群 $\mathbf{R}$ 到 H 内的同态，即 $\varphi(\sigma(t))$ 是 H 中的一个单参数子群. 它在 $t=0$ 处的切向量是

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\varphi(\sigma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}&=\varphi_{*e}\left(\left.\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)\\&=\varphi_{*e}((\exp)_{*0}(X))\\&=\varphi_{*e}(X),\end{aligned}$$

所以

$$\varphi(\sigma(t))=\varphi(\exp(t\cdot X))=\exp(t\cdot\varphi_{*e}(X)).$$

令 $t=1$，则得所求的结果.

例 1　$\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ 的指数映射.

$\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ 是非退化的 $n\times n$ 复矩阵构成的乘法群，是一个 $2n^2$ 维李群，称为**复一般线性群**. 单位矩阵 I 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ 的单位元素.

用 $\mathrm{gl}(n,\mathbf{C})$ 表示全体 $n\times n$ 复矩阵的集合. 对于任意的 $A\in\mathrm{gl}(n,\mathbf{C})$，令

$$e^A=I+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^r}{r!}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{A^r}{r!},\tag{3.11}$$

规定 $A^0=I$. 不难证明，在 $\mathrm{gl}(n,\mathbf{C})$ 的任意一个有界域内，右端的幂级数是一致收敛的. 事实上，对于任意给定的一个有界域 $D\subset\mathrm{gl}(n,\mathbf{C})$，必有一个正数 B，使得属于 D 的每一个矩阵 A 的分量 A_i^j 满足不等式

$$|A_i^j|\leqslant B,\tag{3.12}$$

因此

$$|(A^r)_i^j|\leqslant n^{r-1}B^r.\tag{3.13}$$

由于级数 $\sum\limits_{r=0}^{\infty}\dfrac{n^{r-1}B^r}{r!}$ 是收敛的，所以幂级数(3.11) 在 D 内一致收敛.

用 $\sigma_r(A)$ 记幂级数(3.11) 的前 $r+1$ 项之和，因此

$$e^A=\lim_{r\to\infty}\sigma_r(A).$$

任意给定 $B\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$，显然有

$$B\cdot\sigma_r(A)\cdot B^{-1}=\sigma_r(B\cdot A\cdot B^{-1}),$$

取极限得到

$$B\cdot e^A\cdot B^{-1}=e^{BAB^{-1}}.\tag{3.14}$$

在线性代数中已经知道，每一个 $n\times n$ 复矩阵 A 相似于一个 Jordan 矩阵，

因此存在 $B \in \mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ 使得 $B \cdot A \cdot B^{-1}$ 成为上三角矩阵，并且在对角线上的元素是矩阵 A 的特征值，即

$$B \cdot A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

由此可见

$$B \cdot A^r \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1{}^r & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n{}^r \end{pmatrix},$$

因此

$$B \cdot e^A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

所以

$$\det e^A = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = \exp\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i\Big) = e^{\operatorname{tr} A}. \tag{3.15}$$

特别是 $\det e^A \neq 0, \forall A \in \mathrm{gl}(n,\mathbf{C})$，故 $e^A \in \mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$.

取定一个矩阵 $A \in \mathrm{gl}(n,\mathbf{C})$，映射 $t \to e^{tA}$ 显然是光滑的，并且

$$e^{tA}\big|_{t=0} = I,$$

$$e^{tA} \cdot e^{sA} = e^{(t+s)A}, \tag{3.16}$$

因此这是 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ 的一个单参数子群，它在 I 处的切向量为 A. 根据指数映射 $\exp: \mathrm{gl}(n,\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ 的定义，

$$\exp A = e^A, \quad \forall A \in \mathrm{gl}(n,\mathbf{C}). \tag{3.17}$$

“指数映射”的名称就是由此而来的.

例 2　一般线性群 $\mathrm{GL}(n)$.

$n \times n$ 复矩阵 X 可以写成

$$X = A + \sqrt{-1}B,$$

其中 A,B 是 $n \times n$ 实矩阵，分别称为 X 的实部和虚部，记作 $A = \mathrm{Re}X, B = \mathrm{Im}X$. 这样，

$$\mathrm{GL}(n) = \{X \in \mathrm{GL}(n,\mathbf{C}) : \mathrm{Im}X = 0\}. \tag{3.18}$$

$\mathrm{GL}(n)$ 是一个李群，并且是 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ 的李子群. $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ 有很多李子群，列举如下：

特殊线性群 $SL(n)=\{A\in GL(n):\det A=1\}$,

正交群 $O(n)=\{A\in GL(n):A^t\cdot A=I\}$,

特殊正交群 $SO(n)=O(n)\cap SL(n)$,

复特殊线性群 $SL(n,\mathbf{C})=\{A\in GL(n,\mathbf{C}):\det A=1\}$,

复正交群 $O(n,\mathbf{C})=\{A\in GL(n,\mathbf{C}):A^t\cdot A=I\}$,

酉群 $U(n)=\{A\in GL(n,\mathbf{C}):\overline{A}^t\cdot A=I\}$,

其中 $\overline{A}$ 是指 A 的元素取复共轭所得的矩阵.

由于

$$\det e^A=e^{trA},\quad \overline{e^A}=e^{\overline{A}},\quad (e^A)^t=e^{A^t},$$

不难知道上面各个李群的李代数是

$$\begin{aligned}&sl(n)=\{A\in gl(n):trA=0\},\\&o(n)=so(n)=\{A\in gl(n):A^t+A=0\},\\&sl(n,\mathbf{C})=\{A\in gl(n,\mathbf{C}):trA=0\},\\&o(n,\mathbf{C})=\{A\in gl(n,\mathbf{C}):A^t+A=0\},\\&u(n)=\{A\in gl(n,\mathbf{C}):\overline{A^t}+A=0\}.\end{aligned}$$

例 3 对于特殊线性群 $SL(2)$ 而言,指数映射 $\exp:sl(2)\to SL(2)$ 不是满映射.

李代数 $sl(2)$ 是由迹为零的 2×2 实矩阵构成的集合. 设 $A\in sl(2)$,则 A 可以表示成

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix},$$

其中 a,b,c 为实数. A 的特征多项式是

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^2-(a^2+bc)=0,$$

故 A 的特征根为 $\pm\alpha$,或 $\pm\alpha\sqrt{-1}$,其中 $\alpha=\sqrt{|a^2+bc|}$;这样,e^A 的特征根或为一对互为倒数的正数,或为一对互为共轭的复数(包括一对 $+1$,或一对 -1). 所以 $SL(2)$ 中特征根为两个不同负数的元素,例如

$$\begin{pmatrix}-2&0\\0&-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$

不会是任何属于 $sl(2)$ 的矩阵在指数映射下的象,即它不在任何单参数子群上.

对于任意的紧致连通李群 G,指数映射 $\exp:T_eG\to G$ 必定是映满的. 要证明这个事实需要用到黎曼几何知识. 大意如下:首先,在紧致李群 G 上存在双不变黎曼度量(即在这种度量下,左移动和右移动都是该黎曼流形的等距变换). 而在具有双不变黎曼度量的李群上,测地线或者是李群的单参数子群,或

者是单参数子群与左移动的合成. 再有, 紧致黎曼流形必定是完备的, 因此 G 中每一点都能用测地线和单位元素连结起来, 这条测地线必是李群 G 的一个单参数子群, 即 G 的每一个元素必落在 G 的一个单参数子群上. 证明的细节可参考[21].

根据上面的断言, 要找指数映射非满的李群的例子, 只能在非紧致李群中去找.

李群的闭子群在李群论中有特殊的重要地位. 所谓李群 G 的**闭子群** H 是指 H 既是群 G 的子群, 又是 G 作为拓扑空间的闭子集. 它的重要性体现在下面两个定理之中, 有很多应用. 因为这些定理的证明比较繁, 需要比较长的篇幅, 在本课程只限于了解这些结论.

定理 3.11 设 G 是李群, H 是 G 的闭子群, 则在 H 上存在唯一的一个光滑结构, 使得 H 成为一个李群, 并且 $i: H \to G$ 是 G 的李子群. 此外, (i, H) 是 G 的嵌入子流形.

最后一个结论还能加强为: 设 $\varphi: H \to G$ 是李群 G 的李子群, 则 (φ, H) 是 G 的嵌入子流形当且仅当 $\varphi(H)$ 是 G 的闭子集.

定理 3.12 设 H 是李群 G 的闭子群, 记左陪集的集合 $\{g \cdot H : g \in G\}$ 为 G/H, 自然投影为 $\pi: G \to G/H$, 则在 G/H 上存在唯一的一个光滑流形结构, 使得

(1) $\pi: G \to G/H$ 是光滑映射;

(2) G/H 在 G 中有局部的光滑截面, 即: 对于任意的 $g \cdot H \in G/H$, 存在 $g \cdot H$ 在 G/H 中的开邻域 W, 以及光滑映射 $\tau: W \to G$, 满足

$$\pi \circ \tau = \mathrm{id}: W \to W.$$

定理 3.11 给出了判断李群的一个子群是李子群的一个方便的准则. 在例 2 中, $\mathrm{GL}(n)$, $\mathrm{SL}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SL}(n,\mathbf{C})$, $\mathrm{O}(n,\mathbf{C})$, $\mathrm{U}(n)$ 等等都是 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ 的闭子群, 所以它们都是 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ 的李子群.

§4 伴随表示

在上一节的例子中, 我们已经对于复一般线性群和实一般线性群作了详细的讨论. 这些群都是具体的李群, 它们的李代数比较简单, 结构常数也容易算出来. 了解一个抽象李群的性状的办法之一是研究它到一般线性群的同态, 也就是把李群 G 的每一个元素表示成某个向量空间到自身的非退化线性变换.

定义 4.1 设 V 是实数域 $\mathbf{R}$(或复数域 $\mathbf{C}$) 上的 n 维向量空间, 用 $\mathrm{GL}(V)$ 表示 V 上的线性自同构群. 从李群 G 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个同态 $\varphi: G \to \mathrm{GL}(V)$ 称为李群 G 的一个**表示**(或**复表示**), 记为 (φ, V), 其中 V 称为李群 G 的**表示空间**.

定义 4.2 设 V 是实数域 $\mathbf{R}$(或复数域 $\mathbf{C}$)上的 n 维向量空间,用 $\mathrm{gl}(V)$ 表示 V 到自身的线性变换的集合,它关于交换子构成一个李代数. 从李代数 $\mathscr{G}$ 到 $\mathrm{gl}(V)$ 的一个同态 $\psi:\mathscr{G}\to\mathrm{gl}(V)$ 称为李代数 $\mathscr{G}$ 的一个**表示**(或**复表示**),记为 (ψ,V),其中 V 称为李代数 $\mathscr{G}$ 的**表示空间**.

李群和李代数的表示论已经成为一个非常专门的深刻理论,它在李群、李代数的结构理论,齐性空间、对称空间上的调和分析,泛函分析,微分几何以及物理学等各个方面有广泛的实质性应用,成为这些领域内不可缺少的工具. 在本节我们要介绍李群及其李代数的一种自然的、因而是十分重要的表示,称为伴随表示,其表示空间是李群的李代数本身.

对于任意的 $g\in G$,定义映射 $\mathrm{ad}(g):G\to G$ 如下:

$$(\mathrm{ad}(g))(h)=ghg^{-1},\quad \forall\, h\in G, \tag{4.1}$$

即

$$\mathrm{ad}(g)=L_g\circ R_{g-1}=R_{g-1}\circ L_g. \tag{4.2}$$

由此可见,$\mathrm{ad}(g)$ 是李群 G 到它自身的光滑同胚,并且把单位元素 e 映到单位元素 e. 另外,对于任意的 $h_1,h_2\in G$ 有

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(g)(h_1\cdot h_2)&=(g\cdot h_1\cdot g^{-1})\cdot(g\cdot h_2\cdot g^{-1})\\&=\mathrm{ad}(g)(h_1)\cdot\mathrm{ad}(g)(h_2),\\ \mathrm{ad}(g)(h^{-1})&=(g\cdot h\cdot g^{-1})^{-1}\\&=(\mathrm{ad}(g)(h))^{-1},\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{ad}(g):G\to G$ 是李群 G 的一个自同构,称为李群 G 的一个**内自同构**.

将李群 G 的全体自同构的集合记为 $\mathrm{Aut}(G)$,它关于自同构的合成构成一个群,其单位元素是恒同映射,称为李群 G 的**自同构群**.

李群 G 的全体内自同构的集合 $\mathrm{ad}(G)$ 也构成一个群,它是自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 的子群. 实际上,对于 $g,h\in G$,我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{ad}(g)\circ\mathrm{ad}(h)\\&=L_g\circ R_{g^{-1}}\circ L_h\circ R_{h^{-1}}\\&=L_g\circ L_h\circ R_{g^{-1}}\circ R_{h^{-1}}\\&=L_{(gh)}\circ R_{(gh)^{-1}}\\&=\mathrm{ad}(g\cdot h),\end{aligned} \tag{4.3}$$

所以 $\mathrm{ad}(g)\circ\mathrm{ad}(h)$ 仍是 G 的一个自同构,即映射的合成在 $\mathrm{ad}(G)$ 中是封闭的. 另外,对于 $g\in G$ 有

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}(g))^{-1}&=(R_{g^{-1}})^{-1}\circ(L_g)^{-1}\\&=R_g\circ L_{g^{-1}}=\mathrm{ad}(g^{-1}),\end{aligned} \tag{4.4}$$

因此 $\mathrm{ad}(G)$ 是一个群,称为李群 G 的**内自同构群**,是 $\mathrm{Aut}(G)$ 的子群. (4.3) 式还表明映射 $\mathrm{ad}:G\to\mathrm{Aut}(G)$ 是群的同态.

我们将李群 G 的李代数 $\mathscr{G}$ 和 T_eG 等同起来. 根据定理 3.1，自同构 $\mathrm{ad}(g): G \to G$ 诱导出李代数的自同构 $\mathrm{Ad}(g) = (\mathrm{ad}(g))_{*e}: \mathscr{G} \to \mathscr{G}$. 因为 $\mathrm{Ad}(g)$ 是 $\mathscr{G}$ 作为向量空间的线性自同构，所以 $\mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{GL}(\mathscr{G})$.

定理 4.1　设 G 是李群，$\mathscr{G}$ 是它的李代数，则映射 $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{GL}(\mathscr{G})$ 是李群的同态.

证明　首先容易验证 $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{GL}(\mathscr{G})$ 是群的同态. 实际上，对于任意的 $g, h \in G$ 有

$$\mathrm{ad}(g \cdot h) = \mathrm{ad}(g) \circ \mathrm{ad}(h),$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(g \cdot h) &= (\mathrm{ad}(g \cdot h))_{*e} \\ &= (\mathrm{ad}(g))_{*e} \circ (\mathrm{ad}(h))_{*e} \\ &= \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{Ad}(h).\end{aligned} \tag{4.5}$$

其次，要证映射 $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{GL}(\mathscr{G})$ 是光滑的，即证明：对于 $\mathscr{G}$ 中取定的一个基底 $\{\delta_i\}$，线性变换 $\mathrm{Ad}(g)$ 关于基底 $\{\delta_i\}$ 的矩阵是由元素 g 的光滑函数组成的.

任取 $X \in T_eG$，用 $\widetilde{X}$ 表示由 X 经过左移动产生的左不变向量场，因此对于任意的 $g \in G$ 有

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}(g))(X) &= (\mathrm{ad}(g))_{*e}(X) \\ &= (R_{g^{-1}})_{*g} \circ (L_g)_{*e}(X) \\ &= (R_{g^{-1}})_{*g}(\widetilde{X}(g)).\end{aligned}$$

注意到 $(R_g)_{*e}: T_eG \to T_gG$ 是线性同构，它的逆映射是

$$(R_{g^{-1}})_{*g} = (R_g)_{*e}^{-1}: T_gG \to T_eG,$$

所以

$$(\mathrm{Ad}(g))(X) = ((R_g)_{*e})^{-1}(\widetilde{X}(g)). \tag{4.6}$$

用 $\varphi: G \times G \to G$ 表示李群 G 的乘法运算，$\varphi(g,h) = g \cdot h, \forall\, g, h \in G$. 假定 $(U; x^i)$ 是李群 G 在单位元素 e 处的局部坐标系，$(W; y^i)$ 是李群 G 在 g 处的局部坐标系. 由于群运算 φ 的连续性，当 U 充分小时，存在 g 的邻域 W_1，使得 $\varphi(U \times W_1) \subset W$，并且 $\varphi(W_1 \times U) \subset W$.

在 §1 我们已经得到

$$(L_g)_{*e}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_e\right) = \sum_j \left.\frac{\partial \varphi^j(g,x)}{\partial x^i}\right|_{x=e} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_g, \tag{4.7}$$

同理可得

$$(R_g)_{*e}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_e\right) = \sum_j \left.\frac{\partial \varphi^j(x,g)}{\partial x^i}\right|_{x=e} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_g. \tag{4.8}$$

由此得到

$$((R_g)_{*e})^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_g\right)=\sum_i \Psi_j^i(g)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_e, \tag{4.9}$$

其中$(\Psi_j^i(g))$是矩阵

$$\left(\frac{\partial\varphi^j(x,g)}{\partial x^i}\bigg|_{x=e}\right)$$

的逆矩阵. 所以,由公式(4.6)得到

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Ad}(g))\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_e\right)\\
&=((R_g)_{*e})^{-1}\circ(L_g)_{*e}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_e\right)\\
&=((R_g)_{*e})^{-1}\left(\sum_j\frac{\partial\varphi^j(g,x)}{\partial x^i}\bigg|_{x=e}\cdot\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_g\right)\\
&=\sum_{j,k}\frac{\partial\varphi^j(g,x)}{\partial x^i}\bigg|_{x=e}\cdot\Psi_j^k(g)\cdot\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_e,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

这说明线性变换$\mathrm{Ad}(g):T_eG\to T_eG$关于自然基底$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_e\right\}$的矩阵是由下列元素组成的:

$$\sum_{k=1}^r\frac{\partial\varphi^k(g,x)}{\partial x^i}\bigg|_{x=e}\cdot\Psi_k^j(g),\quad 1\leqslant i,j\leqslant r=\dim G,$$

它们都是g的光滑函数. 因此$\mathrm{Ad}:G\to\mathrm{GL}(\mathscr{G})$是光滑映射,即Ad是李群$G$到$\mathrm{GL}(\mathscr{G})$的同态.

定义 4.3 设G是r维李群,$\mathscr{G}$是G的李代数,李群的同态$\mathrm{Ad}:G\to\mathrm{GL}(\mathscr{G})$称为李群$G$的**伴随表示**.

根据定理3.1,李群的同态$\mathrm{Ad}:G\to\mathrm{GL}(\mathscr{G})$诱导出它们的李代数之间的同态,记为$\mathrm{ad}:\mathscr{G}\to\mathrm{gl}(\mathscr{G})$,称为李代数$\mathscr{G}$的**伴随表示**. 需要提醒的是,我们在本书将同一个记号ad用于两种情形:一是李群的同态$\mathrm{ad}:G\to\mathrm{Aut}(G)$(参看(4.3),(4.4)式);一是李代数的同态$\mathrm{ad}:\mathscr{G}\to\mathrm{gl}(\mathscr{G})$. 由于ad所作用的空间不同,因此不会引起混淆.

定理 4.2 设G是r维李群,$\mathscr{G}$是它的李代数,则对于任意的$X,Y\in T_eG=\mathscr{G}$有

$$(\mathrm{ad}(X))(Y)=[X,Y]. \tag{4.11}$$

证明 设$X\in\mathscr{G}$. 根据定理3.6,切向量X决定了李群G的一个单参数子群,记为$\sigma(t)=\exp(t\cdot X)$;对应的左不变向量场$\tilde{X}$决定了李群G上的单参数变换群φ_t,它恰好是$\sigma(t)$给出的右移动,$\varphi_t=R_{\sigma(t)}$. 因此

$$X=\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0},$$

$$\mathrm{ad}(X)=(\mathrm{Ad})_{*e}X$$

$$=\frac{\mathrm{d}(\mathrm{Ad}(\sigma(t)))}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}.$$

又设 $Y\in\mathscr{G}$,对应的左不变向量场记为 $\widetilde{Y}$,则有

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}(X))(Y)&=\lim_{t\to0}\frac{(\mathrm{Ad}(\sigma(t)))(Y)-Y}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{(R_{\sigma^{-1}(t)})_*\circ(L_{\sigma(t)})_*(Y)-Y}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{(\varphi_t^{-1})_*(\widetilde{Y}(\varphi_t(e)))-\widetilde{Y}(e)}{t}\\&=[\widetilde{X},\widetilde{Y}](e)=[X,Y],\end{aligned}$$

在上面的推导中用到了第三章的定理 3.5.

定理 4.3　设 G 是李群,$\mathscr{G}$ 是它的李代数,则对任意的 $X\in T_eG=\mathscr{G}$ 有

$$\mathrm{Ad}(\exp(X))=\exp(\mathrm{ad}(X)).\tag{4.12}$$

证明　设 $X\in T_eG=\mathscr{G}$,则

$$\sigma(t)=\exp(t\cdot X)$$

是 G 中的一个单参数子群. 由于 $\mathrm{Ad}:G\to\mathrm{GL}(\mathscr{G})$ 是李群的同态,因此 $\mathrm{Ad}(\sigma(t))$ 是 $\mathrm{GL}(\mathscr{G})$ 中的一个单参数子群,它在 $t=0$ 处的切向量是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{Ad}(\sigma(t)))}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}&=(\mathrm{Ad})_{*e}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\right)\\&=(\mathrm{Ad})_{*e}(X)=\mathrm{ad}(X),\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{Ad}(\exp(t\cdot X))=\exp(t\cdot\mathrm{ad}(X)).$$

让 $t=1$,即得(4.12)式. 证毕.

§5　李氏变换群

李群的重要应用常常是以变换群的面貌出现的. 李群的概念起源于 S. Lie 的连续群论,当时所指的群就是变换群. 在物理学和几何学中,空间或对象的对称性就表明它们容许有一定的群的作用. 在本节,我们的主要目的是介绍李氏变换群的概念,齐性空间的概念和例子. 这些概念在几何学和物理学中有广泛的应用.

定义 5.1　设 M 是一个 m 维光滑流形,G 是 r 维李群. 如果 $\theta:M\times G\to M$ 是光滑映射,记为

$$\theta(x,g)=x\cdot g,\quad\forall\,(x,g)\in M\times G,$$

使得

(1) 对任意的 $x\in M$ 有

$$x\cdot e=x;$$

(2) 对任意的 $x \in M$,及 $g,h \in G$ 有

$$(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh),$$

则称 G 是**右作用在 M 上的李氏变换群**.

任意固定 $g \in G$,记

$$R_g(x) = x \cdot g = \theta(x,g), \tag{5.1}$$

则 $R_g : M \to M$ 是光滑映射,而且由条件(1)、(2) 得

$$R_e = \mathrm{id},$$

$$R_{g \cdot h} = R_h \circ R_g. \tag{5.2}$$

特别地,令 $h = g^{-1}$,则有

$$R_{g^{-1}} \circ R_g = R_e = \mathrm{id},$$

因此

$$(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}} : M \to M. \tag{5.3}$$

这意味着光滑映射 $R_g : M \to M$ 有光滑的逆映射 $R_{g^{-1}} : M \to M$,因此 R_g 是光滑流形 M 到自身的光滑同胚.

如果把光滑流形 M 到它自身的所有光滑同胚的集合记为 $\mathrm{Diff}(M)$,则 $\mathrm{Diff}(M)$ 关于映射的合成显然构成一个群,称为 M 的光滑同胚群(或可微同胚群). 这样,对于右作用在 M 上的李氏变换群 $\theta : M \times G \to M$ 而言,$\{R_g = \theta(\cdot, g), \forall\, g \in G\}$ 是 $\mathrm{Diff}(M)$ 的一个子群. (5.2) 式表明,对应 $g \to R_{g^{-1}}$ 给出了从群 G 到 $\mathrm{Diff}(M)$ 的一个同态.

同理,我们可以定义李群 G 在光滑流形 M 上的左作用:

定义 5.2 设 M 是一个 m 维光滑流形,G 是 r 维李群. 如果 $\sigma : G \times M \to M$ 是光滑映射,记为

$$\sigma(g,x) = g \cdot x, \quad \forall\ (g,x) \in M \times G,$$

使得

(1) 对任意的 $x \in M$ 有

$$e \cdot x = x;$$

(2) 对任意的 $x \in M$,及 $g,h \in G$ 有

$$g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x,$$

则称 G 是**左作用在 M 上的李氏变换群**.

对固定的 $g \in G$,令

$$L_g(x) = \sigma(g,x),$$

则与右作用一样,$L_g : M \to M$ 是光滑同胚,故 $L_g \in \mathrm{Diff}(M)$,并且 $g \to L_g$ 也是从群 G 到 $\mathrm{Diff}(M)$ 的同态.

李群 G 在 M 上的左作用和右作用是可以互相转换的. 实际上,若有李群 G 在 M 上的右作用 $\theta : M \times G \to M$,定义映射 $\sigma : G \times M \to M$ 如下:

$$\sigma(g,x) = \theta(x,g^{-1}), \quad \forall\ (g,x) \in G \times M,$$

则 σ 是光滑的,并且对任意的 $g,h \in G, x \in M$ 有

$$\begin{aligned} &\sigma(g,\sigma(h,x)) = \theta(\sigma(h,x),g^{-1}) \\ =&\theta(\theta(x,h^{-1}),g^{-1}) = \theta(x,h^{-1}\cdot g^{-1}) \\ =&\theta(x,(g\cdot h)^{-1}) = \sigma(g\cdot h,x), \end{aligned}$$

且

$$\sigma(e,x) = \theta(x,e) = x,$$

所以 $\sigma: G \times M \to M$ 是李群 G 在光滑流形 M 上的左作用.

例 1 单参数可微变换群.

对照第三章的定义 3.2,作用在光滑流形 M 上的单参数可微变换群是一维李群 $\mathbf{R}$ 在 M 上的左作用,同时它又可看作 $\mathbf{R}$ 在 M 上的右作用.

例 2 李群 G 作为 G 上的李氏变换群.

设 $\varphi: G\times G\to G$ 是李群的乘法运算,则它既可看作李群 G 在它自身的右作用,也可看作李群 G 在它自身的左作用,即

$$R_g = \varphi(\cdot,g), \quad L_g = \varphi(g,\cdot), \quad \forall\ g \in G.$$

无论按哪一种看法,G 都是作用在 G 上的李氏变换群.

例 3 $\mathrm{GL}(n)$ 是左作用在 n 维向量空间 V 上的李氏变换群.

在 V 中取定一个基底 $\{\delta_i\}$,则 V 中任意一个元素可以表示成 $x = \sum_{i=1}^{n} x^i\delta_i$. 将 x 等同于一个坐标列向量,即 $x = (x^1,\cdots,x^n)^t$.

令 $G = \mathrm{GL}(n)$,定义映射 $\sigma: G \times V \to V$ 如下:

$$\sigma(A,x) = A\cdot x = \begin{pmatrix} a_1{}^1 & \cdots & a_n{}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1{}^n & \cdots & a_n{}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

这是一个光滑映射,并且

$$\begin{aligned} &\sigma(I,x) = x, \\ &\sigma(A,\sigma(B,x)) = (A\cdot B)\cdot x = \sigma(A\cdot B,x), \end{aligned}$$

所以 $G = \mathrm{GL}(n)$ 是左作用在 V 上的李氏变换群.

例 4 设 $\mathscr{B}$ 是 n 维向量空间 V 的所有基底构成的集合. $\mathrm{GL}(n)$ 是右作用在 $\mathscr{B}$ 上的李氏变换群.

如所周知,在 V 中取定一个基底之后,V 中每一个基底对应于一个 $n\times n$ 非退化矩阵,所以 $\mathscr{B}$ 可以等同于 $\mathrm{GL}(n)$,因此 $\mathscr{B}$ 是一个 n^2 维光滑流形. 将 $\mathscr{B}$ 中的元素记成由 n 个线性无关的向量构成的行,如

$$\delta = (\delta_1,\cdots,\delta_n). \tag{5.5}$$

定义映射 $\theta: \mathscr{B} \times G \to \mathscr{B}$,其中 $G = \mathrm{GL}(n)$,使得

$$\theta(\delta,A)=(\delta_1,\cdots,\delta_n)\cdot A. \tag{5.6}$$

这样，对于任意的 $\delta\in\mathscr{B}$，$A,B\in G$ 有

$$\theta(\delta,I)=\delta,$$

$$\theta(\theta(\delta,A),B)=\theta(\delta,A\cdot B),$$

所以 $\mathrm{GL}(n)$ 是右作用在 $\mathscr{B}$ 上的李氏变换群.

定义 5.3 设 G 是右作用在光滑流形 M 上的李氏变换群. 若对 G 中任意一个非单位元素 g，都有 M 中一点 x，使得 $x\cdot g\neq x$，则称 G 在 M 上的作用是**有效的**.

换言之，若 G 在 M 上的作用是有效的，则对任意的 $g\neq e$，$R_g: M\to M$ 不是恒同映射.

定义 5.4 设 G 是右作用在光滑流形 M 上的李氏变换群. 若对 G 中任意一个非单位元素 g，光滑同胚 $R_g: M\to M$ 都没有不动点，即对任意的 $x\in M$，都有 $R_g(x)=x\cdot g\neq x$，则称 G 在 M 上的作用是**自由的**（或称 G 在 M 上的作用**没有不动点**）.

李群 G 在光滑流形 M 上的自由作用必定是有效的. 对于左作用在 M 上的李氏变换群，同样有有效作用和自由作用的概念.

设 G 是右作用在光滑流形 M 上的李氏变换群. 取 $X\in T_eG$，用 $\sigma(t)=\exp(t\cdot X)$ 记由 X 在 G 中产生的单参数子群，于是 $R_{\sigma(t)}: M\to M$ 给出作用在 M 上的单参数可微变换群，用 $\widetilde{X}$ 表示它所诱导的切向量场，$\widetilde{X}\in\mathscr{X}(M)$. 根据第二章的(2.1)式，对于任意的 $f\in C^\infty(M)$ 有

$$(\widetilde{X}(f))(p)=\left.\frac{\mathrm{d}f(R_{\sigma(t)}(p))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(p\cdot\sigma(t))-f(p)}{t}.$$

因此，简记成

$$\widetilde{X}(p)=\lim_{t\to 0}\frac{R_{\sigma(t)}(p)-p}{t}. \tag{5.7}$$

定义 5.5 设 G 是李群，$\theta: M\times G\to M$ 是右作用在 M 上的李氏变换群，则对于任意的 $X\in T_eG$，由作用在 M 上的单参数可微变换群 $R_{\exp(t\cdot X)}$ 诱导的切向量场 $\widetilde{X}\in\mathscr{X}(M)$ 称为切向量 $X\in T_eG$ 在光滑流形 M 上决定的**基本向量场**（在历史上，也称 $\widetilde{X}$ 为由 $X\in T_eG$ 在 M 上决定的无穷小(右)变换).

如果把李群 G 看作右作用在它自身的李氏变换群，则由 $X\in T_eG$ 在 G 上决定的基本向量场恰好就是 X 在李群 G 上生成的左不变向量场. 实际上，对于任意的 $g\in G$，有

$$L_g\circ R_{\exp(t\cdot X)}=R_{\exp(t\cdot X)}\circ L_g,$$

故由第三章推论 3.4,单参数可微变换群 $R_{\exp(t\cdot X)}$ 所诱导的切向量场 $\widetilde{X}$ 是 L_g 不变的,即 $\widetilde{X}$ 是左不变向量场.

定理 5.1　设 G 是右作用在光滑流形 M 上的李氏变换群,则 M 上全体基本向量场构成一个李代数,它是李群 G 的李代数 $\mathscr{G}=T_eG$ 的同态象. 若李群 G 在 M 上的作用是有效的,则 M 上基本向量场的李代数同构于李群 G 的李代数 $\mathscr{G}$.

证明　我们已经知道,光滑流形 M 上光滑切向量场的集合 $\mathscr{X}(M)$ 关于 Poisson 括号积成为一个李代数(第三章定理 2.3). 现要证明:由(5.7) 式给出的映射

$$\alpha: T_eG \to \mathscr{X}(M), \alpha(X)=\widetilde{X}, \quad \forall X \in T_eG,$$

是李代数的同态.

从定义式(5.7) 来看,映射 α 的线性性质不是一目了然的. 为此,先给出映射 α 的另一种表示. 固定 $p \in M$,定义映射 $\gamma_p: G \to M$ 为

$$\gamma_p(g)=\theta(p,g)=R_g(p), \quad \forall g \in G. \tag{5.8}$$

我们断言:在任意一点 $p \in M$ 有

$$(\gamma_p)_{*e}X=\widetilde{X}(p)=(\alpha(X))(p), \quad \forall X \in T_eG. \tag{5.9}$$

若该断言为真,则对于任意的 $X,Y \in T_eG$ 有

$$\begin{aligned}(\alpha(X+Y))(p) &= (\gamma_p)_{*e}(X+Y)\\ &=(\gamma_p)_{*e}(X)+(\gamma_p)_{*e}(Y)\\ &=(\alpha(X))(p)+(\alpha(Y))(p)\\ &=(\alpha(X)+\alpha(Y))(p), \quad \forall p \in M,\end{aligned}$$

即

$$\alpha(X+Y)=\alpha(X)+\alpha(Y).$$

同理,对任意的 $\lambda \in \mathbf{R}$ 有

$$\alpha(\lambda \cdot X)=\lambda \cdot \alpha(X).$$

因此 $\alpha: T_eG \to \mathscr{X}(M)$ 是线性的.

上述断言的证明只不过是直接的计算. 任取 $f \in C_p^\infty$,则从(5.7) 式得到

$$\begin{aligned}((\gamma_p)_{*e}X)(f) &= X(f\circ\gamma_p)\\ &=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(f\circ\gamma_p(\exp(t\cdot X)))\\ &=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(f\circ R_{\exp(t\cdot X)}(p))\\ &=(\widetilde{X}(p))f,\end{aligned}$$

即

$$(\gamma_p)_{*e}X=\widetilde{X}(p).$$

为了证明映射 $\alpha : T_eG \to \mathscr{X}(M)$ 保持 Poisson 括号积，把 G 的李代数 $\mathscr{G} = T_eG$ 重新看成李群 G 上左不变向量场所组成的空间. 设 X 是李群 G 上的左不变向量场，则

$$X(g) = (L_g)_{*e}(X(e)), \quad \forall g \in G.$$

于是

$$\begin{aligned}(\gamma_p)_{*g}(X(g)) &= (\gamma_p)_{*g} \circ (L_g)_{*e}(X(e)) \\ &= (\gamma_{p\cdot g})_{*e}(X(e)) \\ &= \widetilde{X}(p \cdot g), \quad \forall g \in G. \end{aligned} \tag{5.10}$$

这意味着，李群 G 上的左不变向量场 X 与光滑流形 M 上由 $X(e)$ 决定的基本向量场 $\widetilde{X}$ 是 γ_p- 相关的. 若 Y 是 G 上另一个左不变向量场，则由第三章定理 2.5，$[X,Y]$ 和 $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]$ 也是 γ_p- 相关的，即

$$(\alpha([X(e),Y(e)]))(p) = (\gamma_p)_{*e}([X,Y](e)) = [\widetilde{X},\widetilde{Y}](p), \quad \forall p \in M,$$

所以

$$\alpha([X(e),Y(e)]) = [\alpha(X(e)),\alpha(Y(e))],$$

即 $\alpha : T_eG \to \mathscr{X}(M)$ 是李代数的同态. 由定义，M 上的基本向量场的集合是 T_eG 在这个同态下的象，因而它是一个李代数.

现设 $X \in T_eG$，且它在 M 上决定的基本向量场为 $\widetilde{X}$. 假定 $\widetilde{X} = 0$，即在 M 上对应的单参数可微变换群 $R_{\exp(t\cdot X)}$ 是平凡的，即对于任意的 $p \in M$ 有

$$p \cdot \exp(t \cdot X) = p.$$

由于 G 在 M 上的作用是有效的，所以

$$\exp(t \cdot X) = e, \quad X = 0.$$

由此得到映射 $\alpha : T_eG \to \mathscr{X}(M)$ 是单一的，即 M 上基本向量场的李代数与李群 G 的李代数同构.

定理 5.2 设 G 是右作用在光滑流形 M 上的李氏变换群. 如果李群 G 在 M 上的作用是自由的，则任意一个非零切向量 $X \in TeG$ 在 M 上所诱导的基本向量场 $\widetilde{X}$ 处处不为零，因而在 M 上存在 $r(=\dim G)$ 个处处线性无关的基本向量场，而其它的基本向量场只是它们的常系数线性组合.

证明 设 $0 \neq X \in T_eG$，$\widetilde{X}$ 是由 X 在 M 上诱导的基本向量场，即在任意一点 $p \in M$，

$$\widetilde{X}(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}(p \cdot \exp(tX)).$$

若有点 $q \in M$，使得 $\widetilde{X}(q) = 0$，即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(q \cdot \exp(tX)) = 0$. 记 $l(t) = q \cdot \exp(tX)$，于是

$$l(t+s) = q \cdot \exp((t+s)X)$$

$$= q \cdot \exp(tX) \cdot \exp(sX)$$
$$= R_{\exp(sX)}(l(t)),$$

因此

$$l'(s) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} l(t+s) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (R_{\exp(sX)}(l(t)))$$
$$= (R_{\exp(sX)})_{*l(0)}(l'(0)) = 0, \forall\, s \in \mathbf{R}.$$

上面的最后一个等号是因为 $l'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(q \cdot \exp(tX)) = 0$. 由此可见,$l(s)$ 是常值映射,即

$$l(s) = q \cdot \exp(sX) = l(0) = q;$$

因为 G 在 M 上的作用没有不动点,故 $\exp(sX) = e$,即 $X = 0$,这与假设 $X \neq 0$ 相矛盾.

在 T_eG 中取定一个基底 $\{\delta_i\}$,用 $\tilde{X}_i$ 表示由 δ_i 在 M 上诱导的基本向量场,则 $\tilde{X}_i, 1 \leqslant i \leqslant r$ 必定是处处线性无关的. 证毕.

顺便提一下,如果 G 是左作用在光滑流形 M 上的李氏变换群,则同样可定义 M 上的基本向量场,此时 M 上的基本向量场的集合也成为一个李代数,它是 G 上的右不变向量场构成的李代数的同态象.

命题 5.3　设 G 是左作用在光滑流形 M 上的李氏变换群,令

$$H = \{g \in G : g \cdot x = x, \forall\, x \in M\}, \tag{5.11}$$

则 H 是 G 的闭正规子群.

证明　显然 H 是 G 的子群. 任取 $h \in G, g \in H$,则对任意的 $x \in M$ 有

$$(h \cdot g \cdot h^{-1})x = (h \cdot g) \cdot (h^{-1}x)$$
$$= h \cdot (h^{-1}x)$$
$$= x,$$

所以 $h \cdot g \cdot h^{-1} \in H$,即 H 是 G 的正规子群.

很明显,H 是 G 的闭子集. 实际上,若 $g \in G \backslash H$,则存在点 $x \in M$,使得 $g \cdot x \neq x$. 由于 M 是 Hausdorff 空间,且 G 在 M 上的作用是光滑的,故有 g 在 G 中的开邻域 U 以及 x 在 M 中的开邻域 V,使得

$$(U \cdot V) \cap V = \varnothing,$$

其中 $U \cdot V = \{h \cdot y : h \in U, y \in V\}$. 这意味着,对于任意的 $h \in U$,及 $y \in V \subset M$,有 $h \cdot y \neq y$,故 $h \in G \backslash H$. 因此 $U \subset G \backslash H$,故 $G \backslash H$ 是开子集,H 是 G 的闭子集.

将命题 5.3 和 §3 的定理 3.12 结合起来可知 H 是 G 的闭李子群,并且 G/H 是一个李群,称为李群 G 关于闭正规子群 H 的商群.

用商群 G/H 代替李群 G,总是可以把非有效作用的李氏变换群化为有效

作用的李氏变换群.我们有下面的命题:

命题 5.4 设G是左作用在光滑流形M上的李氏变换群.若G在M上的作用不是有效的,即(5.11)式所定义的$H \neq \{e\}$,则有商李群G/H在光滑流形M上的左作用,使得该作用是有效的.

证明 前面已知G/H是李群.对于$g \in G$用$[g]$记左陪集$g \cdot H$,于是有映射$\tilde{\sigma}: G/H \times M \to M$,使得

$$\tilde{\sigma}([g],x) = \sigma(g,x) = g \cdot x. \tag{5.12}$$

很明显,此定义是有意义的,即右端与$[g]$的代表g的取法无关.我们断言这是C^∞映射.实际上,由§3定理3.12的(2),对每一点$[g] \in G/H$,存在$[g]$的开邻域$W \subset G/H$及光滑映射$\tau: W \to G$,使得$\pi \circ \tau = \mathrm{id}: W \to W$.这样,$\tilde{\sigma}|_{W\times M}$能够表示为

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(\tilde{h},x) &= \sigma(\tau(\tilde{h}),x) \\ &= \tau(\tilde{h}) \cdot x, \quad \forall\ (\tilde{h},x) \in W \times M,\end{aligned}$$

所以$\tilde{\sigma}$是光滑的.

显然,$\tilde{\sigma}([e],x) = x, \forall\ x \in M$.对于任意的$g,h \in G, x \in M$有

$$\begin{aligned}&\tilde{\sigma}([g],\tilde{\sigma}([h],x)) = \tilde{\sigma}([g],h \cdot x) \\ &= g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x \\ &= \tilde{\sigma}([g \cdot h],x) = \tilde{\sigma}([g] \cdot [h],x).\end{aligned}$$

所以$\tilde{\sigma}: G/H \times M \to M$是左作用在$M$上的李氏变换群.$G/H$在$M$上的作用显然是有效的.实际上,若设$[g] \in G/H$,使得对任意的$x \in M$有

$$\tilde{\sigma}([g],x) = x,$$

即

$$g \cdot x = x,$$

故$g \in H$,即$[g] = [e]$.

定义 5.6 设G是左作用在光滑流形M上的李氏变换群,若对于任意两点$x,y \in M$,必有一个元素$g \in G$使得$y = g \cdot x$,则称G在M上的作用是**可迁的**.

定义 5.7 设M是一个m维光滑流形.若有一个李群G,使得G是可迁地左作用在M上的李氏变换群,则称M是一个**齐性空间**.

定理 5.5 设M是一个m维齐性空间,G是可迁地左作用在M上的李氏变换群.取定一点$x \in M$,令

$$H = \{g \in G : g \cdot x = x\}, \tag{5.13}$$

则H是G的闭子群,并且M与光滑流形G/H是光滑同胚的.

上面的闭子群H称为变换群G关于基点$x \in M$的**迷向群**.

证明 显然H是G的子群.用命题5.3的证明中同样的论证可知H是

G 的闭子集. 根据 § 3 的定理 3.12,G/H 是光滑流形.

定义映射 $\psi: G/H \to M$,使得

$$\psi([g]) = g \cdot x, \tag{5.14}$$

其中$[g]$表示 H 的左陪集 $gH, g \in G$. 映射 ψ 的定义是合理的. 实际上,若 $g' \in g \cdot H$,则有$h \in H$, 使得

$$g' = g \cdot h,$$

因此

$$g' \cdot x = (g \cdot h) \cdot x = g \cdot x.$$

因为 G 在 M 上的作用是可迁的,故对任意的 $y \in M$,有 $g \in G$ 使得

$$y = g \cdot x = \psi([g]).$$

因此映射 ψ 是满的. 若有$[g],[h] \in G/H$ 使得

$$\psi([g]) = \psi([h]),$$

即

$$g \cdot x = h \cdot x,$$

故

$$(h^{-1}g) \cdot x = x.$$

所以 $h^{-1}g \in H, [h] = [g]$. 这表明映射 ψ 是单一的. 映射 ψ 还是光滑的;因为由 § 3 的定理3.12, 对每一点$[g] \in G/H$,存在$[g]$的开邻域 W 及光滑映射 $\tau: W \to G$,使得 $\pi \circ \tau = \mathrm{id}: W \to W$,因此对于 $\tilde{h} \in W$ 有

$$\psi(\tilde{h}) = \tau(\tilde{h}) \cdot x,$$

故 ψ 是 C^∞ 的.

至此,我们已有光滑的单一满映射 $\psi: G/H \to M$. 下面要证 ψ 是处处非退化的. 首先在$[e]$处考虑. 假定有 $X \in T_eG$,使得

$$\psi_{*[e]}(\pi_{*e}(X)) = 0,$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\exp(tX) \cdot x)\\ =&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\psi(\pi(\exp(tX)))) = 0.\end{aligned}$$

上面的式子对于任何 $t \in \mathbf{R}$ 都是成立的. 实际上

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(tX) \cdot x)\\ =&\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}(\exp((t+s)X) \cdot x)\\ =&(L_{\exp(tX)})_{*x}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}(\exp(s \cdot X) \cdot x)\right)\end{aligned}$$

$$=0.$$

由此得到

$$\exp(t\cdot X)\cdot x = x,\quad \forall\, t\in \mathbf{R},$$

故 $\exp(t\cdot x)\in H, X\in T_eH, \pi_{*e}(X)=0$. 因此切映射 $\psi_{*[e]}: T_{[e]}(G/H)\to T_xM$ 是非退化的.

对于任意的 $g\in G$,我们有

$$\psi\circ\pi\circ L_g = L_g\circ\psi\circ\pi: G\to M.$$

其中左端的 $L_g: G\to G$ 是李群 G 上的左移动,右端的 $L_g: M\to M$ 是 $g\in G$ 在光滑流形 M 上的左作用. 若设 X 是 G 上的左不变向量场,使得

$$\psi_{*[g]}\circ\pi_{*g}(X(g)) = 0,$$

则

$$\begin{aligned} 0 &= \psi_{*[g]}\circ\pi_{*g}\circ(L_g)_{*e}(X(e)) \\ &= (L_g)_{*x}\circ\psi_{*[e]}\circ\pi_{*e}(X(e)). \end{aligned}$$

因为 $(L_g)_{*x}: T_{g\cdot x}M\to T_xM$ 是线性同构,故有

$$\psi_{*[e]}\circ\pi_{*e}(X(e)) = 0,\quad X(e)\in T_eH,$$

所以

$$\begin{aligned} \pi_{*g}(X(g)) &= \pi_{*g}\circ(L_g)_{*e}(X(e)) \\ &= (L_g)_{*e}\circ\pi_{*e}(X(e)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

第二个等号后面的 $L_g: G/H\to G/H$ 是 $L_g([h]) = [g\cdot h]$. 因此 $\psi_{*[g]}: T_{[g]}(G/H)\to T_{g\cdot x}M$ 是非退化的.

根据反函数定理,$\psi: G/H\to M$ 的逆映射也是光滑的,故 ψ 是光滑同胚.

齐性空间是一类十分重要的光滑流形,许多常见的空间都是齐性空间. 另外,因为在齐性空间上容有一个可迁变换群的作用,故它们在各点的性质是相同的. 下面我们举几个常见的齐性空间的例子.

例 5 n 维仿射空间 A^n.

A^n 的伴随向量空间 V^n 关于加法成为一个 n 维李群 $G=V^n$. G 在 A^n 上的作用

$$\sigma: V^n\times A^n\to A^n$$

定义为:对于任意的 $v\in V^n, P\in A^n, \sigma(v,P)=Q$ 是 A^n 中唯一的一点,使得

$$\overrightarrow{PQ} = v$$

(参看第一章定义 1.1). 这确实使 V^n 成为作用在 A^n 上的李氏变换群,v 在 A^n 上的作用就是沿向量 v 的平行移动. 因为

$$\sigma(0,P) = P,\quad \forall\, P\in A^n;$$

又对于任意的 $v_1,v_2 \in V^n, Q_1,Q_2 \in A^n$ 使得

$$\overrightarrow{PQ_1} = v_1, \quad \overrightarrow{Q_1Q_2} = v_2,$$

则

$$\sigma(v_2,\sigma(v_1,P)) = \sigma(v_2,Q_1) = Q_2,$$

但是

$$v_1 + v_2 = \overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{PQ_2},$$

故

$$\sigma(v_1 + v_2,P) = Q_2,$$

所以

$$\sigma(v_2,\sigma(v_1,P)) = \sigma(v_2 + v_1,P).$$

V^n 在 A^n 上的作用显然是可迁的. 任取 $P,Q \in A^n$,则$\overrightarrow{PQ} = v \in V^n$,因而

$$\sigma(v,P) = Q.$$

至于映射 σ 的光滑性,只要将它在 A^n 的仿射坐标系下表示出来之后是明显的. 任意固定一点 $x \in A^n$,则以 x 为基点的迷向群为 $\{0\}$,故 A^n 与 V^n 是光滑同胚的.

A^n 还容许一个更大的可迁变换群的作用. 在 A^n 中取定一个标架 $\{0;\delta_i\}$,于是每一点 $x \in A^n$ 唯一地对应于一组有序实数 $(x^1,\cdots,x^n)^t$,使得

$$\overrightarrow{Ox} = \sum_{i=1}^{n} x^i \delta_i.$$

取 $G = \mathbf{R}^n \times \mathrm{GL}(n)$,其元素记为 (b,B),其中

$$b = (b^1,\cdots,b^n)^t \in \mathbf{R}^n,$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \cdots & b_n^n \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n).$$

(b,B) 在 A^n 上的作用定义为

$$\sigma((b,B),x) = b + B \cdot x. \tag{5.15}$$

设 $(d,D) \in G$ 是另一个元素,则

$$\begin{aligned} &\sigma((d,D),\sigma((b,B),x)) \\ &= (d + D \cdot b) + D \cdot B \cdot x \\ &= \sigma((d + D \cdot b, D \cdot B),x). \end{aligned}$$

为使 G 是左作用在 A^n 上的李氏变换群,在 G 中应该定义乘法如下:

$$(d,D) \cdot (b,B) = (d + D \cdot b, D \cdot B). \tag{5.16}$$

此时,单位元素为 $e = (0,I)$,求逆运算为

$$(b,B)^{-1} = (-B^{-1}b, B^{-1}). \tag{5.17}$$

由此可见 G 是一个 $n + n^2$ 维李群. 注意到它不是 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathrm{GL}(n)$ 的直积,而是半

直积,通常记 $G = \mathbf{R}^n \ltimes \mathrm{GL}(n)$. 这个群称为**仿射变换群**.

很明显,$\mathbf{R}^n$ 可以看作 $\mathbf{R}^n \ltimes \mathrm{GL}(n)$ 的子群,故后者在 A^n 上的作用自然也是可迁的.

取原点 O 为基点,则迷向群同构于 $\mathrm{GL}(n)$. 因此,根据定理 5.4,A^n 光滑同胚于 $\mathbf{R}^n \ltimes \mathrm{GL}(n)/\mathrm{GL}(n)$.

进一步可以把群 $\mathbf{R}^n \ltimes \mathrm{GL}(n)$ 表示成 $\mathrm{GL}(n+1)$ 的子群. 实际上,把元素 (b, B) 看作矩阵

$$\begin{pmatrix} B & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

同理,把元素 (d, D) 看作矩阵

$$\begin{pmatrix} D & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} D & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \cdot B & D \cdot b + d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

恰好对应于元素 $(d, D) \cdot (b, B)$. 因此 $\mathbf{R}^n \ltimes \mathrm{GL}(n)$ 同构于 $\mathrm{GL}(n+1)$ 的子群

$$\widetilde{G} = \left\{ \begin{pmatrix} B & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbf{R}^n, B \in \mathrm{GL}(n) \right\}.$$

特别地,A^n 可等同于商空间 $\widetilde{G}/\mathrm{GL}(n)$.

若在 V^n 中给定一个欧氏内积 $\langle , \rangle$,则 $(A^n, \langle , \rangle)$ 成为 n 维欧氏空间 E^n. 取定一个单位正交标架 $\{0; \delta_i\}$,即

$$\langle \delta_i, \delta_j \rangle = \delta_{ij},$$

则取作用在 E^n 上的群为 $\mathbf{R}^n \ltimes \mathrm{O}(n)$ (或 $\mathbf{R}^n \ltimes \mathrm{SO}(n)$),这是作用在 E^n 上的等距变换群. 此时,以原点 O 为基点的迷向群是 $\mathrm{O}(n)$ (或 $\mathrm{SO}(n)$). 欧氏空间 E^n 可以表示为商空间

$$\left\{ \begin{pmatrix} B & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbf{R}^n, B \in \mathrm{O}(n) \right\} \Big/ \mathrm{O}(n).$$

例 6 单位球面 $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

$$S^n = \left\{ (x^1, \cdots, x^{n+1})^t \in \mathbf{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1 \right\}$$

为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的嵌入子流形. 定义

$$\sigma : \mathrm{O}(n+1) \times \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1},$$

使得

$$\sigma(A, x) = A \cdot x, \tag{5.19}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{n+1}{}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1{}^{n+1} & \cdots & a_{n+1}{}^{n+1} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n+1),$$

$$x = (x^1, \cdots, x^{n+1})^t \in \mathbf{R}^{n+1}. \tag{5.20}$$

显然，$\mathrm{O}(n+1)$ 是左作用在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上的李氏变换群.

将映射 σ 限制在 $\mathrm{O}(n+1) \times S^n$ 上仍然得到光滑映射

$$\sigma: \mathrm{O}(n+1) \times S^n \to \mathbf{R}^{n+1}.$$

但是，对于 $A \in \mathrm{O}(n+1), x \in S^n$，我们有

$$\begin{aligned}&(A \cdot x)^t \cdot (A \cdot x) \\ =\ &x^t \cdot A^t \cdot A \cdot x \\ =\ &x^t \cdot x = 1,\end{aligned}$$

所以 $\sigma(\mathrm{O}(n+1) \times S^n) \subset S^n$，因此由第二章习题二的第 24 题得知，$\sigma: \mathrm{O}(n+1) \times S^n \to S^n$ 是 C^∞ 的.

$\mathrm{O}(n+1)$ 在 S^n 上的作用是可迁的. 设 $v_1 \in S^n$，将 v_1 看成单位向量，把它扩充成 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的一个单位正交基底 $\{v_1, \cdots, v_{n+1}\}$. 把它们的分量写出来，便得到一个 $(n+1) \times (n+1)$ 的正交矩阵

$$v = \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_{n+1}{}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1{}^{n+1} & \cdots & v_{n+1}{}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

令 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)^t \in \mathbf{R}^{n+1}$，则

$$\sigma(v, e_1) = v \cdot e_1 = v_1.$$

由此可见 $\mathrm{O}(n+1)$ 在 S^n 上的作用是可迁的.

取 e_1 为基底，$A \in \mathrm{O}(n+1)$，则

$$A \cdot e_1 = (a_1^1, \cdots, a_1^{n+1})^t.$$

所以 $A \cdot e_1 = e_1$ 的充分必要条件是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix},$$

其中 $\tilde{A} \in \mathrm{O}(n)$. 因此 S^n 光滑同胚于 $\mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$.

习　题　六

1.　设 G 是一个拓扑空间，并且 G 是一个群. 如果映射 $(x, y) \to x \cdot y^{-1}$ 是连续的，则称 G 是一个拓扑群. 证明：拓扑群 G 上的左移动、右移动及取逆运算都是从拓扑群 G 到它自身的同胚.

2.　设 G 是拓扑群，取定正整数 n 及单位元素 e 的一个开邻域 U. 证明：存

在 e 的开邻域 V，使得 $V^{-1}=V$，并且 $V^n\subset U$.

3.　设 G 是连通拓扑群，则对于单位元素 e 的任意一个开邻域 U，必能找到 e 的一个开邻域 V，使得 $V\subset U$，并且 $G=\bigcup\limits_{r=1}^{\infty}V^r$.

4.　设 G 是拓扑群. 证明：G 是正则拓扑空间，即对于任意一点 $p\in G$，及闭子集 $F\subset G$，若 $p\notin F$，则存在 G 的开子集 U,V，使得 $p\in U,F\subset V$，并且 $U\cap V=\varnothing$.

5.　设 G 是拓扑群，H 是 G 的一个子群. 证明：H 关于从 G 诱导的拓扑成为一个拓扑群.

6.　取 $G=\mathbf{R}$，它关于加法成为一个群. 在 G 中定义开集基如下：$\{(a,b):a<b\}$. 问：G 是否为一个拓扑群？为什么？

7.　在 $\mathbf{R}$ 中取标准的拓扑结构和光滑结构. 在 $\mathbf{R}$ 中定义运算 $\varphi:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 如下：

$$\varphi(x,y)=(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$$

证明：$\mathbf{R}$ 关于 φ 成为一个拓扑群，但是它不是李群.

8.　设 G 是拓扑群，H 是 G 的一个子群.

(1) 证明：H 的闭包 $\overline{H}$ 也是 G 的子群；

(2) 用 G/H 表示 H 的左陪集构成的空间，具有商拓扑. 证明：自然投影 $\pi:G\to G/H$ 是开映射.

9.　设 G 是拓扑群，H 是 G 的闭子群. 证明：G/H 是 Hausdorff 空间.

10.　设 G 是拓扑群，H 是 G 的开子群. 证明：H 也是 G 的闭子群.

11.　设 G 是局部连通的拓扑群，则它的单位元素所在的连通分支（称为单位元素分支）是 G 的开正规子群.

12.　设 G,H 是拓扑群，$\varphi:G\to H$ 是群同态. 证明：若 φ 在 G 的单位元素 e 处是连续的，则 φ 是连续映射.

（由于李群必是拓扑群，故前面各题中所叙述的关于拓扑群的性质也适用于李群. 尽管在本章没有专门讨论拓扑群，通过以上习题将会对拓扑群有一个初步的认识.）

13.　四元数体 H 可以看作 $\mathbf{R}^4$，其基底记为 $\{1,\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\}$，乘法表为

(1) \ (2)	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-$j
j	j	$-$k	-1	i
k	k	j	$-$i	-1

那么单位球面 S^3 是 H 中模为 1 的元素的集合：

$$S^3 = \{\alpha \in H : \alpha \cdot \bar{\alpha} = 1\}.$$

(1) 证明：S^3 关于标准的光滑结构及四元数乘法，构成一个李群；

(2) 求李群 S^3 上的左不变向量场（用 $\mathbf{R}^4$ 中的笛卡儿直角坐标系来表示）；

(3) 求李群 S^3 的结构常数.

14. 令

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \text{且 } |\alpha|^2 + |\beta|^2 \neq 0 \right\}.$$

(1) 证明 G 是一个 4 维李群；

(2) 求 G 的 Maurer-Cartan 形式；

(3) 求 G 的结构常数.

15. 设 G 是 r 维李群. 证明：G 上全体右不变向量场的集合是一个李代数.

16. 设 G 是李群，$x, y \in T_eG$，用 X, Y 表示由 x, y 经左移动产生的左不变向量场，用 $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ 表示由 x, y 经右移动产生的右不变向量场，证明：

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}](e) = -[X, Y](e).$$

17. 设 G 是 r 维李群，$\{\delta_i\}$ 是 T_eG 的一个基底，用 $\{\widetilde{\omega}^i\}$ 表示李群 G 上对应的右不变微分式.

(1) 证明：存在一组常数 $\widetilde{C}^i_{jk}$，使得

$$\mathrm{d}\widetilde{\omega}^i = -\frac{1}{2}\widetilde{C}^i_{jk}\widetilde{\omega}^j \wedge \widetilde{\omega}^k;$$

(2) 若 $(V; x^i)$ 是李群 G 在单位元素 e 的局部坐标系，使得 $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_e = \delta_i$，记 $\varphi(x, y) = x \cdot y$ 是李群 G 的乘法运算，$\varphi^k(x, y)$ 是 φ 在局部坐标系 $(V; x^i)$ 下的表达式，试用乘法函数 $\varphi^k(x, y)$ 表示 $\widetilde{C}^i_{jk}$.

(3) 将 $\widetilde{C}^i_{jk}$ 与左不变微分式的结构常数 C^i_{jk} 作一比较.

18. 求李群 $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ 的结构常数.

19. 设 $\alpha(t), \beta(t)$ 是李群 G 中两条光滑曲线，$\alpha(0) = \beta(0) = e$，令 $\gamma(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t)$，证明：

$$\gamma'(0) = \alpha'(0) + \beta'(0).$$

20. 设 $\mathscr{G}$ 是一个 2 维非交换李代数. 证明：在 $\mathscr{G}$ 中存在一个基底 $\{x, y\}$，使得

$$[x, x] = [y, y] = 0, \qquad [x, y] = -[y, x] = y.$$

21. 用 $\mathbf{R}^*$ 记非零实数的集合，令 $K = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$，在 K 上定义如下乘法运算：

$$(a,b)(a_1,b_1)=(aa_1,b+ab_1).$$

证明:K 是一个 2 维李群;并求 K 的左不变向量场和结构常数.

如果在 K 上定义乘法 $*$ 如下:

$$(a,b)*(a_1,b_1)=(aa_1,ba_1+b_1),$$

则$(K,*)$也是一个 2 维李群.求它的左不变向量场和结构常数,并与前一种情形进行比较.

22. $\mathbf{C}^*=\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 关于乘法成为一个李群,求该李群的左不变向量场和 Maurer — Cartan 形式.

23. 令

$$G=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}(2),a,b\in\mathbf{R},a\neq 0\right\}.$$

(1) 证明:G 是 $\mathrm{GL}(2)$ 的李子群;

(2) 求 G 的 Maurer — Cartan 形式,及结构方程.

24. 令

$$G=\left\{\begin{pmatrix}A & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}(n+1):A\in\mathrm{GL}(n),a\in\mathbf{R}^n\right\}.$$

(1) 证明:G 是 $\mathrm{GL}(n+1)$ 的李子群;

(2) 求李群 G 的 Maurer — Cartan 形式,和结构方程.

25. 找一个李群的例子,使得它有一个非闭的李子群.

26. 证明:$\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$不在 $\mathrm{GL}(2)$ 的任意一个单参数子群上.试描述集合 $\mathrm{GL}(2)\backslash\exp(\mathrm{gl}(2))$.

27. 证明:指数映射 $\exp:\mathrm{gl}(2;\mathbf{C})\to\mathrm{GL}(2;\mathbf{C})$ 是满映射.

28. 设$(U;x^i)$是 r 维李群 G 在单位元素 e 处的局部坐标系,令 $\delta_i=\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_e$.

(1) 证明:映射

$$x=\theta(a^1,\cdots,a^r)=\exp(a^1\delta_1)\cdots\exp(a^r\delta_r)$$

是从 $T_eG=\mathbf{R}^r$ 在原点的一个邻域到 G 在 e 的一个邻域上的光滑同胚;

(2) 证明:映射

$$\begin{aligned}x&=\sigma(a^1,\cdots,a^r)\\&=\exp(a^1\delta_1+\cdots+a^k\delta_k)\cdot\exp(a^{k+1}\delta_{k+1}+\cdots+a^r\delta_r),\end{aligned}$$

其中 k 是一个固定的整数,$1\leqslant k<r$,是从 $T_eG=\mathbf{R}^r$ 在原点的一个邻域到李群 G 在 e 的一个邻域上的光滑同胚.

T_eG 中的坐标系$(a^1,\cdots,a^r)$分别通过(1)和(2)所给出的光滑同胚作为李

群 G 在单位元素邻域内的局部坐标系，分别称为李群 G 的第二类和第三类标准坐标系.

29.　求下列各李群的左不变微分式：

(1) 正实数乘法群 $\mathbf{R}^+$；

(2) 实数加群 $\mathbf{R}$；

(3) 右作用在直线 $\mathbf{R}$ 上的仿射变换群：用 t 记 $\mathbf{R}$ 上的点，对于任意的(a, b) $\in \mathbf{R}^2$，$a \neq 0$，定义

$$t \cdot (a,b) = at + b,$$

则 (a,b) 在 $\mathbf{R}$ 上的右作用是 $\mathbf{R}$ 上的一个仿射变换. $\mathbf{R}$ 上的仿射变换在变换的合成下成为一个群，称为右作用在 $\mathbf{R}$ 上的仿射变换群. 这是一个 2 维李群(参看第 21 题).

30.　求下列李氏变换群在所作用空间上产生的基本向量场，并决定它们的李代数：

(1) 右作用在直线上的仿射变换群；

(2) 平面 E^2 上绕原点的转动群 $SO(2)$；

(3) 空间 E^3 中绕原点的转动群 $SO(3)$.

31.　设 W，V 是两个向量空间，并且 V 是一个李代数，其李代数乘法记作[,]. 所谓定义在向量空间 W 上、取值在 V 中的 r 次外形式 φ 是指从 W 到 V 的反交换多重线性映射 φ：$\underbrace{W \times \cdots \times W}_{r个} \to V$. 在 V 中取定一个基底 $\{\delta_i\}$，则在 V 中取值的外形式 φ 可以表示为

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i \delta_i,$$

其中 φ^i 是 W 上的外形式.

(1) 若 φ, ψ 是定义在 W 上、取值在 V 中的外形式，在 V 的基底 $\{\delta_i\}$ 下分别表示为

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i \delta_i, \quad \psi = \sum_{j=1}^{n} \psi^j \delta_j,$$

则定义

$$\varphi \wedge \psi = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi^i \wedge \psi^j [\delta_i, \delta_j].$$

证明：上式右端与 V 的基底 $\{\delta_i\}$ 的选取无关.

(2) 设 φ, ψ 分别是定义在 W 上、取值在 V 中的 p, q 次外形式，证明：对于任意的 $x_1, \cdots, x_{p+q} \in W$ 有

$$\varphi \wedge \psi(x_1, \cdots, x_{p+q}) = \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_p \\ i_{p+1} < \cdots < i_{p+q}}} \delta^{i_1 \cdots i_{p+q}}_{1 \cdots p+q} [\varphi(x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}), \psi(x_{i_{p+1}}, \cdots, x_{i_{p+q}})].$$

(3) 设 φ,ψ 如(2) 所设,证明:

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{pq+1} \varphi \wedge \psi.$$

(4) 设 φ,ψ,θ 分别为定义在 W 上、取值在 V 中的 p,q,r 次外形式,证明:

$$(-1)^{pr}(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta + (-1)^{qp}(\psi \wedge \theta) \wedge \varphi + (-1)^{rq}(\theta \wedge \varphi) \wedge \psi = 0.$$

32. 设 G 是 r 维李群,$\{\delta_i\}$ 是 T_eG 中的一个基底,ω^i 是 G 上相应的 Maurer-Cartan 形式,则 $\omega = \omega^i \delta_i$ 是在李群 G 上、取值在 T_eG 上的 1 次微分式.

(1) 证明:$\mathrm{d}\omega = -\dfrac{1}{2}\omega \wedge \omega$.

(2) 若 $\widetilde{\omega}^i$ 是与 $\{\delta_i\}$ 相应的右不变微分式,令 $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}^i \delta_i$,证明:

$$\mathrm{d}\widetilde{\omega} = \frac{1}{2}\widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\omega}.$$

33. 试在 SL(2) 的单位元素邻域内建立第二类标准坐标系,并在此坐标系下算出左不变向量场和 Maurer − Cartan 形式.

34. 设

$$\mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{C}) : \overline{A^t}A = I, \det A = 1\}.$$

(1) 求 SU(2) 的李代数.

(2) 在 SU(2) 的单位元素邻域内建立第二类标准坐标系,并在此坐标系下算出左不变向量场.

35. 考虑 4 维矩阵群

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : z, w \in \mathbf{C}, z \neq 0 \right\},$$

求它的结构常数和 Maurer-Cartan 形式.

第七章　微分纤维丛简介

在第三章 §1,我们已经介绍过光滑流形 M 的切向量构成的集合 TM,它是一个光滑流形,并且在局部上光滑同胚于乘积空间,$\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbf{R}^m$,称为切向量丛. 在直观上,可以把光滑流形 M 想象成欧氏空间中的一张曲面,流形在每一点的切空间相当于曲面在每一点的切平面. 在这种构图下,要研究各点的切空间并在一起的集合是困难的. 为了想象的方便,把流形在每一点的切空间"竖"起来,想象成"植"在该点的一个向量空间(称为在该点的一条纤维),于是切向量的集合 TM 成为"植"在流形 M 上的各条纤维的并集,从而使得该空间变得容易理解了. 本章的目的是简要地介绍以切向量丛为模型而产生的微分纤维丛的概念.

§1　向　量　丛

以切丛为模型,我们提出下面的定义:

定义 1.1　设 E,M 是两个光滑流形,$\pi: E \to M$ 是光滑的满映射. $V = \mathbf{R}^q$ 是 q 维向量空间. 如果存在 M 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 及一组映射 $\{\psi_\alpha\}$,使得下列条件成立:

(1) 每一个映射 ψ_α 是从 $U_\alpha \times \mathbf{R}^q$ 到 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 的光滑同胚,而且对任意的 $p \in U_\alpha, y \in \mathbf{R}^q$ 有

$$\pi \circ \psi_\alpha(p,y) = p;$$

(2) 对于任意固定的 $p \in U_\alpha$,令

$$\psi_{\alpha,p}(y) = \psi_\alpha(p,y), \quad \forall\, y \in \mathbf{R}^q,$$

则映射 $\psi_{\alpha,p}: \mathbf{R}^q \to \pi^{-1}(p)$ 是同胚,并且当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时,对于任意的 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$,映射

$$g_{\beta\alpha}(p) \equiv {\psi_{\beta,p}}^{-1} \circ \psi_{\alpha,p}: \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^q$$

是线性同构,即 $g_{\beta\alpha}(p) \in \mathrm{GL}(q)$;

(3) 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时,映射 $g_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(q)$ 是光滑的,

则称 (E,M,π) 为光滑流形 M 上秩为 q 的**向量丛**,其中 E 称为**丛空间**,M 称为**底空间**,π 称为**丛投影**,$V = \mathbf{R}^q$ 称为**纤维型**.

条件(1)中的映射 ψ_α 通常称为向量丛 E 的**局部平凡化**,即向量丛在局部上是底空间中的开子集与纤维型空间的乘积. 从条件(2)可知,向量空间 $\mathbf{R}^q$ 中的两个元素 y_α, y_β 分别在映射 $\psi_{\alpha,p}, \psi_{\beta,p}$ 下映成 E 中同一点的条件是

$$\psi_\alpha(p,y_\alpha) = \psi_\beta(p,y_\beta).$$

换言之,y_α, y_β 在映射 $g_{\beta\alpha}(p)$ 下是等同的:

$$(g_{\beta\alpha}(p))(y_\alpha) = y_\beta. \tag{1.1}$$

把 $\mathbf{R}^q$ 中的元素记成列向量

$$y = (y^1, \cdots, y^q)^t,$$

则 $\mathrm{GL}(q)$ 是左作用在 $\mathbf{R}^q$ 上的李氏变换群，于是(1.1) 式成为

$$g_{\beta\alpha}(p) \cdot y_\alpha = y_\beta. \tag{1.2}$$

这样，条件(1) 和(2) 合起来说明，丛空间 E 可以看成一堆乘积空间 $\{U_\alpha \times \mathbf{R}^q\}$，但是当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时，对于 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$，应该将纤维 $\{p\} \times \mathbf{R}^q \subset U_\alpha \times \mathbf{R}^q$ 和纤维 $\{p\} \times \mathbf{R}^q \subset U_\beta \times \mathbf{R}^q$ 粘合起来，粘合的规则就是(1.2).

对于任意的 $p \in M$，$E_p \equiv \pi^{-1}(p)$ 称为向量丛 E 在点 p 上的**纤维**.

命题 1.1 设 $\pi: E \to M$ 是光滑流形 M 上秩为 q 的向量丛，则在每一点 $p \in M$ 上的纤维 $\pi^{-1}(p)$ 有自然的线性结构，使它成为 q 维向量空间.

由此可见，向量丛 $\pi: E \to M$ 在直观上可以想象为“植”在光滑流形 M 上的一“把”向量空间.

证明 设 $p \in U_\alpha$，$\psi_\alpha: U_\alpha \times \mathbf{R}^q \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ 是局部平凡化映射. 在 $\pi^{-1}(p)$ 中定义加法和数乘法如下：对于任意的 $v_1, v_2 \in \pi^{-1}(p)$ 及 $\lambda \in \mathbf{R}$，令

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= \psi_{\alpha,p}(\psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v_1) + \psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v_2)), \\ \lambda v_1 &= \psi_{\alpha,p}(\lambda \cdot \psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v_1)), \end{aligned} \tag{1.3}$$

因此 $v_1 + v_2, \lambda v_1 \in \pi^{-1}(p)$.

首先，我们断言：如(1.3) 式在 $\pi^{-1}(p)$ 中定义的加法和数乘法与局部平凡化 ψ_α 的选取无关. 实际上，若有 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$，$\psi_\beta: U_\beta \times \mathbf{R}^q \to \pi^{-1}(U_\beta)$ 是另一个局部平凡化映射，则由定义1.1 中的条件(2)，存在 $g_{\beta\alpha}(p) \in \mathrm{GL}(q)$，使得

$$g_{\beta\alpha}(p) = \psi_{\beta,p}{}^{-1} \circ \psi_{\alpha,p}: \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^q,$$

$g_{\beta\alpha}(p)$ 是左作用在 $\mathbf{R}^q$ 上的线性变换. 因此

$$g_{\beta\alpha}(p) \circ \psi_{\alpha,p}{}^{-1} = \psi_{\beta,p}{}^{-1}: \pi^{-1}(p) \to \mathbf{R}^q,$$

于是

$$\begin{aligned} &\psi_{\beta,p}{}^{-1}(v_i) = g_{\beta\alpha}(p) \cdot \psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v_i), \\ &\psi_{\beta,p}{}^{-1}(v_1) + \psi_{\beta,p}{}^{-1}(v_2) = g_{\beta\alpha}(p) \cdot (\psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v_1) + \psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v_2)), \\ &\lambda \cdot \psi_{\beta,p}{}^{-1}(v_1) = g_{\beta\alpha}(p) \cdot (\lambda \psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v_1)), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &\psi_{\beta,p}(\psi_{\beta,p}{}^{-1}(v_1) + \psi_{\beta,p}{}^{-1}(v_2)) \\ =&\psi_{\beta,p} \circ g_{\beta\alpha}(p)(\psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v_1) + \psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v_2)) \\ =&\psi_{\alpha,p}(\psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v_1) + \psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v_2)), \\ &\psi_{\beta,p}(\lambda \cdot \psi_{\beta,p}{}^{-1}(v_1)) \\ =&\psi_{\beta,p} \circ g_{\beta\alpha}(p)(\lambda \cdot \psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v_1)) \end{aligned}$$

$$=\psi_{\alpha,p}(\lambda\cdot\psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v_1)).$$

接着，容易验证 $\pi^{-1}(p)$ 关于如(1.3)式定义的加法和数乘法成为一个向量空间，零元素是 $\psi_{\alpha,p}{}^{-1}(0)$.

在把 E 看成一堆积流形$\{U_\alpha\times\mathbf{R}^q\}$并且同一点上的各条纤维保持线性关系地粘合起来的结果时，函数族$\{g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL(q)\}$起到核心的作用，称为向量丛 $\pi:E\to M$ 的**转移函数族**.

命题 1.2 设 $\pi:E\to M$ 是秩为 q 的向量丛，则它的转移函数族$\{g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL(q)\}$满足下列相容性条件：

(1)$g_{\alpha\alpha}(p)=I,\forall\ p\in U_\alpha$，$I$ 是 $q\times q$ 单位矩阵；

(2) 若 $U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\neq\varnothing$，则对任意的 $p\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$ 有

$$g_{\alpha\beta}(p)\cdot g_{\beta\gamma}(p)=g_{\alpha\gamma}(p);$$

(3) 对于 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$ 有

$$g_{\alpha\beta}(p)=(g_{\beta\alpha}(p))^{-1}.$$

证明 由定义

$$g_{\alpha\beta}(p)=\psi_{\alpha,p}{}^{-1}\circ\psi_{\beta,p},\quad g_{\beta\gamma}(p)=\psi_{\beta,p}{}^{-1}\circ\psi_{\gamma,p},$$

所以当 $p\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$ 时

$$\begin{aligned}&g_{\alpha\beta}(p)\cdot g_{\beta\gamma}(p)\\=&g_{\alpha\beta}(p)\circ g_{\beta\gamma}(p)\\=&\psi_{\alpha,p}{}^{-1}\circ\psi_{\gamma,p}=g_{\alpha\gamma}(p),\end{aligned}$$

故条件(2)成立. 条件(1)是自动成立的. 在条件(2)中令 $\gamma=\alpha$，则

$$g_{\alpha\beta}(p)\cdot g_{\beta\alpha}(p)=g_{\alpha\alpha}(p)=I,$$

因此

$$g_{\alpha\beta}(p)=(g_{\beta\alpha}(p))^{-1}.$$

定理 1.3 设 M 是一个 m 维光滑流形，$\{U_\alpha:\alpha\in I\}$是 M 的一个开覆盖. 如果对于任意一对指标 $\alpha,\beta\in I$，在 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时，都指定了一个光滑映射 $g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL(q)$，使得它们满足命题1.2中的条件(1)，(2)，则存在一个秩为 q 的向量丛 $\pi:E\to M$，以$\{g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL(g)\}$为它的转移函数族.

证明 考虑并集

$$\widetilde{E}=\bigcup_{\alpha\in I}\{\alpha\}\times U_\alpha\times\mathbf{R}^q,$$

这显然是一个 $m+q$ 维光滑流形. 在 $\widetilde{E}$ 中定义关系 $\sim$ 如下：设(α,p,y)，$(\beta,\widetilde{p},\widetilde{y})\in\widetilde{E}$，则$(\alpha,p,y)\sim(\beta;\widetilde{p},\widetilde{y})$当且仅当 $p=\widetilde{p}\in U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，且 $y=g_{\alpha\beta}(p)\cdot\widetilde{y}$. 容易验证：由于函数族$\{g_{\alpha\beta}\}$满足命题1.2的条件(1)，(2)，所以 $\sim$ 是等价关系. 用 $E=\widetilde{E}/\sim$ 记 $\widetilde{E}$ 关于等价关系 $\sim$ 的商空间，$(\alpha,p,y)\in\widetilde{E}$ 的 $\sim$ 等价类记为$[\alpha,p,y]$. 投影 $\pi:E\to M$ 定义为

$$\pi([\alpha,p,y]) = p, \quad \forall\ [\alpha,p,y] \in E. \tag{1.4}$$

容易证明在 E 上存在一个光滑结构，并且使 π 是光滑的满映射(证明的方法在实质上与第三章 §1 中证明 TM 是光滑流形的情形是一样的).

局部平凡化映射 $\psi_\alpha: U_\alpha \times \mathbf{R}^q \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ 定义为

$$\psi_\alpha(p,y) = [\alpha,p,y], \quad \forall\ (p,y) \in U_\alpha \times \mathbf{R}^q. \tag{1.5}$$

E 上的光滑结构使映射 ψ_α 为光滑同胚. 若 p 属于另一个局部平凡化邻域，并且有 $\tilde{y} \in \mathbf{R}^q$ 使得

$$\psi_\alpha(p,y) = \psi_\beta(p,\tilde{y}),$$

则

$$[\alpha,p,y] = [\beta,p,\tilde{y}],$$

因此

$$y = g_{\alpha\beta}(p) \cdot \tilde{y},$$

换言之，

$$\psi_{\alpha,p}{}^{-1} \circ \psi_{\beta,p} = g_{\alpha\beta}(p).$$

此外，已知 $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(q)$ 是光滑的. 这一切说明 $\pi: E \to M$ 是光滑流形 M 上秩为 q 的向量丛，它以 $\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(q)\}$ 为转移函数族.

例 1 光滑流形 M 的切丛是 M 上秩为 $m = \dim M$ 的向量丛，设 M 的光滑结构是 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha): \alpha \in I\}$，则切丛 TM 的转移函数族是 $\{J_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(m)\}$，其中 $J_{\alpha\beta}$ 是坐标变换

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta{}^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

的 Jacobi 矩阵，即

$$J_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x_\alpha{}^i}{\partial x_\beta{}^j}\right).$$

例 2 把 Möbius 带看成圆周 S^1 上的秩为 1 的向量丛，此时 Möbius 带的宽不是一条线段，而是整条直线 $\mathbf{R}^1$.

设圆周 S^1 是 $\{e^{i2\pi t}: 0 \leqslant t \leqslant 1\}$，取定 ε，使得 $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$. 考虑 S^1 的三个开子集(图 22)

$$U_1 = \{e^{i2\pi t}: -\varepsilon < t < \frac{1}{3} + \varepsilon\},$$

$$U_2 = \{e^{i2\pi t}: \frac{1}{3} - \varepsilon < t < \frac{2}{3} + \varepsilon\},$$

$$U_3 = \{e^{i2\pi t}: \frac{2}{3} - \varepsilon < t < 1 + \varepsilon\},$$

它们两两相交，构成 S^1 的开覆盖，并且 $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \varnothing$. 令

$$g_{12}(p) = g_{21}(p) = 1, \qquad \forall\ p \in U_1 \cap U_2,$$

$$g_{13}(p) = g_{31}(p) = 1, \quad \forall\, p \in U_1 \cap U_3,$$
$$g_{23}(p) = g_{32}(p) = -1, \quad \forall\, p \in U_2 \cap U_3,$$

则它们满足命题1.2的条件(1),(2),(3). 根据定理1.3存在S^1上秩为1的向量丛E,以$\{g_{\alpha\beta}\}$为转移函数族,这个向量丛就是Möbius带.

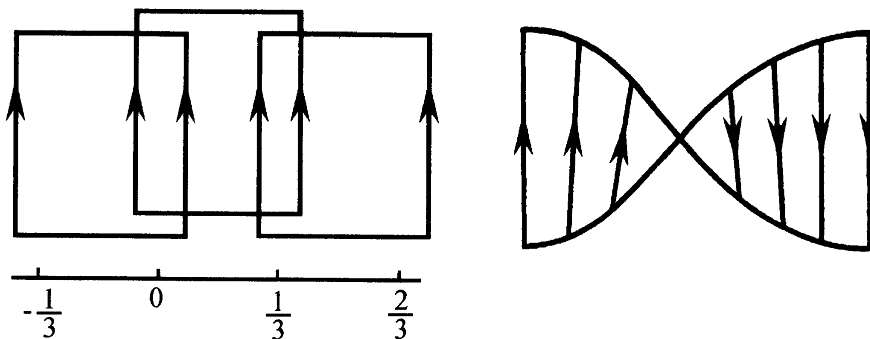


图　22

例 3　向量丛E的对偶向量丛E^*.

设$\pi: E \to M$是光滑流形上上秩为q的向量丛,$\{U_\alpha\}$是M的开覆盖,局部平凡化映射为

$$\psi_\alpha: U_\alpha \times \mathbf{R}^q \to \pi^{-1}(U_\alpha),$$

转移函数为

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(q).$$

当$U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$时,令

$$h_{\alpha\beta} = ((g_{\alpha\beta})^{-1})^t = (g_{\beta\alpha})^t \in \mathrm{GL}(q), \tag{1.6}$$

则

$$\begin{aligned}
& h_{\alpha\alpha}(p) = I; \quad \forall\, p \in U_\alpha, \\
& h_{\alpha\beta}(p) \cdot h_{\beta\gamma}(p) \\
= & (g_{\beta\alpha}(p))^t \cdot (g_{\gamma\beta}(p))^t = (g_{\gamma\alpha}(p))^t \\
= & h_{\alpha\gamma}(p), \quad \forall\, p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.
\end{aligned}$$

根据定理1.3,存在光滑流形M上秩为q的向量丛$\tilde{\pi}: E^* \to M$以$\{h_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(q)\}$为转移函数族. 向量丛$\tilde{\pi}: E^* \to M$称为$\pi: E \to M$的对偶丛.

互为对偶的向量丛$\pi: E \to M$和$\tilde{\pi}: E^* \to M$在每一点$p \in M$上的纤维$\pi^{-1}(p)$和$\tilde{\pi}^{-1}(p)$是互为对偶的向量空间. 实际上,设$p \in U_\alpha$,对应的局部平凡化映射分别记为

$$\psi_\alpha: U_\alpha \times \mathbf{R}^q \to \pi^{-1}(U_\alpha),$$
$$\tilde{\psi}_\alpha: U_\alpha \times \mathbf{R}^q \to \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha).$$

如前面所规定,$\mathbf{R}^q$中的元素记成列向量. 于是对于任意的$v \in \pi^{-1}(p)$,及$\tilde{v} \in$

$\widetilde{\pi}^{-1}(p)$，令

$$\langle v,\widetilde{v}\rangle = (\psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v))^t \cdot (\widetilde{\psi}_{\alpha,p}{}^{-1}(\widetilde{v})) \in \mathbf{R}, \tag{1.7}$$

其中 t 表示矩阵的转置.

我们断言：(1.7) 式右端的数值与局部平凡化 $\psi_\alpha,\widetilde{\psi}_\alpha$ 的取法无关. 若另有 U_β 包含点 p，则 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，且

$$\psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v) = g_{\alpha\beta}(p) \cdot \psi_{\beta,p}{}^{-1}(v),$$

$$\widetilde{\psi}_{\alpha,p}{}^{-1}(\widetilde{v}) = h_{\alpha\beta}(p) \cdot \widetilde{\psi}_{\beta,p}{}^{-1}(\widetilde{v}) = (g_{\beta\alpha}(p))^t \cdot \widetilde{\psi}_{\beta,p}{}^{-1}(\widetilde{v}),$$

这样

$$\begin{aligned}&(\psi_{\alpha,p}{}^{-1}(v))^t \cdot \widetilde{\psi}_{\alpha,p}{}^{-1}(\widetilde{v})\\ =&(\psi_{\beta,p}{}^{-1}(v))^t \cdot (g_{\alpha\beta}(p))^t \cdot (g_{\beta\alpha}(p))^t \cdot \widetilde{\psi}_{\beta,p}{}^{-1}(\widetilde{v})\\ =&(\psi_{\beta,p}{}^{-1}(v))^t \cdot \widetilde{\psi}_{\beta,p}{}^{-1}(\widetilde{v}).\end{aligned}$$

由此可见，(1.7) 式给出了向量空间 $\pi^{-1}(p)$ 和 $\widetilde{\pi}^{-1}(p)$ 之间的一个确定的配对，它关于每一个自变量都是线性的，因此 $\pi^{-1}(p)$ 和 $\widetilde{\pi}^{-1}(p)$ 是互为对偶的向量空间.

例 4 向量丛的直和.

设 $\pi: E \to M, \widetilde{\pi}: \widetilde{E} \to M$ 是 M 上的两个向量丛，纤维型空间分别是 $V,\widetilde{V}$，转移函数族分别是 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 和 $\{\widetilde{g}_{\alpha\beta}\}$. 令

$$h_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \widetilde{g}_{\alpha\beta} \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

它是左作用在直和空间 $V \oplus \widetilde{V}$ 上的线性自同构，对于 $y \in V, \widetilde{y} \in \widetilde{V}$，有

$$h_{\alpha\beta} \cdot (y \oplus \widetilde{y}) = (g_{\alpha\beta} \cdot y) \oplus (\widetilde{g}_{\alpha\beta} \cdot \widetilde{y}). \tag{1.9}$$

很明显，函数族 $\{h_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(V \oplus \widetilde{V})\}$ 满足命题 1.2 的条件(1)，(2)，因此在 M 上有以 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 为转移函数族、以 $V \oplus \widetilde{V}$ 为纤维型的向量丛，记作 $E \oplus \widetilde{E}$，称为向量丛 E 和 $\widetilde{E}$ 的直和.

例 5 向量丛的张量积.

假定向量丛 $E,\widetilde{E}$ 如例 4 所述. 用 $f_{\alpha\beta}$ 表示线性变换 $g_{\alpha\beta}$ 和 $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ 的张量积，左作用在张量积 $V \otimes \widetilde{V}$ 上，其定义是：对于 $v \in V, \widetilde{v} \in \widetilde{V}$，则

$$f_{\alpha\beta} \cdot (v \otimes \widetilde{v}) = (g_{\alpha\beta} \cdot v) \otimes (\widetilde{g}_{\alpha\beta} \cdot \widetilde{v}). \tag{1.10}$$

容易验证，函数族 $\{f_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(V \otimes \widetilde{V})\}$ 满足命题 2.2 的条件(1)，(2). 所以在 M 上有以 $\{f_{\alpha\beta}\}$ 为转移函数族、以 $V \otimes \widetilde{V}$ 为纤维型的向量丛，记作 $E \otimes \widetilde{E}$，称为向量丛 E 和 $\widetilde{E}$ 的张量积.

例 6 光滑流形 M 上的张量丛.

令

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M,$$

$$T^r_s(M) = \bigcup_{x \in M} T^r_s(x),$$

则如同切丛的做法，可赋予 $T^*M, T^r_s(M)$ 以光滑结构，使之成为 M 上的向量丛，分别称为 M 上的余切丛和 (r,s) 型张量丛.

可以验证：余切丛 $\pi: T^*M \to M$ 和切丛 $\pi: TM \to M$ 是互为对偶的向量丛；(r,s) 型张量丛是 r 个切丛与 s 个余切丛的张量积.

定义 1.2　设 $\pi: E \to M$ 是一个向量丛. 若有光滑映射 $s: M \to E$，使得

$$\pi \circ s = \mathrm{id}: M \to M,$$

则称 s 为向量丛 (E, M, π) 的一个光滑**截面**.

向量丛 E 的光滑截面的集合记为 $\Gamma(E)$.

在第三章命题 2.1 中已经证明光滑流形 M 上的光滑切向量场是切丛的光滑截面，因此

$$\mathscr{X}(M) = \Gamma(TM).$$

命题 1.4　设 $\pi: E \to M$ 是一个向量丛，则截面空间 $\Gamma(E)$ 是一个 $C^\infty(M)$-模.

其证明留作习题.

§2　微分纤维丛

向量丛的纤维是向量空间，是一种特殊的微分纤维丛. 一般的微分纤维丛的纤维是有一个李群左作用在其上的光滑流形. 在本节我们将给出微分纤维丛的定义，并举一些例子.

定义 2.1　设 E, M, F 是光滑流形，G 是左作用在流形 F 上的李氏变换群. 若有光滑满映射 $\pi: E \to M$，并且下列条件成立：

(1) M 有一个开覆盖 $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$，并且对每个 $\alpha \in I$ 有光滑同胚

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha),$$

使得

$$\pi \circ \psi_\alpha(p, f) = p, \quad \forall\, p \in U_\alpha, f \in F;$$

(2) 对每一点 $p \in U_\alpha$，记

$$\psi_{\alpha,p}(f) = \psi_\alpha(p, f), \quad \forall\, f \in F,$$

则 $\psi_{\alpha,p}: F \to \pi^{-1}(p)$ 是光滑同胚，并且当 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ 时光滑同胚 ${\psi_{\alpha,p}}^{-1} \circ \psi_{\beta,p}: F \to F$ 是 G 的一个元素 $g_{\alpha\beta}(p)$ 在 F 上的左作用，即

$${\psi_{\alpha,p}}^{-1} \circ \psi_{\beta,p}(f) = g_{\alpha\beta}(p) \cdot f, \quad \forall\, f \in F;$$

(3) 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时，映射 $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to G$ 是光滑的，

则称 (E, M, F, π, G) 为光滑流形 M 上的一个**微分纤维丛**，E 称为**丛空间**，M 称为**底空间**，F 称为**纤维型**，G 称为**结构群**，π 称为**丛投影**.

在条件(1)中所说的映射 $\psi_\varphi: U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ 称为纤维丛 E 的**局部平凡化**.

定义 2.2 设 (E,M,F,π,G) 为微分纤维丛. 若 $f: M \to E$ 是一个光滑映射,并且

$$\pi \circ f = \mathrm{id}: M \to M, \tag{2.1}$$

则称 f 是纤维丛 E 的一个**截面**.

一般说来,微分纤维丛未必有定义在整个底流形 M 上的截面,因此我们常常会提到局部截面. 设 U 是 M 的一个开子集,若有光滑映射 $f: U \to E$,使得 $\pi \circ f = \mathrm{id}: U \to U$,则称 f 是纤维丛 E 在 U 上的(局部)截面. 向量丛的情况与一般的微分纤维丛有一些不同. 在第三章我们已经提到过,定义在光滑流形 M 的一个开子集 U 上的光滑切向量场 X 在稍缩小一点的开集 $V(\overline{V} \subset U)$ 上的限制能够扩充成整个流形 M 上的光滑切向量场,同样的证明能够用于向量丛 E 的局部截面. 因此,对于向量丛 E 来说,大范围截面总是存在的,即 $\Gamma(E) \neq \varnothing$;但是处处不为零的截面是未必存在的.

命题 1.2 和定理 1.3 在作适当的修改之后对一般的微分纤维丛是成立的. 这意味着,转移函数族 $\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to G\}$ 在构造微分纤维丛时起着核心作用.

例 1 光滑流形 M 上的切标架丛

设 M 是 m 维光滑流形. 在每一点 $x \in M$,取切空间 T_xM 的一个基底 $\{e_i: 1 \leqslant i \leqslant m\}$,则 $\{x; e_i\}$ 称为流形 M 在点 x 的一个切标架. 用 $P(x)$ 表示流形 M 在点 x 的全体切标架的集合,令

$$\mathscr{P} = \bigcup_{x \in M} P(x). \tag{2.2}$$

定义映射 $\pi: \mathscr{P} \to M$,使得 $\pi(P(x)) = \{x\}$.

我们要在 $\mathscr{P}$ 上给出一个光滑流形结构,使得 $\pi: \mathscr{P} \to M$ 成为一个微分纤维丛,它的纤维型为 $\mathrm{GL}(m)$,结构群也是 $\mathrm{GL}(m)$.

为记法简便起见,我们把切标架 $\{x; e_i\}$ 记成 $e = (e_1, \cdots, e_m)$,这是切空间 T_xM 中 m 个线性无关的切向量 e_i 组成的行矩阵. 如果 $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_m)$ 是 M 在点 x 的另一个切标架,则存在一个非退化的 $m \times m$ 矩阵 $A \in \mathrm{GL}(m)$,使得

$$\delta = e \cdot A, \tag{2.3}$$

其中“·”表示矩阵的乘法.

现在假定 $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in I\}$ 是光滑流形 M 的一个光滑结构,则在每一个 U_α 上有局部坐标系 $x_\alpha^i = (\varphi_\alpha(\cdot))^i, 1 \leqslant i \leqslant m$. 因此在 U_α 上有自然的切标架场 $\left\{x; \left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\right|_x\right\}$,其中每个切向量场 $\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \in \mathscr{X}(U_\alpha)$. 简单地把这个切标架场记为 ∂_α,即

$$\partial_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^m} \right). \tag{2.4}$$

定义映射 $\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathrm{GL}(m) \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ 如下：设 $x \in U_\alpha, A \in \mathrm{GL}(m)$，则

$$\psi_\alpha(x, A) = \partial_\alpha(x) \cdot A. \tag{2.5}$$

因为 $\partial_\alpha(x) \cdot A \in P(x)$，故有

$$\pi \circ \psi_\alpha(x, A) = x.$$

若 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$，且另有 $\widetilde{A} \in \mathrm{GL}(m)$，使得

$$\psi_\alpha(x, A) = \psi_\beta(x, \widetilde{A}),$$

则

$$\partial_\alpha(x) \cdot A = \partial_\beta(x) \cdot \widetilde{A}. \tag{2.6}$$

但是在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^m} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_\beta^m} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^1} & \cdots & \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_\beta^m}{\partial x_\alpha^1} & \cdots & \frac{\partial x_\beta^m}{\partial x_\alpha^m} \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

将右端的 $m \times m$ 矩阵记为 $J_{\beta\alpha}$，即它是坐标变换 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 的 Jacobi 矩阵，则上式成为

$$\partial_\alpha(x) = \partial_\beta(x) \cdot J_{\beta\alpha}(x). \tag{2.8}$$

将它代入(2.6) 式得到

$$J_{\beta\alpha}(x) \cdot A = \widetilde{A}, \tag{2.9}$$

这意味着

$$g_{\beta\alpha}(x) \equiv \psi_{\beta,x}^{-1} \circ \psi_{\alpha,x} = J_{\beta\alpha}(x) \in \mathrm{GL}(m). \tag{2.10}$$

仿照第三章 §1 关于切丛的做法，在 $\mathscr{P}$ 上可以定义一个光滑结构，使得每一个映射

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathrm{GL}(m) \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

是光滑同胚，π 是光滑映射．对照定义 2.1，$\pi : \mathscr{P} \to M$ 成为一个微分纤维丛，称为光滑流形 M 上的切标架丛，其丛空间是 $\mathscr{P}$，纤维型 $F = \mathrm{GL}(m)$，结构群 $G = \mathrm{GL}(m)$，它在 F 上的左作用是李群 $\mathrm{GL}(m)$ 上的左移动．此外，这个丛的转移函数族 $g_{\beta\alpha} = J_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(m)$，其中 $J_{\beta\alpha}$ 是光滑流形 M 上局部坐标变换的 Jacobi 矩阵

$$J_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^1} & \cdots & \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_\beta^m}{\partial x_\alpha^1} & \cdots & \frac{\partial x_\beta^m}{\partial x_\alpha^m} \end{pmatrix}.$$

关于这个例子有两点需要指出：

(1) 切标架丛 $\pi : \mathscr{P} \to M$ 的纤维型与结构群 G 是同一个流形，即 $F = G$，并且 G 在 F 上的左作用恰好是 G 在它自身上的左移动.

(2) 切标架丛 $\pi : \mathscr{P} \to M$ 和切丛 $\pi : TM \to M$ 的纤维型是不同的，但是它们却有相同的转移函数族 $\{J_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(m)\}$.

由此可引出下面两个定义：

定义 2.3 设 (E, M, F, π, G) 是一个微分纤维丛，如果 $F = G$，并且 G 在 F 上的左作用就是 G 在它自身上的左移动，则称该纤维丛为光滑流形 M 上以 G 为结构群的主纤维丛，简称为 G－**主丛**，记为 (E, M, π, G).

定义 2.4 设 (E, M, F, π, G) 和 $(\widetilde{E}, M, \widetilde{F}, \widetilde{\pi}, G)$ 是同一个光滑流形 M 上、以同一个李群 G 为结构群的微分纤维丛. 如果存在 M 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$，使得这两个纤维丛分别有对应的局部平凡化映射，并且它们有相同的转移函数族 $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G\}$，则称这两个微分纤维丛是**相配的**.

根据上面的定义，光滑流形 M 上的切标架丛 $\pi : \mathscr{P} \to M$ 是一个 $\mathrm{GL}(m)$-主丛，并且它是切丛 $\pi : TM \to M$ 的相配丛. 微分纤维丛的相配关系是一个等价关系.

命题 2.1 每一个微分纤维丛 (E, M, F, π, G) 都有与它相配的 G- 主丛.

证明 设微分纤维丛 $\pi : E \to M$ 的转移函数族是 $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G\}$. G 在它自身上的左移动可看作 G 左作用于它自身的李氏变换群，则根据适当修改之后的定理 1.3，存在微分纤维丛 $(\widetilde{E}, M, G, \widetilde{\pi}, G)$ 以 $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G\}$ 为转移函数族，这是与原纤维丛相配的 G- 主丛.

这个命题再次强调了转移函数族对于微分纤维丛的核心作用，并且在结构群为 G 的微分纤维丛的相配类中确有一个 G- 主丛作为它的代表.

例 2 设 G 是一个李群，H 是 G 的闭子群，则 $\pi : G \to G/H$ 是一个 H- 主丛.

在第六章 §3 的定理 3.11 和定理 3.12 说，H 是 G 的李子群，并且 G/H 是一个光滑流形(齐性空间)，使得投影 $\pi : G \to G/H$ 是光滑映射. 此外，定理 3.12 还说，$[e]$ 在 G/H 中有一个开邻域 W 以及光滑映射 $\tau : W \to G$，使得 $\pi \circ \tau = \mathrm{id} : W \to W$.

这样，$\{g \cdot W : g \in G\}$ 构成 G/H 的一个开覆盖. 对于每一个 $g \in G$，定义映射

$$\psi_g : (g \cdot W) \times H \to \pi^{-1}(g \cdot W)$$

如下：设 $x \in W, h \in H$，令

$$\psi_g(g \cdot x, h) = g \cdot \tau(x) \cdot h \in G. \tag{2.11}$$

显然 ψ_g 是从 $(g \cdot W) \times H$ 到 G 的光滑映射，并且

$$\begin{aligned}&\pi\circ\psi_g(g\cdot x,h)\\&=\pi(g\cdot\tau(x)\cdot h)\\&=g\cdot\pi(\tau(x))=g\cdot x,\end{aligned}$$

故

$$\psi_g(g\cdot x,h)\in\pi^{-1}(g\cdot W).$$

我们断言:ψ_g 是光滑同胚.为此只要构造 ψ_g 的逆映射,并且证明它是光滑的.实际上,若 $\widetilde{g}\in\pi^{-1}(g\cdot W)$,则$[\widetilde{g}]=\pi(\widetilde{g})\in g\cdot W$,于是$[g^{-1}\cdot\widetilde{g}]\in W$.现在,$\tau([g^{-1}\widetilde{g}])\in G$,并且

$$\pi\circ\tau([g^{-1}\widetilde{g}])=[g^{-1}\widetilde{g}],$$

故

$$h=(\tau([g^{-1}\widetilde{g}]))^{-1}\cdot(g^{-1}\widetilde{g})\in H.$$

这样,

$$\begin{aligned}\psi_g([\widetilde{g}],h)&=g\cdot\tau(g^{-1}\cdot[\widetilde{g}])\cdot h\\&=g\cdot\tau([g^{-1}\widetilde{g}])\cdot(\tau([g^{-1}\widetilde{g}]))^{-1}\cdot g^{-1}\cdot\widetilde{g}\\&=\widetilde{g},\end{aligned}$$

所以

$$(\psi_g)^{-1}(\widetilde{g})=([\widetilde{g}],(\tau([g^{-1}\widetilde{g}]))^{-1}\cdot g^{-1}\cdot\widetilde{g}),\tag{2.12}$$

这显然是光滑映射.

若$(g_1\cdot W)\cap(g_2\cdot W)\neq\varnothing$,则对于任意的 $x\in(g_1\cdot W)\cap(g_2\cdot W)$,有

$$g_1^{-1}x\in W,\qquad g_2^{-1}x\in W,$$

那么转移函数是

$$\begin{aligned}f_{g_2g_1}&=(\tau(g_2^{-1}x))^{-1}\cdot(g_2^{-1}g_1)\cdot\tau(g_1^{-1}x)\\&=(g_2\cdot\tau(g_2^{-1}x))^{-1}\cdot(g_1\cdot\tau(g_1^{-1}x))\in H,\end{aligned}$$

$f_{g_2g_1}:(g_1W)\cap(g_2W)\to H$ 是光滑映射.因此 $\pi:G\to G/H$ 是一个以 H 为纤维型、以 H 为结构群的微分纤维丛,即它是一个 H- 主丛,

鉴于主丛的重要性,下面给出主丛的另一种常用的描述:

定理 2.2　设 $\pi:E\to M$ 是一个 G- 主丛,则李群 G 是自由地右作用在丛空间 E 上的李氏变换群,并且丛的局部平凡化 $\psi:U\times G\to\pi^{-1}(U)$ 关于群作用是等变的,即对于任意的 $x\in U,g,h\in G$ 有

$$\psi(x,g)h=\psi(x,g\cdot h),\tag{2.13}$$

或

$$R_h\circ\psi_x=\psi_x\circ R_h:G\to\pi^{-1}(x),$$

其中

$$\psi_x = \psi(x, \cdot) : G \to \pi^{-1}(x).$$

证明　设 M 有开覆盖 $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$，及对应的局部平凡化 $\psi_\alpha : U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha)$. 对任意的 $(x,g) \in U_\alpha \times G$ 及 $h \in G$，令

$$\psi_\alpha(x,g) \cdot h = \psi_\alpha(x, g \cdot h), \tag{2.14}$$

我们要证上式右端与局部平凡化的选择无关.

若有另一个局部平凡化邻域 U_β 包含 x，则有 $\widetilde{g} \in G$ 使得

$$\psi_\alpha(x,g) = \psi_\beta(x,\widetilde{g}),$$

其中

$$\widetilde{g} = \psi_{\beta,x}^{-1} \circ \psi_{\alpha,x}(g) = g_{\beta\alpha}(x) \cdot g.$$

因此，对于任意的 $h \in G$ 有

$$\widetilde{g} \cdot h = (g_{\beta\alpha}(x) \cdot g) \cdot h = g_{\beta\alpha}(x) \cdot (gh),$$

即

$$\psi_\beta(x, \widetilde{g} \cdot h) = \psi_\alpha(x, g \cdot h).$$

所以(2.14)式给出了元素 $h \in G$ 在 E 上的右作用，而且局部平凡化映射关于 G 的作用是等变的.

定理 2.2 的逆命题也是真的，我们把它叙述如下：

命题 2.3　设 G 是自由地右作用在光滑流形 E 上的李氏变换群，如果

(1) E 关于 G 所诱导的等价关系的商空间 $M = E/G$ 是一个光滑流形，并且投影 $\pi : E \to M$ 是光滑的；

(2) E 在局部上是平凡的，即对于 M 的每一点 x，存在一个邻域 $U \subset M$ 及光滑同胚 $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$，对于 $u \in \pi^{-1}(U)$ 记 $\varphi(u) = (\pi(u), \pi_1(u))$，则对于任意的 $u \in \pi^{-1}(U)$，$g \in G$ 有

$$\pi_1(u \cdot g) = \pi_1(u) \cdot g, \tag{2.15}$$

那么 $\pi : E \to M$ 是一个 G- 主丛.

命题的证明留给读者作练习.

习　题　七

1.　设 M 是 m 维光滑流形，令

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M.$$

定义映射 $\widetilde{\pi} : T^*M \to M$，使得对于任意的 $\alpha \in T_x^*M$ 有

$$\pi(\alpha) = x.$$

试给出 T^*M 的光滑结构，使得 $\widetilde{\pi} : T^*M \to M$ 成为 M 上的向量丛，称为 M 上的余切丛. 证明余切丛 $\widetilde{\pi} : T^*M \to M$ 和切丛 $\pi : TM \to M$ 是互为对偶的向量丛.

2.　证明:在余切丛 T^*M 上存在一个处处非退化的 2 次外微分式 ω,并且 $\mathrm{d}\omega = 0$.

3.　设 M 是 m 维光滑流形,用 $L(x)$ 表示切空间 T_xM 上全体线性变换的集合.令

$$L(M) = \bigcup_{x\in M} L(x),$$

并且定义映射 $\pi : L(M) \to M$,使得对于任意的 $\sigma \in L(x)$ 有

$$\pi(\sigma) = x.$$

试在 $L(M)$ 上给出一个光滑结构,使得 $\pi : L(M) \to M$ 成为 M 上的(1,1)型张量丛.并且证明 $L(M)$ 是切丛 TM 和余切丛 T^*M 的张量积.

4.　设 $\pi : E \to M$ 是向量丛,证明:截面空间 $\Gamma(E)$ 是一个 $C^\infty(M)$ - 模.

5.　n 维实射影空间 $\mathbf{R}P^n$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中所有 1 维线性子空间所构成的 n 维光滑流形,因此任意一点 $p \in \mathbf{R}P^n$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 1 维线性子空间.令

$$E = \bigcup_{p\in \mathbf{R}P^n} p,$$

及映射 $\pi : E \to \mathbf{R}P^n$,使得对于任意的 $v \in p$ 有

$$\pi(v) = p.$$

试给出 E 的光滑结构,使得 $\pi : E \to \mathbf{R}P^n$ 成为在实射影空间 $\mathbf{R}P^n$ 上秩为 1 的向量丛;并求该向量丛的转移函数族.

6.　n 维复射影空间 $\mathbf{C}P^n$ 是 $\mathbf{C}^{n+1}$ 中所有 1 维复线性子空间所构成的 $2n$ 维光滑流形,因此任意一点 $p \in \mathbf{C}P^n$ 是 $\mathbf{C}^{n+1} = \mathbf{R}^{2(n+1)}$ 中的 2 维线性子空间.令

$$E = \bigcup_{p\in \mathbf{C}P^n} p$$

相应地定义投影 $\pi : E \to \mathbf{C}P^n$.试给出 E 的光滑结构,使得 $\pi : E \to \mathbf{C}P^n$ 成为在 $\mathbf{C}P^n$ 上秩为 2 的向量丛,并求该向量丛的转移函数族.

7.　设 $\pi : E \to M$ 是 m 维光滑流形 M 上秩为 r 的向量丛.对于任意一点 $x \in M$,用 $P(x)$ 表示向量空间 $\pi^{-1}(x)$ 中所有基底的集合($\pi^{-1}(x)$ 中的每一个基底称为向量丛 $\pi : E \to M$ 在点 $x \in M$ 的一个标架),令

$$\mathscr{P} = \bigcup_{x\in M} P(x),$$

定义 $\tilde{\pi} : \mathscr{P} \to M$,使得 $\tilde{\pi}(P(x)) = x$.试在 $\mathscr{P}$ 中给出一个光滑结构,使得 $\tilde{\pi} : \mathscr{P} \to M$ 成为 M 上的一个 $\mathrm{GL}(r)$- 主丛,并且证明它与向量丛 $\pi : E \to M$ 是相配的.

8.　证明命题 2.3.

附　录

§1　拓扑学基本概念

拓扑学是本课程的先修课程之一．由于目前在我国大多数高等院校的数学系，拓扑学往往是作为选修课开设的，而尚未成为必修基础课．为了方便读者阅读和使用本书，我们把本书所用到的点集拓扑概念作一些简要介绍．读者可进一步参考[5]．

拓扑的概念是将实数域中开区间的概念抽象化而引进的，目的是为了能在一个非空集合中开展连续性的讨论．

定义 1.1　设 S 是一个非空集合，τ 是 S 的子集所组成的一个集合．如果 τ 满足下列三个条件，则称 τ 是 S 的一个拓扑：

(1) $S \in \tau, \varnothing \in \tau$；

(2) 若 $A, B \in \tau$，则 $A \cap B \in \tau$；

(3) 若 $A_\alpha (\alpha \in I)$ 是 τ 的成员，则它们的并集 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 也是 τ 的成员．

指定了集合 S 的一个拓扑 τ，则称 (S, τ) 为一个拓扑空间．τ 中的成员称为拓扑空间 S 的开集．

例 1　设 $S = \mathbf{R}$，令 τ 是 $\mathbf{R}$ 中开区间的并集和空集 $\varnothing$ 所组成的集合．显然 τ 是 $\mathbf{R}$ 的一个拓扑，它是实数域 $\mathbf{R}$ 的标准拓扑．

例 2　设 $S = \mathbf{R}$，令

$$\tau_1 = \{\varnothing, \mathbf{R}\} \cup \{(-\infty, a) : a \in \mathbf{R}\}.$$

容易验证 τ_1 也是 $\mathbf{R}$ 的拓扑，但是拓扑空间 $(\mathbf{R}, \tau_1)$ 不同于 $(\mathbf{R}, \tau)$．

例 3　设 S 是一个非空集合．在 S 上有两个极端拓扑：

1° $\tau = \{\varnothing, S\}$，称为 S 的平凡拓扑；

2° τ 是 S 的全体子集组成的集合，称为 S 的离散拓扑．

对于 S 的离散拓扑，S 的每一个元素构成 S 的一个开集．

定义 1.2　设 S 是一个非空集合，$\mathscr{B}$ 是 S 的子集所组成的一个集合．如果 $\mathscr{B}$ 满足下列两个条件，则称 $\mathscr{B}$ 是 S 的一个拓扑基：

(1) 对 S 中任意一点 x，必有 $B \in \mathscr{B}$，使得 $x \in B$；

(2) 若对于 $x \in S$，有 $\mathscr{B}$ 中两个成员 B_1, B_2，使得 $x \in B_1 \cap B_2$，则必有 $\mathscr{B}$ 中一个成员 B_3，使得 $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$．

命题 1.1　设 $\mathscr{B}$ 是非空集合 S 的一个拓扑基，令

$$\tau = \{\varnothing\} \cup \{A : A \text{ 是 } \mathscr{B} \text{ 中若干成员之并}\},$$

则 τ 是 S 的一个拓扑,称为由拓扑基 $\mathscr{B}$ 诱导的拓扑.

显然,S 的拓扑 τ 本身是一个拓扑基,并且它诱导的拓扑就是 τ 自身.

定义 1.3 设(S,τ)是一个拓扑空间,$x \in S$.设U是包含x的一个子集,并且存在 $A \in \tau$,使得 $x \in A \subset U$,则称U是x的一个邻域.若U本身是开集,则称 U 是 x 的开邻域.

至此,拓扑空间中子集的内点、内部、闭集、子集的聚点、闭包、收敛序列的极限点、连续映射等概念的定义都可以仿照度量空间(如实数域)中同名概念的定义得到.

定义 1.4 设S是一个非空集合,τ_1,τ_2是S的两个拓扑.如果τ_2中每一个成员都可以表示成 τ_1 中若干个成员的并集,则称拓扑 τ_1 比 τ_2 细.

在 $\mathbf{R}$ 中由例 1 给出的拓扑 τ 比由例 2 给出的拓扑 τ_1 细.非空集合 S 的离散拓扑比 S 的任意一个拓扑细,而 S 的任意一个拓扑比 S 的平凡拓扑细.

定义 1.5 设 S 是拓扑空间.若 S 有一个拓扑基 $\mathscr{B}$,使得 $\mathscr{B}$ 至多有可数多个成员,则称 S 满足第二可数公理(即 A_2 公理).

定义 1.6 设 S 是拓扑空间.若对于 S 中任意两个不同点 $x \neq y$,必有 S 的两个开集U,V,使得 $x \in U,y \in V$,且$U \cap V = \varnothing$,则称 S 是 Hausdorff 空间(或满足 T_2 公理).

例 2 给出的空间$(\mathbf{R},\tau_1)$不是 Hausdorff 空间.

定义 1.7 设 S 是拓扑空间.如果 S 的任意一个开覆盖都有一个有限的子覆盖,则称 S 是紧致拓扑空间.

定义 1.8 设 S 是拓扑空间.若 S 不能表示成两个互不相交的非空开集的并集,则称 S 是连通的.

定理 1.9 设 S 是拓扑空间.若对于任意两点 $a,b \in S$,都存在一个连续映射 $f:[0,1] \to S$,使得 $f(0) = a,f(1) = b$,则称 S 是道路连通的.

命题 1.2 道路连通的拓扑空间必是连通的.

§ 2 Sard 定理

Sard 定理是微分拓扑中许多重要的存在性定理的基础,其重要性是不言而喻的.但是,本书的重点在于微分流形的基本概念和微分流形上切向量、切空间、切向量场、外微分式等几何对象,对于微分流形的拓扑侧面没有进行深入的讨论,因而基本上不用 Sard 定理.另外,Sard 定理的证明方法本身并不难,但是它在微分流形的一般理论中不具有典型性.所以我们在本课程不讲 Sard 定理.鉴于它所揭示的事实的重要性,读者有必要知道它,因而我们在此对 Sard 定理及有关概念作一些简要的介绍.读者可参阅[14],[15].

定义 2.1 设M,N是光滑流形,$f:M \to N$是光滑映射.若在点 $p \in M$,

$\mathrm{rk}_p(f) < \dim N$，则称 p 是 f 的临界点．f 的全体临界点的集合记为 C_f．

若在点 $p \in M$，$\mathrm{rk}_p(f) = \dim N$，则称 p 是 f 的正则点．

对照第二章 §4 的定义 4.4 可知，p 是 f 的正则点当且仅当 f 在点 p 是淹没．

定义 2.2　设 M,N 是光滑流形，$f: M \to N$ 是光滑映射．$q \in N$．若 $f^{-1}(q) \cap C_f \neq \varnothing$，则称 q 是 f 的临界值．若 $f^{-1}(q) \cap C_f = \varnothing$，则称 q 是 f 的正则值．

很明显，f 的临界值的集合是 $f(C_f)$；f 的正则值的集合是 $N \backslash f(C_f)$．当 $f^{-1}(q) = \varnothing$ 时，q 也是 f 的正则值．

第二章 §5 的推论 5.5 可以改述成：

命题 2.1　设 M,N 是光滑流形，$f: M \to N$ 是光滑映射．如果 $q \in f(M)$ 是 f 的正则值，则 $f^{-1}(q)$ 是 M 的嵌入子流形，其维数 $= \dim M - \dim N$．

设 $a^i, b^i \in \mathbf{R}$，$a^i < b^i$，$1 \leqslant i \leqslant m$，则 $\mathbf{R}^m$ 的子集

$$\begin{aligned} I &= (a^1, b^1) \times \cdots \times (a^m, b^m) \\ &= \{(x^1, \cdots, x^m) \in \mathbf{R}^m : a^i < x^i < b^i, i = 1, \cdots, m\} \end{aligned}$$

称为 m 维开长方体．m 维开长方体的体积定义为

$$\mathrm{Vol}(I) = \prod_{i=1}^{m} (b^i - a^i).$$

定义 2.3　设 A 是 $\mathbf{R}^m$ 的一个子集．若对任意的 $\varepsilon > 0$，必能找到至多可数多个开长方体 $\{I_i\}$，使得它们覆盖了 A，并且其体积之和小于 ε，即：

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(I_i) < \varepsilon,$$

则称 A 是 $\mathbf{R}^m$ 中的零测集．

显然，$\mathbf{R}^m$ 中的零测集的子集仍是零测集；$\mathbf{R}^m$ 中可数多个零测集之并仍是零测集．但是，$\mathbf{R}^m$ 中非空开集不是零测集．

定义 2.4　设 M 是一个 m 维光滑流形，$A \subset M$．若对 M 的任意一个坐标卡 (U, φ)，$\varphi(U \cap A)$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的零测集，则称 A 是 M 中的零测集．

上面定义中的条件可以减弱为：对每一点 $p \in A$，存在 p 的一个坐标卡 (U, φ)，使得 $\varphi(U \cap A)$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的零测集，则称 A 是 M 中的零测集．

定理 2.2(Sard 定理)　设 M,N 是光滑流形，$f: M \to N$ 是光滑映射，则 f 的临界值的集合 $f(C_f)$ 是 N 中的零测集．

推论 2.3　设 M,N 是光滑流形，$\dim M < \dim N$，f 是 $M \to N$ 是光滑映射，则 $f(M)$ 是 N 中的零测集．

在上述推论中，若 f 是 C^1- 映射，则结论也成立．

推论 2.4　设 M,N 是光滑流形，$f: M \to N$ 是光滑映射，则 f 的正则值

的集合在 N 中是处处稠密的.

利用 Sard 定理可以证明紧致情形的 Whitney 定理,即:

定理 2.5　设 M 是 m 维紧致光滑流形,则存在光滑映射 $\varphi: M \to \mathbf{R}^{2m+1}$,使得 (φ, M) 成为 $\mathbf{R}^{2m+1}$ 的嵌入子流形.

证明　第二章 §4 定理 4.5 已经告诉我们:存在一个充分大的整数 n,以及光滑映射 $\varphi: M \to \mathbf{R}^n$,使得 (φ, M) 是 $\mathbf{R}^n$ 的嵌入子流形.如果 $n \leqslant 2m+1$,则定理的结论已成立.现在假定 $n > 2m+1$,我们要把维数 n 降下来.

因为 (φ, M) 是 $\mathbf{R}^n$ 的嵌入子流形,我们把 $\varphi(M)$ 和 M 等同起来,$\mathbf{R}^n$ 的欧氏度量在 M 上诱导出一个黎曼度量,因而 $T_xM(x \in M)$ 成为欧氏向量空间.TM 是 $2m$ 光滑流形;又令

$$K = \{(x,y) \in M \times M : x \neq y\},$$

显然 K 是 $2m$ 维光滑流形 $M \times M$ 的开子流形,所以 K 是 $2m$ 维光滑流形.定义映射 $f_1: TM \to S^{n-1}$ 和 $f_2: K \to S^{n-1}$,使得

$$f_1(X) = \frac{X}{|X|}, \quad \forall\, X \in TM,$$

$$f_2(x,y) = \frac{y-x}{|y-x|}, \quad \forall\, (x,y) \in K.$$

很明显,f_1, f_2 都是光滑映射.由于 $\dim TM < \dim S^{n-1}$,$\dim K < \dim S^{n-1}$,根据 Sard 定理,$f_1(TM) \cup f_2(K)$ 是 S^{n-1} 中的零测集.于是可取向量 $a \in S^{n-1}$,使得 $a \notin f_1(TM)$,又 $a \notin f_2(K)$.

定义映射 $\tilde{\varphi}: M \to \mathbf{R}^n$,使得

$$\tilde{\varphi}(x) = x - \langle x, a\rangle a, \quad \forall\, x \in M.$$

由于 $\langle \tilde{\varphi}(x), a\rangle = 0$,所以 $\tilde{\varphi}(M)$ 落在 $\mathbf{R}^n$ 中以 a 为法向量的子空间 $\mathbf{R}^{n-1}$ 内.因此,$\tilde{\varphi}$ 是从 M 到 $\mathbf{R}^{n-1}$ 的光滑映射.下面要证明 $\tilde{\varphi}: M \to \mathbf{R}^{n-1}$ 是单一的浸入.

$\tilde{\varphi}$ 是浸入.设 $X \in T_xM$,取光滑曲线 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$,使得 $\gamma(0) = x$,$\gamma'(0) = X$,则

$$\tilde{\varphi}(\gamma(t)) = \gamma(t) - \langle \gamma(t), a\rangle a,$$

因此

$$\tilde{\varphi}_*(X) = X - \langle X, a\rangle a.$$

当 $X \neq 0$ 时,因为 $a \notin f_1(TM)$,故 X 与 a 不共线,即 $\tilde{\varphi}_*(X) \neq 0$.

$\tilde{\varphi}$ 的单一性.设 $x, y \in M$,$x \neq y$,则

$$\tilde{\varphi}(y) - \tilde{\varphi}(x) = (y-x) - \langle y-x, a\rangle a.$$

因为 $a \notin f_2(K)$,故 a 与 $y-x$ 不共线,即 $\tilde{\varphi}(y) \neq \tilde{\varphi}(x)$.

既然 $\tilde{\varphi}$ 是单一的浸入,以及 M 是紧致的,故 $\tilde{\varphi}: M \to \mathbf{R}^{n-1}$ 是嵌入子流形.若 $n-1 > 2m+1$,则继续上面的过程,直到将 M 嵌入 $\mathbf{R}^{2m+1}$.证毕.

进一步还能把 M 浸入到 $\mathbf{R}^{2m}$ 中去. 为此,只要考虑

$$S_1(M)=\{X\in T(M):|X|=1\},$$

$S_1(M)$ 是 $2m-1$ 维光滑流形. 令

$$f: S_1(M)\to S^{2m}\subset\mathbf{R}^{2m+1},$$

使得 $f(X)=X$. 显然 f 是光滑映射. 由 Sard 定理,$f(S_1(M))$ 是 S^{2m} 中的零测集,取 $a\in S^{2m}\backslash f(S_1(M))$,则将 M 沿向量 a 投影到 $\mathbf{R}^{2m+1}$ 的子空间 $\mathbf{R}^{2m}$,得到 M 在 $\mathbf{R}^{2m}$ 中的浸入.

当 M 是非紧致光滑流形的情形,其证明可看[14],[15].

习 题 提 示

习题一

4. 本题的关键是(1). 证明方法有多种. 一种是几何证法，利用 σ 是等距，证明线段 PQ 内任意一点 T 映到以 $\sigma(P)$ 和 $\sigma(Q)$ 为端点的线段上一点 $\sigma(T)$，而且 $\sigma(T)$ 关于 $\sigma(P)$，$\sigma(Q)$ 的分比等于 T 关于 P，Q 的分比，等等. 另一种证法是解析的. 在 E^n 中取笛卡儿直角坐标系 $\{O;\delta_i\}$，用 $(x^1,\cdots,x^n)$ 记点 x 的坐标，用 $(\widetilde{x}^1,\cdots,\widetilde{x}^n)$ 记象点 $\sigma(x)$ 的坐标，则

$$\widetilde{x}^i = f^i(x^1,\cdots,x^n).$$

σ 是等距变换的条件是对于任意的 $x,y \in E^n$ 有

$$\sum_{i=1}^n (y^i - x^i)^2 = \sum_{i=1}^n (f^i(y) - f^i(x))^2.$$

任意固定一点 $x \in E^n$，让 y 作为动点，将上式对 y^i 作两次偏导数，再在 $y = x$ 处取值则得

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f^k}{\partial x^i}\frac{\partial f^k}{\partial x^j} = \delta_{ij}.$$

因此 $\left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\right)$ 是正交矩阵. 对上式再微分得到

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 f^k}{\partial x^i \partial x^h}\frac{\partial f^k}{\partial x^j} + \frac{\partial f^k}{\partial x^i}\frac{\partial^2 f^k}{\partial x^j \partial x^h}\right) = 0.$$

由此不难得到

$$\frac{\partial^2 f^k}{\partial x^i \partial x^j} = 0,$$

因此 f^k 是 $x^1,\cdots,x^n$ 的一次函数.

15. 用 $(x^1,\cdots,x^n)$ 记 E^n 中的笛卡儿直角坐标系，假定它和曲纹坐标系 $(u^1,\cdots,u^n)$ 的变换公式由

$$x^i = x^i(u^1,\cdots,u^n)$$

给出. 因此

$$e_i = \frac{\partial x^j}{\partial u^i}\delta_j,$$

记

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial u^i}\frac{\partial x^k}{\partial u^j}.$$

由此得到

$$\frac{\partial e_i}{\partial u^j}=\frac{\partial^2 x^k}{\partial u^i\partial u^j}\delta_k=\Gamma^k_{ij}e_k,$$

其中 Γ^k_{ij} 是关于 g_{ij} 的 Christoffel 记号.

向量场 v 可表为

$$v=\sum_{i=1}^n v^i e_i,$$

故

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}v^i e_i+v^i\mathrm{d}e_i=(\mathrm{d}v^i+v^j\Gamma^i_{jk}\mathrm{d}u^k)e_i.$$

v 是平行场的条件是 $\mathrm{d}v=0$,即

$$\mathrm{d}v^i+v^j\Gamma^i_{jk}\mathrm{d}u^k=0.$$

22. 在 V 中取基底 $\{\delta_i\}$,在 V^* 中的对偶基底为 $\{\delta^i\}$,则该张量是 $\sum_i \delta_i\otimes\delta^i$,即恒同映射 $\mathrm{id}:V\to V$.

34. 在 V 中取基底 $\{\delta_i\}$,在 V^* 中取对偶基底 $\{\delta^i\}$,则该张量为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r!}(\delta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta_{i_r})\otimes(\delta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{i_r})\\&=\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}\delta_{i_1}\otimes\cdots\otimes\delta_{i_r}\otimes\delta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{j_r}.\end{aligned}$$

若在 $\wedge^r V$ 和 $\wedge^r V^*$ 之间定义配对如下:

$$\langle\delta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\delta_{i_r},\delta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\delta^{j_r}\rangle=\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r},$$

则 $\wedge^r V$ 和 $\wedge^r V^*$ 互为对偶空间. 这时,上面的张量可看作恒同映射 $\mathrm{id}:\wedge^r V\to\wedge^r V$.

47. (1) 只要证明:当 $\dim V=3$ 时,V 上每一个 2 次外形式都是可分解的. 这可以和(2) 一起来证.

假定 $\dim V=n\geqslant 3$. 在 V^* 中取基底 $\{\delta^i\}$,则 $n-1$ 次外形式 α 可以表示为

$$\alpha=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}\alpha_i\delta^1\wedge\cdots\wedge\hat{\delta}^i\wedge\cdots\wedge\delta^n.$$

假定 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 不全为零. 令 $\beta=\sum_{i=1}^n\beta_i\delta^i$,则

$$\beta\wedge\alpha=(\sum_{i=1}^n\alpha_i\beta_i)\delta^1\wedge\cdots\wedge\delta^n,$$

故 $\beta\wedge\alpha=0$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^n\alpha_i\beta_i=0$. 因为 α_i 不全为零,故上述齐次线性方程有 $n-1$ 个线性无关解

$$(\beta^a_1,\cdots,\beta^a_n),\quad 1\leqslant a\leqslant n-1;$$

记 $\beta^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{\alpha} \delta^i$，则 $\beta^1, \cdots, \beta^{n-1}$ 是线性无关的 1 次形式，且 $\beta^{\alpha} \wedge \alpha = 0, \forall\, a$. 不难证明

$$\alpha = \lambda \cdot \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^{n-1}, \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

故 α 是可分解的.

48. 设 V^* 的基底为 $\{\delta^i\}$，2 次外形式 α 可表为

$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha_{ij}\delta^i \wedge \delta^j = \sum_{i<j}\alpha_{ij}\delta^i \wedge \delta^j,$$

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}.$$

假定 α_{ij} 不全为零，不妨设 $\alpha_{12} \neq 0$，于是

$$\alpha = (\alpha_{12}\delta^1 + \alpha_{32}\delta^3 + \cdots + \alpha_{n2}\delta^n) \wedge \left(\delta^2 + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{12}}\delta^3 + \cdots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{12}}\delta^n\right) + \sum_{3 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha'_{ij}\delta^i \wedge \delta^j.$$

令

$$\sigma^1 = \alpha_{12}\delta^1 + \alpha_{32}\delta^3 + \cdots + \alpha_{n2}\delta^n,$$

$$\sigma^2 = \delta^2 + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{12}}\delta^3 + \cdots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{12}}\delta^n,$$

则

$$\alpha = \sigma^1 \wedge \sigma^2 + \sum_{3 \leqslant i < j} \alpha'_{ij}\delta^i \wedge \delta^j.$$

若 α'_{ij} 不全为零，不妨设 $\alpha'_{34} \neq 0$，则继续上面的过程. 因 n 是有限数，故上述步骤必在有限步之后终止，即 α 可表成

$$\alpha = \sigma^1 \wedge \sigma^2 + \cdots + \sigma^{2r-1} \wedge \sigma^{2r},$$

其中 $\sigma^1, \cdots, \sigma^{2r}$ 是线性无关的 1 次形式.

习题二

4. 由题设，对每一点 $p \in \Sigma$，存在 p 的邻域 $U \subset \mathbf{R}^3$，以及正则参数曲面 $\varphi: D(\subset \mathbf{R}^2) \to \mathbf{R}^3$，使得 $\varphi(D) = U \cap \Sigma$. 用 (u,v) 记 D 的点的坐标，则 φ 可表示为

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v).$$

正则性是指

$$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \neq 0,$$

因此 φ 在点 p 的附近是 $1-1$ 的. 不妨设 φ 在 D 上是一一的，因而 $(D; u,v)$ 是 Σ 的一个局部坐标系. 要证明：任意两个这样的局部坐标系是 C^{∞}- 相关的，因

而 Σ 作为 $\mathbf{R}^3$ 的拓扑子空间具有光滑流形结构.

设$(\widetilde{D};\widetilde{u},\widetilde{v})$ 是点 p 的另一个坐标系. $\widetilde{\varphi}(\widetilde{D})=\widetilde{U}\cap\Sigma$, $p\in U\cap\widetilde{U}\cap\Sigma$. 由于 $\varphi,\widetilde{\varphi}$ 的 $1-1$ 性,则在$(\widetilde{u},\widetilde{v})$ 和(u,v) 之间有对应关系使得

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{u},\widetilde{v})=\varphi(u,v).$$

又

$$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\widetilde{u},\widetilde{v})},\frac{\partial(z,x)}{\partial(\widetilde{u},\widetilde{v})},\frac{\partial(x,y)}{\partial(\widetilde{u},\widetilde{v})}\right)$$

$$=\lambda\cdot\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right),\quad \lambda\neq 0,$$

故不妨设$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\widetilde{u},\widetilde{v})}$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 同时不为零. 根据反函数定理, u,v 在局部上能表成 x,y 的光滑函数,因而(u,v) 是$(\widetilde{u},\widetilde{v})$ 的光滑函数,并且

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\widetilde{u},\widetilde{v})}=\frac{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\widetilde{u},\widetilde{v})}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\neq 0,$$

所以$(\widetilde{D};\widetilde{u},\widetilde{v})$ 和$(D;u,v)$ 是光滑相关的.

7. 先证明对于 M 的任意一个局部坐标系$(U;x^i)$,映射 $f|_U:U\to N$ 是常值映射. 然后利用 M 的连通性证明 $f:M\to N$ 是常值映射.

12. 若切映射 $f_{*p}:T_pM\to T_{f(p)}\mathbf{R}^n$ 的秩处处为 n,则 $f(M)$ 必为 $\mathbf{R}^n$ 中非空开集. 另外,由于 M 是紧致拓扑空间, f 是连续映射,故 $f(M)$ 必是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集. 这与 $\mathbf{R}^n$ 的连通性相矛盾.

14. 利用下面关于无理数的逼近定理(证明可看:D. 希尔伯特,S. 康福森,直观几何(上册),p. 42):

设 α 是无理数,则对任意的正数 A,必有整数 m,n, $|m|>A$, $|n|>A$,使得

$$\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|<\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

17. 将 M 和 $\varphi(M)$ 等同起来,因此该嵌入子流形成为 $i:M\to N$. 利用嵌入子流形的典型局部坐标系(定理 4.4),将函数 g 光滑地扩充到任意一点 p 的坐标域 $U_p\subset N$ 上得到函数 $\widetilde{g}_p\in C^\infty(U_p)$,满足条件 $\widetilde{g}_p|_{U_p\cap M}=g|_{U_p\cap M}$. M 是 N 的闭子集,令 $U_0=N\backslash M$, $\widetilde{g}_0=0$,因此$\{U_0,U_p:\ p\in M\}$ 构成 N 的开覆盖. 再利用单位分解,从 $\widetilde{g}_0,\widetilde{g}_p$ 构造出 N 上的光滑函数 $\widetilde{g}$,使得 $\widetilde{g}|_M=g$.

26. 取截断函数 $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,使得

$$\varphi\geqslant 0,\quad \varphi|_{[-1,1]}=1,\quad \varphi|_{\mathbf{R}\backslash[-2,2]}=0.$$

设 $|\varphi'(x)|\leqslant\varepsilon_0^{-1}$,则当 $|y|<\varepsilon_0$ 时,

$$f_0(x)=x+y\cdot\varphi(x)$$

为光滑同胚，满足 $f_0(0)=y$，且当 $|x|\geqslant 2$ 时 $f_0(x)=x$. 对于任意的 $a\in\mathbf{R}$，存在正整数 n，使得 $\left|\dfrac{a}{n}\right|<\varepsilon_0$，因此不难从 f_0 构造出光滑同胚 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得 $f(0)=a$，且当 $x\notin(-|a|-2,|a|+2)$ 时 $f(x)=x$.

27.　利用上一题在 $\mathbf{R}^n$ 情形的结果，先证明：若 (U,φ) 是 M 的一个坐标卡，则对于任意两点 $x,y\in U$，存在光滑同胚 $f:M\to M$，使得 $f(x)=y$. 然后利用 M 的连通性证明上述结论对于任意的 $x,y\in M$ 都成立.

31.　将 $S^1\subset E^2$ 看成单位向量的集合，在 $E^2\times S^1$ 中引进如下关系：$(x,v_1),(y,v_2)\in E^2\times S^1$，则 $(x,v_1)\sim(y,v_2)$ 当且仅当 $v_1=v_2,\overrightarrow{xy}=\lambda v_1$. 显然 E^2 中有向直线的集合等同于商空间 $E^2\times S^1/\sim$.

35.　利用第 33 题的结果.

36.　不套用第 35 题的结果，给出另一个证明. 例如，用反证法.

41.　用单位分解定理.

习题三

6.　利用嵌入子流形的典型局部坐标系.

8.　将 $\varphi(M)$ 和 M 等同起来，此时嵌入子流形成为 $i:M\to N$. 利用嵌入子流形的典型局部坐标系，对于任意一点 $p\in M$，将 $X\in\mathscr{X}(M)$ 在点 p 的邻域 $U_p\subset N$ 内扩充，得到 $X_{(p)}\in\mathscr{X}(U_p)$，使得

$$X_{(p)}|_{U_p\cap M}=X|_{U_p\cap M}.$$

令 $U_0=N\backslash M,X_{(0)}=0$. 然后利用单位分解将 $X_{(0)},X_{(p)},p\in M$ 组合成 N 上的光滑切向量场 $\widetilde{X}$，使得 $\widetilde{X}|_M=X$.

9.　由于 $\varphi:M\to N$ 是单一的浸入，

$$\varphi_{*p}:T_pM\to\varphi_{*p}(T_pM)\subset T_{\varphi(p)}N$$

是同构，因此在 M 上有切向量场 $\widetilde{X}$，使得

$$\varphi_{*p}(\widetilde{X}(p))=X(\varphi(p)).$$

再利用浸入的典型局部坐标系，证明 $\widetilde{X}$ 的光滑性.

19.　自左至右、自上而下，可以取如下向量场：

$$X_1(x,y)=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_2(x,y)=-x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_3(x,y)=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_4(x,y)=(x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial x}+2xy\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_5(x,y)=-x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_6(x,y)=(y^2-x^2)\frac{\partial}{\partial x}+2xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

30. 必要性是推论 3.4 和定理 3.5 的直接推论.

现在假定$[X,Y]=0$.任意固定的一点$p\in M$,命

$$\tilde{Y}(t)=((\varphi_t)_*Y)(p)=(\varphi_t)_{*\varphi_{-t}(p)}(Y(\varphi_{-t}(p))),$$

则$\tilde{Y}(t)$是切空间T_pM中的一条曲线.很明显$\tilde{Y}(0)=Y(p)$.另外,$\tilde{Y}(t)$的导数是

$$\begin{aligned}\tilde{Y}'(t)&=\lim_{s\to 0}\frac{\tilde{Y}(t+s)-\tilde{Y}(t)}{s}\\&=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left\{(\varphi_{t+s})_{*\varphi_{-(s+t)}(p)}(Y(\varphi_{-(t+s)}(p)))-(\varphi_t)_{*\varphi_{-t}(p)}(Y(\varphi_{-t}(p)))\right\}\\&=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(\varphi_t)_{*\varphi_{-t}(p)}\left\{(\varphi_s)_{*\varphi_{-(s+t)}(p)}(Y(\varphi_{-s}(\varphi_{-t}(p))))-Y(\varphi_{-t}(p))\right\}\\&=(\varphi_t)_{*\varphi_{-t}(p)}([X,Y](\varphi_{-t}(p)))=0,\quad\forall\ t.\end{aligned}$$

因此$\tilde{Y}(t)=Y(p)$,即$(\varphi_t)_*Y=Y$,故由推论 3.4 得到$\varphi_t\circ\psi_s=\psi_s\circ\varphi_t$.

31. 有多种证法.一种方法是利用第 30 题的结论.设$(U;x^i)$是局部坐标系,$|x^i|<\delta$,且假定

$$X_1,\cdots,X_h,\frac{\partial}{\partial x^{h+1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}$$

处处线性无关.用$\varphi^{(\alpha)}$记X_α所生成的局部单参数变换群,故

$$\varphi_t^{(\alpha)}\circ\varphi_s^{(\beta)}=\varphi_s^{(\beta)}\circ\varphi_t^{(\alpha)}.$$

令

$$U'=\{(t^1,\cdots,t^h,x^{h+1},\cdots,x^m)\in\mathbf{R}^m:|t^\alpha|<\delta,|x^i|<\delta\}.$$

定义映射$\varphi:U'\to M$,使得

$$\begin{aligned}&\varphi(t^1,\cdots,t^h,x^{h+1},\cdots,x^m)\\&=\varphi_{t_1}^{(1)}\circ\cdots\circ\varphi_{t_h}^{(h)}(\psi^{-1}(0,\cdots,0,x^{h+1},\cdots,x^m)),\end{aligned}$$

其中ψ是局部坐标系$(U;x^i)$的坐标映射.则φ给出了$\psi^{-1}(0)=p$点附近的坐标映射,在此坐标系下,$\frac{\partial}{\partial t^\alpha}=X_\alpha$.

另一种方法是用归纳法.定理 4.1 说明在$h=1$时结论成立.假设在$h-1$时结论已真,现有$h(\geqslant 2)$个处处线性无关的切向量场$X_1,\cdots,X_h$,满足条件

$[X_\alpha, X_\beta]=0, 1\leqslant \alpha,\beta\leqslant h$. 根据归纳法假设，在点 $p\in U$，存在局部坐标系 $(V;x^i)$，使得 $p\in V$，且

$$X_\lambda=\frac{\partial}{\partial x^\lambda},\qquad 1\leqslant\lambda\leqslant h-1.$$

设

$$X_h=a^i\frac{\partial}{\partial x^i},\qquad a^i\in C^\infty(V),$$

且 $(a^h,\cdots,a^m)$ 无零点. 由题设条件 $[X_\lambda,X_h]=0$ 得 $\frac{\partial a^i}{\partial x^\lambda}\equiv 0$，故 $a^i=a^i(x^h,\cdots,x^m)$. 命

$$\tilde{X}_h=a^h\frac{\partial}{\partial x^h}+\cdots+a^m\frac{\partial}{\partial x^m},$$

这是在坐标空间 $(x^h,\cdots,x^m)$ 上处处非零的向量场. 于是由定理 4.1 知存在坐标变换

$$\begin{cases} y^\lambda=x^\lambda, & 1\leqslant\lambda\leqslant h-1,\\ y^a=y^a(x^h,\cdots,x^m), & h\leqslant a\leqslant m\end{cases}$$

使得 $\tilde{X}_h=\frac{\partial}{\partial y^h}$，同时 $X_\lambda=\frac{\partial}{\partial y^\lambda}$. 所以

$$X_h=\tilde{a}^\lambda\frac{\partial}{\partial y^\lambda}+\frac{\partial}{\partial y^h}.$$

由题设条件可以得知 $\tilde{a}^\lambda=a^\lambda(y^h,\cdots,y^m)$.

作坐标变换

$$\begin{cases} z^\lambda=y^\lambda-\int\tilde{a}^\lambda(y^h,\cdots,y^m)\mathrm{d}y^h, & 1\leqslant\lambda\leqslant h-1,\\ z^a=y^a, & h\leqslant a\leqslant m,\end{cases}$$

则得

$$X_\alpha=\frac{\partial}{\partial z^\alpha},\qquad 1\leqslant\alpha\leqslant h.$$

34. 利用第 33 题的结论.

习题四

2. $\mathbf{R}P^n$ 可以看作 S^n 在对径映射(习题二第 33 题)下的商空间. S^n 的标准黎曼度量在对径映射下是不变的，因而在 $\mathbf{R}P^n$ 上给出了一个黎曼度量.

习题五

3. 在关于南极点$(0,\cdots,0,-1)$的球极投影下，

$$u^i=\frac{x^i}{1+x^{n+1}},\qquad 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$x^i=\frac{2u^i}{1+\sum_j(u^j)^2},\qquad x^{n+1}=\frac{1-\sum_j(u^j)^2}{1+\sum_j(u^j)^2}$$

此时

$$i^*g=\frac{4\sum_i \mathrm{d}u^i\otimes\mathrm{d}u^i}{\left(1+\sum_i(u^i)^2\right)^2}.$$

4. (2)

$$i^*g^1=\frac{4\sum_i \mathrm{d}u^i\otimes\mathrm{d}u^i}{\left(1-\sum_i(u^i)^2\right)^2},\qquad \sum_i(u^i)^2<1.$$

12. 设单参数变换群φ_t诱导的切向量场是X. 设Y,Z是M上的任意两个光滑切向量场，于是由条件$\varphi_t^*g=g$得知

$$(\varphi_t^*g)(Y,Z)=g(Y,Z),$$
$$((\varphi_{-t})^*g)(Y,Z)=g(Y,Z).$$

因此，对于任意的$p\in M$及任意的$t\in\mathbf{R}$有

$$\begin{aligned}(g(Y,Z))(\varphi_t(p))&=((\varphi_{-t})^*g(Y,Z))(\varphi_t(p))\\&=g(p)((\varphi_{-t})_{*\varphi_t(p)}(Y(\varphi_t(p))),(\varphi_{-t})_{*\varphi_t(p)}(Z(\varphi_t(p))))\end{aligned}$$

在两边对t求导，并取$t=0$，得

$$X(p)(g(Y,Z))=g(p)([X,Y](p),Z(p))+g(p)(Y(p),[X,Z](p)),$$

即

$$X(g(Y,Z))=g([X,Y],Z)+g(Y,[X,Z])$$

由此得到

$$g(D_YX,Z)+g(Y,D_ZX)=0.$$

取$Y=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$Z=\dfrac{\partial}{\partial x^j}$便得

$$X_{j,i}+X_{i,j}=0.$$

13. 在$\mathbf{R}^n$的笛卡儿直角坐标系下，设

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}X=\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i},$$

即

$$X_{i,j} = X^i_{,j} = \frac{\partial X^i}{\partial x^j}.$$

因此，X 是 Killing 向量场的条件成为

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \frac{\partial X^j}{\partial x^i} = 0.$$

再对 x^k 求偏导数得到

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 X^j}{\partial x^i \partial x^k} = 0.$$

上式说明带有三个指标的量 $\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^j \partial x^k}$ 关于 j,k 是对称的，关于 i,j 是反对称的，因此

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^j \partial x^k} = 0, \quad \forall\, i,j,k.$$

由此可见 X^i 是 x^j 的一次函数，设

$$X^i = a^i_j x^j + b^i,$$

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j} = a^i_j,$$

故

$$a^i_j + a^j_i = 0,$$

(a^i_j) 是反对称矩阵.

24. 在 S^2 上的诱导黎曼度量为

$$2(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,|_{S^2}$$

S^2 在上述黎曼度量下的面积为 8π.

习题六

2. 用 $\varphi: G \times G \to G$ 记乘法运算. 对于 e 的开邻域 U，则由 φ 的连续性可知，存在 e 的邻域 V_1，使得 $V_1 \cdot V_1 \subset V$. 继续此过程，得到 e 的邻域 $V_1, \cdots, V_n$，使 $V_1 \cdot \cdots \cdot V_n \subset V$. 令 $\widetilde{V} = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$，$V = \widetilde{V} \cap \widetilde{V}^{-1}$ 为所求的邻域.

3. 任取 e 的一个开邻域 $V_0 \subset U$，则 V_0^{-1} 也是 e 的开邻域. 令 $V = V_0 \cap V_0^{-1}$. 只要证明 $\bigcup_{r=1}^{\infty} V^r$ 是 G 的开子集，又是 G 的闭子集.

4. 先设 $p = e \notin F$，则 $G \backslash F = U$ 为 e 的开邻域. 取 e 的邻域 V，使得 $V \cdot V^{-1} \subset U$，可证 $\overline{V} \subset U$.

若 $p \neq e, p \notin F$，则 $e \notin p^{-1} \cdot F$. 问题将化为前一种情形.

13. 将 S^3 上的左不变向量场用 $\mathbf{R}^4 (= H)$ 的笛卡儿直角坐标系表示出

来.

16. 可利用第 17 题(3) 的结论.

25. 参看习题二节第 14 题.

26. $\mathrm{GL}(2)\backslash\exp(\mathrm{gl}(2)) = \{A \in \mathrm{GL}(2):A$ 至少有一个特征值为负数$\}$.

首先从 2×2 实矩阵的 Jordan 型不难看出

$\exp(\mathrm{gl}(2)) \subset \{A \in \mathrm{GL}(2):A$ 的特征值全为正数,或为共轭复数$\}$.

现在要证上式两边相等. 分两种情形:

a. 设 $A\in \mathrm{GL}(2)$,A 的特征值为共轭复数(因而互不相等),因此 $A = P\cdot \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & \overline{Z}\end{pmatrix}\cdot P^{-1}$. 由于 A 是实矩阵,可证 $P\cdot\begin{pmatrix}\ln Z & 0 \\ 0 & \ln\overline{Z}\end{pmatrix}\cdot P^{-1}$ 也是实矩阵. 因此

$$A = \exp\left(P\cdot\begin{pmatrix}\ln Z & 0 \\ 0 & \ln\overline{Z}\end{pmatrix}\cdot P^{-1}\right).$$

b. 设 $A\in \mathrm{GL}(2)$,A 的特征值 λ_1,λ_2 是正数. 可以证明存在实矩阵 P,使得

$$A = P\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\cdot P^{-1},$$

其中 $*$ 是 0 或 1(事实上,P 的列向量可以看作实矩阵关于实特征值的特征向量或广义特征向量,必可取实向量). 此时

$$A = \exp\left(P\cdot\begin{pmatrix}\ln\lambda_1 & ** \\ 0 & \ln\lambda_2\end{pmatrix}\cdot P^{-1}\right),$$

其中 $**$ 是 0 或 $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2}$.

27. 每一个复矩阵都相似于它的 Jordan 型,因此只要证明 $\mathrm{GL}(2;\mathbf{C})$ 中的 Jordan 型矩阵能写成指数形状. $\mathrm{GL}(2;\mathbf{C})$ 中的 Jordan 型矩阵只有两类:

$$\begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a & 1 \\ 0 & a\end{pmatrix},\quad a,b\neq 0.$$

关于前者,显然有我们所要的结论. 关于后者,注意到

$$\begin{pmatrix}a & 1 \\ 0 & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}.$$

所以,只要证明矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

能写成矩阵的指数形状.

29.　(3) 用(a,b)表示右作用在直线上的仿射变换群的点，则

$$(a,b)\cdot(a_1,b_1)=(aa_1,a_1b+b_1),$$
$$e=(1,0).$$

由$\left.\frac{\partial}{\partial a}\right|_e,\left.\frac{\partial}{\partial b}\right|_e$生成的左不变向量场分别为

$$X|_{(a,b)}=a\frac{\partial}{\partial a}+b\frac{\partial}{\partial b},$$
$$Y|_{(a,b)}=\frac{\partial}{\partial b}.$$

30.　(1) 与 29.(3) 中的左不变向量场 X,Y 对应的单参数子群分别为 $\gamma(t)=(e^t,0),\sigma(t)=(1,t)$. 在直线上的对应基本向量场为 $\tilde{X}(x)=x\frac{\partial}{\partial x}$, $\tilde{Y}(x)=\frac{\partial}{\partial x}$.

(2)$X=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}$.

(3) 在 $SO(3)$ 上可以取 Euler 角为局部坐标系，相应的单参数子群为

$$\theta_1(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\theta_2(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos t & -\sin t\\ 0 & \sin t & \cos t\end{pmatrix},$$

$$\theta_3(t)=\begin{pmatrix}\cos t & 0 & \sin t\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin t & 0 & \cos t\end{pmatrix}.$$

右作用在$(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$上所得到的基本向量场为

$$X_1=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_2=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z},$$

$$X_3=x\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial x}.$$

参考文献

1 白正国,沈一兵等.黎曼几何初步.北京:高等教育出版社,1992

2 陈省身,陈维桓.微分几何讲义.北京:北京大学出版社,1983

3 陈维桓.微分几何初步.北京:北京大学出版社,1990

4 黄正中.微分几何导引.南京:南京大学出版社,1992

5 江泽涵.拓扑学引论.上海:上海科学技术出版社,1978

6 J 米尔诺.莫尔斯理论.北京:科学出版社,1988

7 普茨尼科夫.几何讲义第二学期:线性代数和微分几何.北京:高等教育出版社,1992

8 伍鸿熙,沈纯理,虞言林.黎曼几何初步.北京:北京大学出版社,1989

9 伍鸿熙,陈维桓.黎曼几何选讲.北京:北京大学出版社,1993

10 I M 辛格,J A 索普.拓扑学与几何学基础讲义.上海:上海科学技术出版社,1985

11 徐森林,薛春华.流形.北京:高等教育出版社,1991

12 严志达,许以超.Lie 群及其 Lie 代数.北京:高等教育出版社,1985

13 尤承业.基础拓扑学讲义.北京:北京大学出版社,1997

14 詹汉生.微分流形导引.北京:北京大学出版社,1987

15 张筑生.微分拓扑讲义.北京:北京大学出版社,1996

16 V I Arnold. Mathematical Methods of Classical Mechanics. GTM60, New York:Springer — Verlag,1978

17 M Berger,B Gostiaux. Differential Geometry : Manifolds, Curves and Surfaces,GTM115,New York:Springer — Verlag,1988

18 M Berger,P Gauduchon,E Mazet. Le Spectre d'une Variété Riemannienes. LNM 194. New York:Springer — Verlag,1974

19 W Boothby. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. New York:Academic Press,1975

20 I Chavel. Eigenvalues in Riemannian Geometry. New York:Academic Press,1984

21 J Cheeger and D Ebin. Comparison Theorems in Riemannian Geometuy. Amsterdam:North — Holland,1975

22 S S Chern. Differentiable Manifolds. Chicago:University of Chicago,1953(油印讲义)

23 M W Hirsch. Differential Topology. GTM33,New York:Springer —

Verlag,1976

24 H B Lawson. The quantitative theory of foliations. Providence: Amer. Math. Soc. ,1997

25 G deRham. Differentiable Manifolds. New York:Springer — Verlag, 1984

26 F W Warner. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. GTM94,New York:Springer — Verlag,1983

27 H Weyl. The concept of a Riemann Surface. Reading:Addison — Wesley,1955

28 H Whitney. Geometric Integration Theory. Princeton:Princeton University Press,1957

索　　引

（以拼音为序）

Z

责任编辑　胡乃冏

封面设计　李卫青

责任绘图　黄建英

版式设计　胡乃冏

责任校对　李　杰

责任印制　杨　明

图书在版编目（CIP）数据

微分流形初步 / 陈维桓编著. —2 版. —北京: 高等教育出版社, 2001. 8（2005 重印）
高等院校数学专业研究生教材
ISBN 7-04-009921-7

Ⅰ. 微… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 微分—流形—研究生—教材 Ⅳ. O189. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 26481 号

微分流形初步（第二版）
陈维桓 编著

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http: //www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http: //www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http: //www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市联华印刷厂		
		版　　次	1998 年 9 月第 1 版
开　　本	787 × 960　1/16		2001 年 8 月第 2 版
印　　张	23.25	印　　次	2005 年 3 月第 4 次印刷
字　　数	420 000	定　　价	36.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 9921－00